III Zufallsgrößen und Binomialverteilung

1 Zufallsgrößen

S. 60

1 a) $\Omega = \{(00), (01), (10), (03), (30), (11), (13), (31), (33)\}$
b) Minimaler Gewinn: $\{(00), (01), (10), (03), (30)\}$; Maximaler Gewinn: $\{(33)\}$

S. 61

2 a)

ω	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$X(\omega)$	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6	2	4	4	5

b) $X = 2 = \{2;3;5;7;11;13\}$ $\rightarrow$ Primzahlen
$X = 3 = \{4;9\}$ $\rightarrow$ Quadratzahlen
$X = 4 = \{6;8;10;14;15\}$
c) $P(X = 2) = 37{,}5\,\%$; $P(X = 3) = 12{,}5\,\%$;

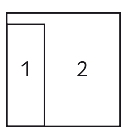
3 a)

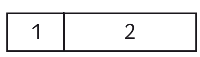
ω	ABC	ACB	BAC	BCA	CAB	CBA
$G(\omega)$	2	2	1	−3	1	−3

b) $G = 2$: Man gewinnt 2 €, wenn A als erster Buchstabe gezogen wird;
$G = -3$: Man verliert 3 €, wenn A als letzter Buchstabe gezogen wird;
$G \leqq 2$: Jedes Ereignis kann eintreten.
c) $P(G \leqq 1) = \frac{2}{3}$

4 a) $\Omega = \{GGGG; \underbrace{\overline{G}GGG, G\overline{G}GG, \ldots}_{4\times}, \underbrace{\overline{G}\overline{G}GG, \overline{G}G\overline{G}\overline{G}, \ldots}_{6\times}, \underbrace{\overline{GGG}G, \ldots}_{4\times}; \underbrace{\overline{GGGG}}_{1\times}\}$ $\Rightarrow$ $|\Omega| = 16$ (oder 2^4)
b) $X = 0 = \{\overline{GGGG}\}$ Herbert trifft nie ins Gelbe;
$X = 2 = \{\overline{GG}GG, \ldots, GG\overline{GG}\}$ Herbert trifft genau zweimal Gelb;
$X \leqq 1 = \{\overline{GGGG}; \overline{GGG}G, \ldots, GGGG\}$ Herbert trifft höchstens einmal ins Gelbe.
c) $P(X=0) = \frac{1}{16}$; $P(X=2) = \frac{6}{16} = 37{,}5\,\%$; $P(X \leqq 1) - \frac{5}{16} = 31{,}25\,\%$

5 a) $f^{-1}(x) = \frac{4}{x} + 1$ $\mathbb{D}_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\mathbb{W}_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ b) $f^{-1}(x) = \frac{1}{7-x}$ $\mathbb{D}_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{7\}$ $\mathbb{W}_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
c) $f^{-1}(x) = \sqrt{x} + 2$ $\mathbb{D}_{f^{-1}} = \mathbb{R}^+$ $\mathbb{W}_{f^{-1}} = [2; +\infty]$ d) $f^{-1}(x) = 5 + \frac{2}{x}$ $\mathbb{D}_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\mathbb{W}_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{5\}$

6 

oder 

$\left.\begin{array}{l} 1 \mathrel{\hat{=}} 27 \\ 2 \mathrel{\hat{=}} 63 \end{array}\right\}$ gesamt 90 $\left.\begin{array}{l} 1 \mathrel{\hat{=}} 30\,\% \\ 1 \mathrel{\hat{=}} 70\,\% \end{array}\right\}$ gesamt 100 %

2 Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße

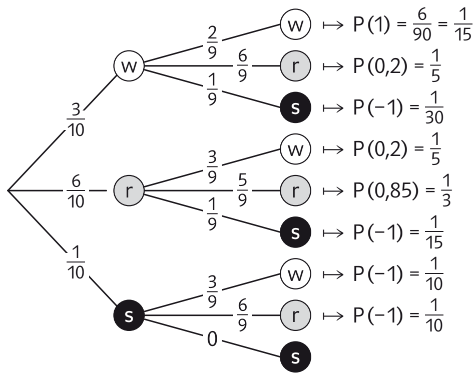
S. 62

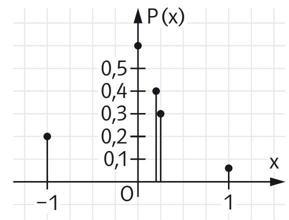
1 a) Für den Spieler kann die Zufallsgröße „Auszahlung“ oder „Gewinn“ von Interesse sein. Meist ist die Zufallsgröße „Gewinn“ von größerer Bedeutung.
Werte der Zufallsgröße G (Gewinn) in €: 4; 1; −1
b) $P(G=4) = P(\{rrr\}) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$
$P(G=1) = P(\{rr\overline{r}, r\overline{r}r, \overline{r}rr\}) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{3} + \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{18}$
$P(G=-1) = 1 - [P(G=4) + P(G=1)] = 1 - \left[\frac{1}{18} + \frac{5}{18}\right] = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

S. 64

2 $(P(w) = 0{,}3;\quad P(r) = 0{,}6;\quad P(s) = 0{,}1)$





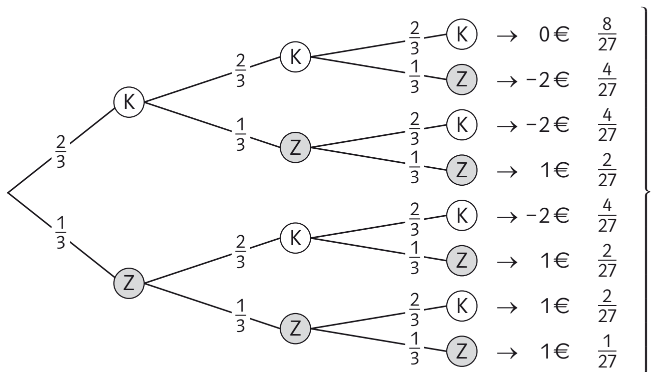
$P(-1) = \frac{1}{5};\quad P(0{,}2) = \frac{2}{5};\quad P(0{,}25) = \frac{1}{3};\quad P(1) = \frac{1}{15}$

3 $P(X \geqq x)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass X mindestens so groß wie ein vorgegebener Wert x ist.

4 Durch „Addition der Werte":
Der Graph der kumulativen Verteilungsfunktion verläuft auf der x-Achse bis zum ersten Stab des zugehörigen Stabdiagramms. An dieser Stelle springt der Graph gerade um die Höhe des Stabes in y-Richtung (auf der die Wahrscheinlichkeit $P(X \leqq x)$ angetragen ist), um dann parallel zur x-Achse bis zur Stelle des nächsten Stabes zu laufen. Nun springt der Graph erneut um die Höhe des dortigen Stabes in y-Richtung, um anschließend wieder parallel zur x-Achse zu laufen. Dieser Prozess wiederholt sich bei jedem Stab des Stabdiagramms. Am letzten Stab springt der Graph der kumulativen Verteilungsfunktion schließlich auf den Wert 1.

S. 65

5



$P(-2) = \frac{12}{27}$

$P(1) = \frac{7}{27}$

$P(0) = \frac{8}{27}$

6 a) $P(1) = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot 3 = 34{,}7\,\%;\quad P(-1) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0{,}579 = 57{,}9\,\%;$

$P(2) = \left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{5}{6}\cdot 3 = 6{,}9\,\%;\quad P(3) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = 4{,}6\,‰ = 0{,}46\,\%$

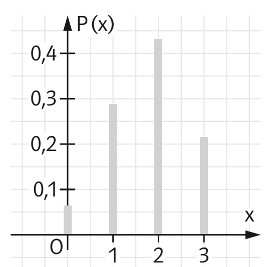
b) $P(X \geqq 2) = 6{,}9\,\% + 0{,}46\,\% = 7{,}36\,\% = \frac{2}{27}$

c) Individuelle Lösungen

7 a)

X	3	2	1	0
P(X)	$0{,}6^3$ = 21,6 %	$0{,}4\cdot 0{,}6^3\cdot 3$ = 43,2 %	$0{,}6\cdot 0{,}6^3\cdot 3$ = 28,8 %	$0{,}4^3$ = 6,4 %

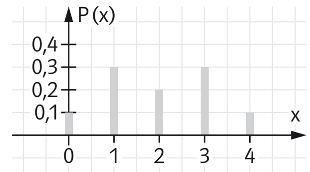
b) $P(X \geqq 2) = 0{,}216 + 0{,}432 = 0{,}648 = 64{,}8\,\%$



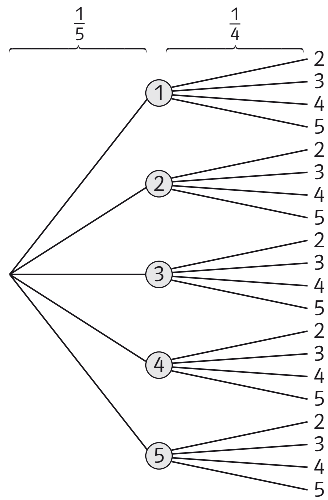
Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

8 a) $P(X \leqq 2) = 0{,}6$;
$P(X > 3) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$

b) $P(0 < x \leqq 4) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$

c)


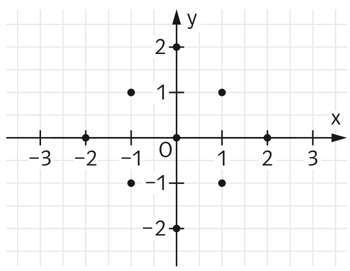
9 a) Es gibt $4+3+2+1 = 10$ Möglichkeiten oder: $5 \cdot 4 : 2 = 10$



b)

Summe X	3	4	5	6	7	8	9
P(X = x)	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

da $3 = 1+2 = 2+1$
$4 = 1+3 = 3+1$
$5 = 1+4 = 3+2 = 4+1 = 2+3$
$6 = 1+5 = 2+4 = 5+1 = 4+2$
$7 = 5+2 = 2+5 = 3+4 = 4+3$
$8 = 3+5 = 5+3$
$9 = 4+5 = 5+4$

10 a)


$\{(0|0), (0|2), (0|-2), (2|0), (-2|0),$
$(1|1), (1|-1), (-1|1), (-1|-1)\}$

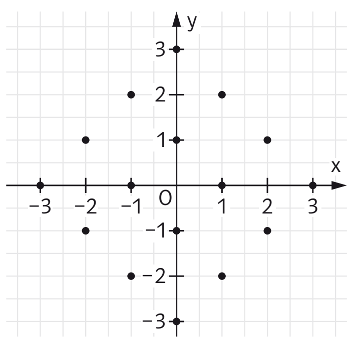
$P(0|0) = 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$

$P(0|2) = \frac{1}{16} = P(0|-2) = P(2|0) = P(-2|0)$

$P(1|1) = P(-1|1) = P(1|-1) = P(-1|-1) = 2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$

b)

X	0	$\sqrt{2}$	2
P(x)	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$	$\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

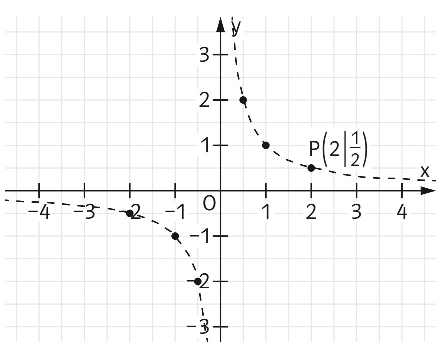
c)


Es gibt insgesamt 64 ($= 4^3$) mögliche Wege, die alle gleichwahrscheinlich sind. Die Wahrscheinlichkeit an einem bestimmten Punkt anzukommen wird durch die Anzahl der möglichen Wege festgelegt.

$P[(0|3), (0|-3), (3|0), (-3|0)] = P(3) = 4 \cdot \frac{1}{64} = \frac{1}{16}$

$P[(2|1), (1|2), (-1|2), (2|-1), (-2|1), (1|-2), (-2|1), (-1|-2)]$
$= P(\sqrt{5}) = 8 \cdot 3 \cdot \frac{1}{64} = \frac{3}{8}$

$P[(1|0), (-1|0), (0|-1), (0|1)] = P(1) = 49\frac{1}{64} = \frac{9}{16}$

11


$f(2) = \frac{1}{2}$

$f'(x) = -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4}$

$\frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \cdot 2 + t \quad \Rightarrow \quad t = 1$

$\Rightarrow \quad y = -\frac{1}{4}x + 1 \quad \Rightarrow$ Tangente

Normale; $m = 4$

$\frac{1}{2} = 4 \cdot 2 + t \quad \Rightarrow \quad t = -7{,}5$

$\Rightarrow \quad y_n = 4x - 7{,}5$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

3 Erwartungswerte

S. 66

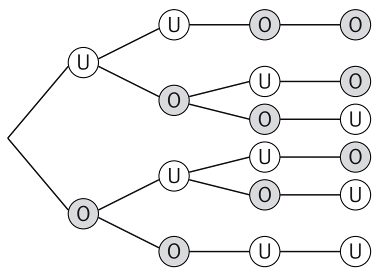
1 $P(\text{3 Wappen}) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$; $P(\text{2 Wappen}) = 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{8}$;
$P(\text{1 Wappen}) = 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$; $P(\text{kein Wappen}) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$
Durchschnittlicher Gewinn bei 80 Spielen:
$10\cdot(3€-1{,}60€) + 30\cdot(2€-1{,}60€) + 30\cdot(1€-1{,}60€) + 10\cdot(0€-1{,}60€) = -8€$
$\Rightarrow$ Gewinne pro Spiel: $\frac{-8€}{80} = -0{,}1€$
$\Rightarrow$ Auf Dauer wird man bei diesem Spiel verlieren;
$\Rightarrow$ besser keine Beteiligung.

S. 67

2 $E(X) = \frac{1}{6}\cdot(1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6} = 3{,}5$

3 a) $E(X) = 0{,}25(10+20+30+40) = 25$
b) $E(X) = 0{,}05\cdot15+0{,}2\cdot20+0{,}5\cdot25+0{,}2\cdot30+0{,}05\cdot35 = 25$

4

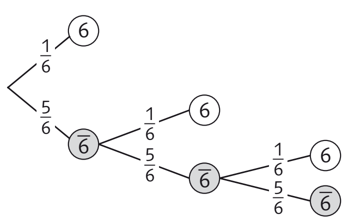


a) Maximal 3-mal ziehen
b) $P(\text{1-mal}) = 0{,}5$
$P(\text{3-mal}) = \frac{1}{6}$
$P(\text{2-mal}) = \frac{1}{3}$
$\Rightarrow$ $E(x) = 0{,}5\cdot1+\frac{1}{3}\cdot2+\frac{1}{6}\cdot3 = \frac{5}{3}$

5 a) $P(x \geqq 1) = 0{,}7$
b) $\Omega = \{(0000), (1000), (0100), (0010), (0001), (1100), (1010), (1001),$
$(0110), (0101), (0011), (1110), (1101), (1011), (0111), (1111)\}$
1 ≙ Haushalt „besitzt“; 0 ≙ „keiner da“
c) $P(0) = 0{,}3$ $P(1) = 0{,}3$ $P(2) = 0{,}2$ $P(3) = 0{,}1$ $P(4) = 0{,}1$
$\Rightarrow$ $E(X) = 0\cdot3+1\cdot0{,}3+2\cdot2+3\cdot0{,}1+4\cdot0{,}1 = 1{,}4$

S. 68

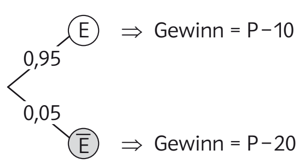
6



a) $P(1) = \frac{1}{6}$; $P(2) = \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{5}{36}$; $P(3) = \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{15}{36}$
b) $E(V) = 1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{91}{36} \approx 2{,}5$
$\Rightarrow$ Auf lange Sicht muss man im Durchschnitt 25-mal würfeln, obwohl dann immer noch nicht sicher ist, ob man ins Spiel kommt oder nicht.

7 a) $E(X) = 2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{4}+8\cdot\frac{1}{4} = 3{,}5$ $\Rightarrow$ Man müsste 3,5€ zahlen.
b) Einsatz verringern bedeutet z. B. den Sektor „8“ verkleinern und den Sektor „0“ vergrößern.
$\Rightarrow$ I: $P(-2{,}5) + \frac{1}{4}\cdot(2-2{,}5) + \frac{1}{4}\cdot(4-2{,}5) + q(8-2{,}5) = 0$
II: $p+q = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $q = \frac{1}{2}-p$ in I
$\Rightarrow$ $p = \frac{3}{8}$ $\Rightarrow$ Sektor „0“: $360°\cdot\frac{3}{8} = 135°$; Sektor „8“: $360°\cdot\frac{1}{8} = 45°$.
Die anderen beiden Sektoren bleiben unverändert bei 90°.

8



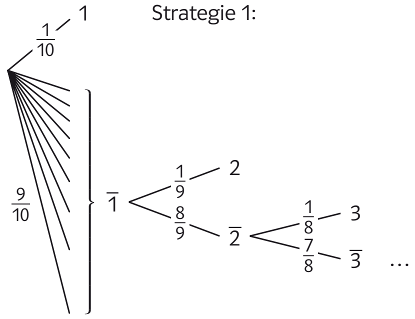
P ≙ Verkaufspreis; Erwarteter Gewinn: 0,5
Erwartungswert: $(P-10)\cdot0{,}95+(P-20)\cdot0{,}05$
$\Rightarrow$ $0{,}5 = (P-10)\cdot0{,}95+(P-20)\cdot0{,}05$
$\Rightarrow$ $P = 11$ Man muss das Teil zu 11€ verkaufen.

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

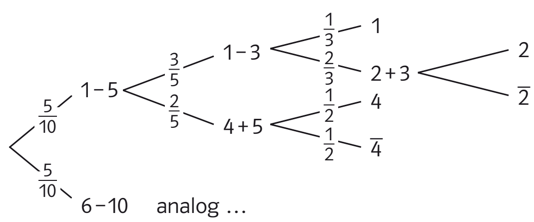
9 $P(X=1) = 1-(0{,}05+0{,}25+0{,}45) = 0{,}25$
$E(X) = -2\cdot 0{,}05+1\cdot 0{,}25+3{,}5\cdot 0{,}45 = 1{,}725$

10 Die Werte der Zufallsgröße können ganzzahlig sein, aber durch Multiplikation mit den Wahrscheinlichkeiten sind „krumme" Werte möglich.

11 Strategie 1:



Strategie 2:



$\Rightarrow$ Maximal 9 Fragen, minimal 1 Frage

$$E(x) = 1\cdot\frac{1}{10}+2\cdot\frac{9}{90}+3\cdot\frac{72}{990}+4\cdot\frac{9\cdot 8\cdot 7}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}+\ldots+9\cdot\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot\ldots\cdot 2}{10\cdot 9\cdot 8\cdot\ldots\cdot 3}$$
$$= \frac{1}{10}\cdot(1+2+3+4+5+\ldots 9\cdot 2) = \frac{1}{10}\cdot 54 = 5{,}4$$

$\Rightarrow$ Maximal 4 Fragen, minimal 3 Fragen

$$E(x) = 3\cdot\left[\left(\frac{5}{10}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{5}{10}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{5}{10}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\right)+4\cdot\left(\frac{5}{10}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{3}\right)\right]\cdot 2$$
$$= \left[3\cdot\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}\right)+4\cdot\frac{1}{5}\right]\cdot 2 = 3{,}4$$

$\Rightarrow$ Strategie 2 ist günstiger, da der Erwartungswert kleiner ist.

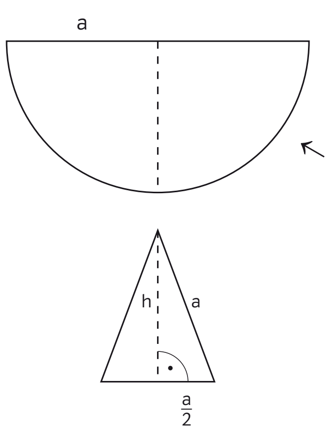
12 $E(X) = 1\cdot\frac{4-1}{b}+2\cdot\frac{4-2}{b}+3\cdot\frac{4-3}{b} = \frac{1}{b}(3+4+3) = \frac{10}{b}$;
da $\frac{3}{b}+\frac{2}{b}+\frac{1}{b} = 1$ sein muss $\Rightarrow$ $b = 6$ $\Rightarrow$ $E(X) = \frac{5}{3}$

13 Weil sich dann Gewinn und Verlust genau aufgleichen und das Spiel „fair" ist.

14 $E(X) = 1\cdot 0{,}25+2\cdot 0{,}25+4\cdot 0{,}25 = \frac{7}{4} = 1{,}75$ $\Rightarrow$ Mindestens 1,75 €

15 Umgekehrt proportional $x \mapsto \frac{1}{x}$ ja!
z.B. $\frac{2x+4}{4x-2}$ ist nicht umgekehrt proportional.

16



$$V_{Kegel} = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\pi}{4}\cdot a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = a^3\cdot\frac{\sqrt{3}}{24}\cdot\pi \approx 0{,}227a^3$$

$a\cdot\pi \triangleq$ Umfang $2r\pi$

$\Rightarrow$ $r = \frac{a}{2}$ $\Rightarrow$ $G = \left(\frac{a}{2}\right)^2\cdot\pi$

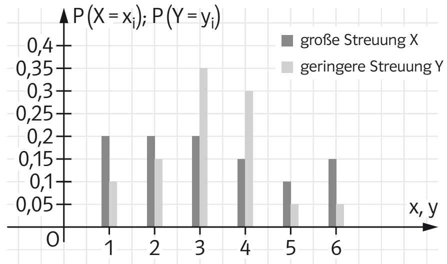
$$h = \sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}} = a\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

4 Varianz

S. 69

1 $E(X) = 1 \cdot 0{,}25 + 2 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}15 + 4 \cdot 0{,}125 + 5 \cdot 0{,}2 + 6 \cdot 0{,}25 = 3{,}2$
$E(Y) = 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}15 + 3 \cdot 0{,}35 + 4 \cdot 0{,}3 + 5 \cdot 0{,}05 + 6 \cdot 0{,}05 = 3{,}2$



Die Werte von Y streuen weniger als die von X, da die Werte nach dem Erwartungswert eine höhere Wahrscheinlichkeit haben.

S. 70

2

(1, 1)	(1, 2) (2, 1)	(1, 3) (3, 1) (2, 2)
$P(2) = \frac{1}{36}$;	$P(3) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$;	$P(4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$;
(1, 4) (4, 1) (3, 2) (2, 3)	(1, 5) (5, 1) (2, 4) (4, 2) (3, 3)	(1, 6) (6, 1) (2, 5) (5, 2) (3, 4) (4, 3)
$P(5) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$;	$P(6) = \frac{5}{36}$;	$P(7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$;
(2, 6) (6, 2) (3, 5) (5, 3) (4, 4)	(3, 6) (6, 3) (4, 5) (5, 4)	(4, 6) (6, 4) (5, 5)
$P(8) = \frac{5}{36}$;	$P(9) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$;	$P(10) = \frac{1}{12}$;
(5, 6) (6, 5)	(6, 6)	
$P(11) = \frac{1}{18}$;	$P(12) = \frac{1}{36}$	

$E(X) = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{1}{18} + 4 \cdot \frac{1}{12} + 5 \cdot \frac{1}{9} + 6 \cdot \frac{5}{36} + 7 \cdot \frac{1}{6} + 8 \cdot \frac{5}{36} + 9 \cdot \frac{1}{9} + 10 \cdot \frac{1}{12} + 11 \cdot \frac{1}{18} + 12 \cdot \frac{1}{36} = 7$

$Var(X) = (2-7)^2 \cdot \frac{1}{36} + (3-7)^2 \cdot \frac{1}{18} + (4-7)^2 \cdot \frac{1}{12} + (5-7)^2 \cdot \frac{1}{9} + (6-7)^2 \cdot \frac{5}{36} + (7-7)^2 \cdot \frac{1}{6} + (8-7)^2 \cdot \frac{5}{36} + (9-7)^2 \cdot \frac{1}{9}$
$+ (10-7)^2 \cdot \frac{1}{12} + (11-7)^2 \cdot \frac{1}{18} + (12-7)^2 \cdot \frac{1}{36} = 5\frac{5}{6} \Rightarrow \sigma \approx 2{,}42$

3 a) $E(X) = -2 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 0{,}25 + 4 \cdot 0{,}1 = -0{,}2$
$Var(X) = (-2+0{,}2)^2 \cdot 0{,}5 + (0+0{,}2)^2 \cdot 0{,}2 + (2+0{,}2)^2 \cdot 0{,}2 + (4+0{,}2)^2 \cdot 0{,}1 = 4{,}36 \Rightarrow \sigma \approx 2{,}09$
b) $E(Y) = -3 \cdot 0{,}1 - 2 \cdot 0{,}1 - 0{,}3 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}1 = -0{,}4$
$Var(Y) = (-3+0{,}4)^2 \cdot 0{,}2 + (-2+0{,}4)^2 \cdot 0{,}1 + (-1+0{,}4)^2 \cdot 0{,}3 + (0+0{,}4)^2 \cdot 0{,}2 + (1+0{,}4)^2 \cdot 0{,}2 + (2+0{,}4)^2 \cdot 0{,}1$
$= 2{,}04 \Rightarrow \sigma \approx 1{,}43$

4

X	3	4	6	7
P(X)	$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$\Rightarrow E(X) = 4\frac{1}{2}$

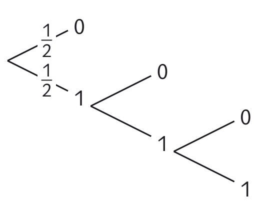
Y	1	2	3	4
P(Y)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

$\Rightarrow E(Y) = 2\frac{1}{3}$

$Var(X) = \left(3-4\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} + \left(4-4\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} + \left(6-4\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(7-4\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} = 2{,}25 \quad (\Rightarrow \sigma \approx 1{,}50)$

$Var(Y) = \left(1-2\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} + \left(2-2\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(3-2\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} + \left(4-2\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} = 1\frac{2}{9} \quad (\Rightarrow \sigma \approx 1{,}11)$

5



X	1	2	3
P(x)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$\Rightarrow E(X) = 1\frac{3}{4}$

$Var(X) = \left(1-1\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \left(2-1\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \left(3-1\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{11}{16}$

6 $E(X) = p \qquad Var(X) = (1-p)^2 \cdot p + (0-p)^2 \cdot (1-p) = p - 2p^2 + p^3 - p^3 + p^2 = p(1-p) \qquad \sigma = \sqrt{p(1-p)}$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

i **7** Hinweis: Zur Lösung dieser Aufgabe ist Vorwissen der Rouletteregeln erforderlich. ?

a) $E(C) = -10 \cdot \frac{36}{37} + 350 \cdot \frac{1}{37} = -\frac{10}{37} \quad \Rightarrow \quad Var(C) = 3408$

$E(H) = -10 \cdot \frac{19}{37} + 10 \cdot \frac{18}{37} = -\frac{10}{37} \quad \Rightarrow \quad Var(H) = 99{,}9$

b) Carmen und Holger habe auf lange Sicht den gleichen Verlust, da der Erwartungswert gleich ist. Carmen ist wegen der größeren Varianz risikofreudiger.

8 Dieses „Experiment" gibt es nicht – d.h. es besteht nur aus einem einzigen Ereignis. Oder z.B. Würfel mit überall gleicher Augenzahl.

9 $K(1+0{,}03)^t = 2k \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}03} = 23{,}4\,a;$ $\quad K(1+0{,}03)^t = 3k \quad \Rightarrow \quad t_3 = \frac{\ln 3}{\ln 1{,}03} = 37{,}2\,a$

5 Ziehen aus einer Urne mit Beachtung der Reihenfolge

S. 71

1 Anzahl der fünfstelligen Zahlen: $6^5 = 7776$
Anzahl fünfstelliger Zahlen aus geraden Ziffern: $3^5 = 243$
Anzahl fünfstelliger Zahlen ohne doppelte Ziffern: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$

i **2** Alle Teilaufgaben sind mit Beachtung der Reihenfolge!

a) mit Zurücklegen: $3^5 = 6561$
b) ohne Zurücklegen: $5! = 120$
c) mit Zurücklegen: $2^8 = 256$
d) ohne Zurücklegen: $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$
e) mit Zurücklegen: $4^6 = 4036$

S. 73

3 a) $2^{10} = 1024$

b) (i) $\frac{2}{2^{10}} = \frac{1}{2^9} = \frac{1}{512}$ (ii) $\frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024}$ (iii) $\frac{2^5}{2} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

4 a) $7^5 = 16\,807$

b) $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{7^5} = 15{,}0\,\%$

c) Mindestens 2 am gleichen Tag bedeutet, dass 2, 3, 4 oder 5 am gleichen Tag Geburtstag haben. Rechnet sich leichter über das Gegenereignis: $1 - [P(\text{keiner})] = 1 - 15\,\% = 85\,\%$.

d) $\frac{7}{7^5} = 0{,}00042 = 0{,}42\,‰$

5 a) Ziehen mit Zurücklegen und mit Beachtung der Reihenfolge

b) (i) bei I: $\frac{1}{4^3}$ bei II: $\frac{1}{9^2}$ (ii) bei I: $\frac{4}{4^3} = \frac{1}{16}$ bei II: $\frac{9}{9^3} = \frac{1}{9^2} = \frac{1}{81}$

(iii) bei I: $\frac{15}{16}$ bei II: $\frac{80}{81}$ (iv) bei I: $\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ bei II: $\left(\frac{5}{9}\right)^3$

6 a) $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$
b) $6 \cdot 5 \cdot 5 = 150$ (erst „volle Auswahl", dann die 1. Farbe nicht, dann die 2. Farbe nicht)

7 a) $2^4 = 16$ b) $2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$

8 $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{30\,240}$

9 a) $f'(t) = -\frac{3}{(3t-5)^2}$ b) $g'(t) = -\sin(t+t^3)(1+3t^2)$ c) $f'(t) = -\frac{2}{(t+3)^3} + 2t$

d) $g'(x) = \frac{(x^2+5)-(x+3)\cdot 2x}{(x^2+5)^2} = \frac{-x^6-6x+5}{(x^2+5)^2}$ e) $h'(x) = e^{2x} \cdot 2 - \frac{1}{x}$?

10 a) falsch, da $\sin\alpha \leqq 1$ und $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha) \leqq 1$ bei gleichem α ist die Summe maximal $\sqrt{3}$.
b) falsch, da entweder $\cos\alpha$ oder $\sin\alpha = 0$ ist, wenn der andere 1 ist. Ansonsten sind alle Werte < 1.

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern, Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

6 Ziehen aus einer Urne mit einem Griff

S. 74

1 a) $12\cdot 11\cdot 10 = 1320$ b) $\frac{12\cdot 11\cdot 10}{3\cdot 2\cdot 1} = 220$

S. 76

2 a) $\binom{7}{4} = 35$; $\binom{11}{5} = 462$; $\binom{12}{10} = 66$; $\binom{12}{2} = 66$; $\binom{20}{15} = 15\,504$; $\binom{1000}{928} = 499\,500$

b) $\binom{11}{4} = \frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{4!} = \frac{11!}{4!\cdot 7!} = \binom{11}{7}$; $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$

i **3** Immer: Ziehen aus einer Urne mit einem Griff.

a) $\binom{10}{4} = 210$ b) $\binom{10}{11} \approx 1{,}16\cdot 10^{15}$ c) $\binom{15}{2}\cdot\binom{10}{2} = 4725$

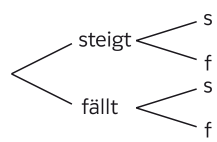
4 a) Ziehen von 5 Kugeln ohne Zurücklegen ohne Reihenfolge aus 9 $\Rightarrow$ $\binom{9}{5} = 126$

b) $\binom{9}{4} = 126$

c) $\binom{9}{0}+\binom{9}{1}+\ldots+\binom{9}{9} = \frac{9!}{0!9!}+\frac{9!}{1!8!}+\ldots+\frac{9!}{8!1!}+\frac{9!}{9!0!}$

$= 1+9+36+84+126+84+126+126+84+36+9+1 = 512 = 2^9$

oder leichter:



$\ldots \Rightarrow 2^9$

5 a) $\frac{1}{\binom{20}{3}} = \frac{1}{1140} \approx 0{,}088\,\%$ b) $\frac{\binom{17}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{680}{1140} \approx 59{,}6\,\%$

S. 76

6 Insgesamt gibt es $2^6 = 64$ Wege.

Zu A ist es 1 Weg, zu B sind es 6 Wege $= \binom{6}{1}$, zu C sind es $\binom{6}{2} = 15$ Wege, zu D $\binom{6}{3} = 20$,

zu E = 15, F = 6 und G = 1 Weg.

Begründung: Weg nach A: 6-mal links, 0-mal rechts;

Weg nach N: 5-mal links, 1-mal rechts;

Weg nach C: 4-mal links, 2-mal rechts

S. 76

7 a) $|\Omega| = \binom{12}{5}$ $\Rightarrow$ $P(M) = \frac{\binom{3}{5}}{\binom{12}{5}} = 0{,}0013 \approx 1{,}3\,‰$ b) $P(J) = \frac{\binom{7}{5}}{\binom{12}{5}} = 2{,}7\,\%$

c) $P(3J+2M) = \frac{\binom{7}{3}\cdot\binom{5}{2}}{\binom{12}{5}} = 44{,}2\,\%$ d) $P(P+T) = \frac{1\cdot 1\cdot\binom{10}{3}}{\binom{12}{5}} = 15{,}2\,\%$

Urnenmodell: Ziehen von 5 Kugeln „mit einem Griff"

8 $P = \frac{\binom{4}{3}\cdot\binom{28}{5}}{\binom{32}{8}} = 3{,}7\,\%$

9 a) $P(5) = \frac{\binom{50}{5}\cdot\binom{150}{15}}{\binom{200}{20}} \approx 21{,}3\,\%$ b) $P(0) = \frac{\binom{150}{20}}{\binom{200}{20}} = 0{,}225\,\%$ c) $P(X \geqq 1) = 1 - P(0) = 99{,}775\,\%$

10 a) $P(5) = \frac{\binom{6}{3}\cdot\binom{43}{3}}{\binom{49}{6}} = 1{,}77\%$ b) $P(1) = \frac{\binom{6}{1}\cdot\binom{43}{5}}{\binom{49}{6}} = 41{,}3\,\%$

c) $P(X \geqq 3) = \frac{\binom{6}{6}}{\binom{49}{6}} + \frac{\binom{6}{5}\cdot\binom{43}{1}}{\binom{49}{6}} + \frac{\binom{6}{4}\cdot\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} + \frac{\binom{6}{3}\cdot\binom{43}{3}}{\binom{49}{6}} = 1{,}87\%$ d) $P(0) = \frac{\binom{43}{6}}{\binom{49}{6}} = 43{,}6\,\%$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

11 a) $\frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot (4-4+16-4-8+8) = 2$ b) $\cos\alpha = \frac{8+4+2}{3 \cdot \sqrt{24}} \Rightarrow \alpha = 17{,}7°$

12 Fehler im *Schülerbuch* ?
Hinweis: Benutze als Trick die Determinante. ?
$y = (x - x_S)^2 + y_S \qquad y = x - 3$
$x^2 - 2x x_S + x_S^2 + y_S - x + 3 = 0$
$\Rightarrow \quad D = (2y_S + 1)^2 - 4x_S^2 - 4y_S - 12 = 4x_S^2 + 4x_S + 1 - 4x_S^2 - 4y_S - 12$
$\Rightarrow \quad 4x_S - 4y_S - 12 > 0$, wenn $y_S < x_S - 3 \;\Rightarrow\;$ 2 Schnittpunkte
$= 0$, wenn $y_S = x_S - 3 \;\Rightarrow\;$ 1 Schnittpunkt
< 0, wenn $y_S > x_S - 3 \;\Rightarrow\;$ 0 Schnittpunkte

7 Bernoulli-Experiment und Bernouilli-Kette

S. 77

1 Mit Zurücklegen: Trefferwahrscheinlichkeit für Rot konstant;
ohne Zurücklegen: Trefferwahrscheinlichkeit ändert sich bei jedem Zug.

S. 78

2 a) kein Bernoulli, da sich p ändert   b) Bernouilli: $n = 5$; p sollte gegeben sein
c) kein Bernouilli, da durch Vererbung nicht mehr unabhängig
d) nicht „direkt“ Bernouilli: Fußballspieler sind vom vorhergehenden Spiel beeinflusst;
ansonsten: $n = 3$; $p = \frac{3}{5}$
e) Bernouilli: $n = 10$; $p = 0{,}5$ f) Bernouilli: $n = 10$; $p = 0{,}5$
g) Bernouilli: $n = 10$; $p = ?$ („Experimentell“)

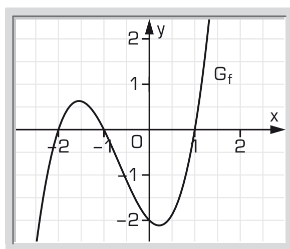
3 a) $n = 4$; $p = \frac{1}{2}$ b) $n = 20$; $p = 70\,\%$ (bzw. $30\,\%$)   c) $n = 30$; $p = 2\,\%$ (bzw. $98\,\%$)

4 Die Eins kann an 1., 2. oder 3. Stelle stehen; $\Rightarrow$ muss noch mit 3 multipliziert werden.

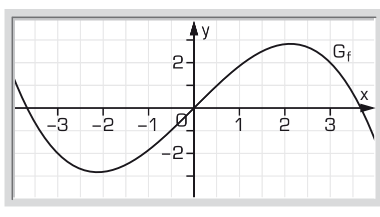
5 a) $0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6^3 = 3{,}456\,\%$ b) $3{,}456\,\%$
c) $0{,}4 \cdot 0{,}6^4 = 0{,}05184 = 5{,}18\,\%$ d) $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = 0{,}0384 \left(= \frac{5!}{5^5}\right) = 3{,}84\,\%$

6 a) $0{,}996^7 \cdot 0{,}004 \approx 0{,}39\,\%$ b) $0{,}92^5 \cdot 0{,}08 \approx 5{,}3\,\%$

7 a)
$$\left.\begin{array}{llll} \text{I} & f(-1) = 0 & \Rightarrow & 0 = -a + b - c + d \\ \text{II} & f(1) = 0 & \Rightarrow & 0 = a + b + c + d \end{array}\right\} b = -d \;\Downarrow$$
$$\begin{array}{llll} \text{III} & f(-2) = 0 & \Rightarrow & 0 = -8a + 4b - 2c + d = -8a + 3b - 2c \\ \text{IV} & f(2) = 6 & \Rightarrow & 0 = 8a + 4b + 2c + d = 8a + 3b + 2c \end{array}$$
III in IV $\Rightarrow 6 = 3b \Rightarrow b = 2 \Rightarrow d = -2$ in I: $a = -c$
in III: $0 = -8a + 6 + 2a \Rightarrow a = 1 \Rightarrow c = -1$
$f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2 \Rightarrow$ Skizze mit CAS:
$f'(x) = 3x^2 + 4x - 1 \Rightarrow$ Extrema in $x_{1/2} = -\frac{2}{3} \pm \frac{2}{3}\sqrt{7}$



b) $f(x) = ax^2 + bx$
$f'(x) = 3ax^2 + b$
I: $f'(0) = 2 \Rightarrow b = 2$
II: $f'(3) = 27a + 2 = -2 \Rightarrow a = -\frac{4}{27}$
$\Rightarrow \quad f(x) = -\frac{4}{27}x^3 + 2x = 2x\left(-\frac{2}{27}x^2 + 1\right)$
$\Rightarrow \quad x_1 = 0 \Rightarrow x_{2/3} = \pm\sqrt{13{,}5} \approx \pm 3{,}7$
$\Rightarrow \quad$ Extrema: $f'(x) = 0$
$-\frac{4}{9}x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm\frac{3}{\sqrt{2}} \approx \pm 2{,}12$
$f(2{,}12) \approx 2{,}8$



Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern, Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

8 Binomialverteilung

S. 79

1 a) Aus der Menge der Studenten werden zufällig 5 ausgewählt.
b) Die Zufallsgröße ist die Anzahl der Studenten mit Blutgruppe AB unter den zufällig ausgewählten Studenten.
c) Treffer: Student hat Blutgruppe AB; $P(00000) = 0{,}95^5 \approx 77{,}4\,\%$

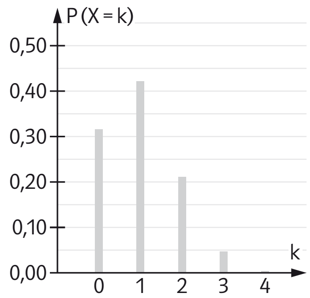
S. 81

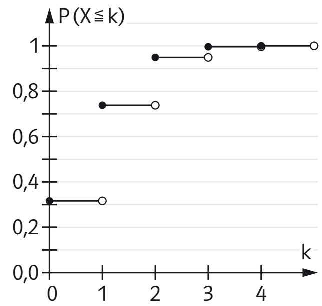
2 a) $B\left(5; \frac{1}{6}; 2\right) = 0{,}16075$ b) $B\left(5; \frac{1}{6}; 3\right) = 0{,}03215$ c) $B\left(5; \frac{1}{6}; 5\right) = 0{,}0001286$
d) $P(X \geqq 1) = 1 - P(X = 0) = 0{,}59812$ e) $P(X \geqq 3) = 0{,}03549$ f) $P(X \leqq 2) = 0{,}9645$

oder

3 a) Tabelle: Stabdiagramm: Kumulative Verteilungsfunktion:

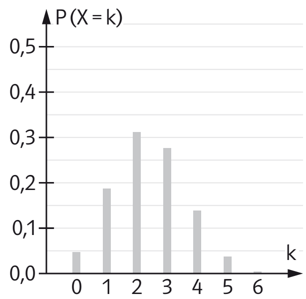
k	P(X=k)	P(X≦k)
0	0,3164	0,3164
1	0,42187	0,42187
2	0,21094	0,21094
3	0,046875	0,046875
4	0,003906	0,003906

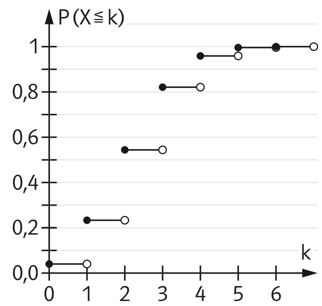




b)

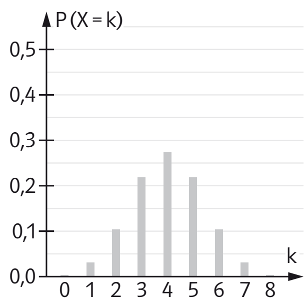
k	P(X=k)	P(X≦k)
0	0,04666	0,04666
1	0,18662	0,18662
2	0,31104	0,31104
3	0,27648	0,27648
4	0,13824	0,13824
5	0,03686	0,03686
6	0,004096	0,004096

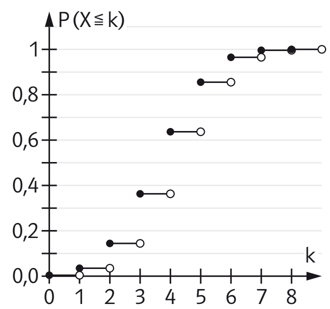




c)

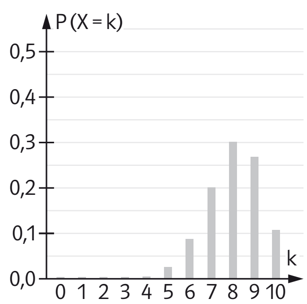
k	P(X=k)	P(X≦k)
0	0,0039	0,0039
1	0,03125	0,03515
2	0,10938	0,14453
3	0,21875	0,36328
4	0,27344	0,63672
5	0,21875	0,85547
6	0,10938	0,96485
7	0,03125	0,9961
8	0,0039	1

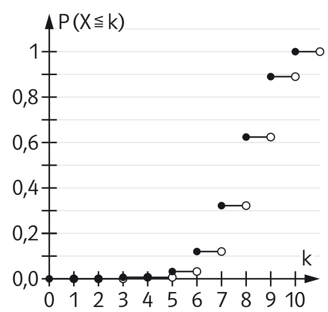




d)

k	P(X=k)	P(X≦k)
0	$1{,}024 \cdot 10^{-7}$	≈ 0
1	$4{,}096 \cdot 10^{-6}$	≈ 0
2	$7{,}37 \cdot 10^{-5}$	≈ 0
3	$7{,}86 \cdot 10^{-4}$	0,000864
4	0,005505	0,00637
5	0,026424	0,03279
6	0,08808	0,12087
7	0,20133	0,32220
8	0,30199	0,62419
9	0,26844	0,89263
10	0,10737	1





Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern, Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

4 Für $k = 0$ ist $B(n; p; 0) = F_p^n(0)$, danach wird immer mehr summiert, z. B.
$F_p^n(3) = B(n; p; 0) + B(n; p; 1) + B(n; p; 2) + B(n; p; 3)$. Da alle $B(n; p; k) \geqq 0$ sind, gilt die Behauptung.

oder Tabelle **5** a) $B(4; 0{,}03; 0) = 0{,}8853$ b) $B(10; 0{,}03; 4) = 0{,}000147$
c) $F_{0{,}03}^8(3) = 0{,}99995 \approx 100\,\%$ d) $P(2 \leqq x \leqq 3) = B(15; 0{,}03; 3) + B(15; 0{,}03; 3) \approx 7{,}2\,\%$

oder Tabelle **6** $n = 25;\ p = 0{,}15$
a) $0{,}07587$ b) $1 - 0{,}01720 = 0{,}9828$ c) $0{,}25374$ d) $1 - 0{,}47112 = 0{,}52888$

oder Tabelle **7** $n = 10;\ p = 0{,}1$
a) $B(10; 0{,}1; 10) = 0{,}34868$ b) $B(12; 0{,}34868; 2) = 0{,}11024$

8 a) Unter 12 Versuchen mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ gibt es mindestens 3 Treffer $\Rightarrow$ B = 0,81887
b) Unter 12 Versuchen mit $p = \frac{1}{3}$ gibt es mindestens 3 und höchstens 5 Treffer $\Rightarrow$ B ? = 0,64115

9 $|X - 4| < 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2 < x < 6 \quad \Rightarrow \quad F_{\frac{1}{3}}^{12}(5) - F_{\frac{1}{3}}^{12}(2) = 0{,}641155$

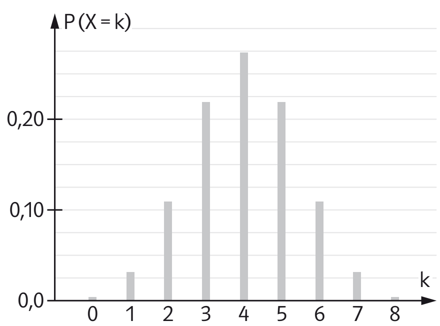
S. 82 oder Tabelle **10** a) $n = 4;\ p = 0{,}2\ \left(p = 1 - \sqrt[4]{0{,}4096}\right)$ b) $n = 3;\ p = 0{,}6\ \left(p \approx \sqrt[3]{0{,}22}\right)$
c) $n = 3;\ p = 0{,}6\ \ 2$

oder Tabelle **11** a) $n = 6;\ p = 0{,}4\ \ \sum_{k=0}^{2} B(n; p; k) = 0{,}54432$ b) $n = 6;\ p = 0{,}4\ \ 1 - \sum_{k=0}^{2} B(n; p; k) = 0{,}45568$
c) $0{,}5^4 = \frac{1}{16}$ d) $\frac{1}{64}$ e) $B\left(6; \frac{1}{2}; 3\right) = \frac{5}{16}$ f) $\frac{1}{16}$

12 Tabelle:

k	$B\left(8; \frac{1}{2}; k\right)$
0	0,00391
1	0,03125
2	0,10938
3	0,21875
4	0,27344
5	0,21875
6	0,10938
7	0,03125
8	0,00391

Stabdiagramm:



oder Tabelle **13** $\sum_{k=3} B(15; 0{,}02; k) = 1 - \sum_{k=0} B(15; 0{,}02; k) = 0{,}00304$
$\Rightarrow$ Die Firma muss 0,304 % unberechnet kalkulieren.

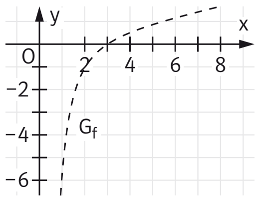
14 Individuelle Lösungen
Z. B. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit in einer Q12-Klasse von 30 Schülern mehr als 5 Schüler sitzen zu haben, die regelmäßig lesen?

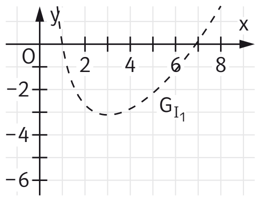
15 Gesucht: n: „Mindestens" einer $\triangleq$ 1 – „keiner" $\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} B\left(n; \frac{1}{3}; k\right) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \geqq 0{,}99 \quad \Rightarrow \quad n \geqq 12$

16 $\sqrt{\dfrac{0{,}441x^5}{8{,}1x \cdot 0{,}0144x^2y^2}} = \sqrt{\dfrac{441x^2}{81x \cdot 1{,}44y^2}} = \dfrac{21x}{9 \cdot 1{,}2y} = \dfrac{21x}{9 \cdot \frac{6}{5}y} = \dfrac{35x}{18y}$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

17 $J_1(x) = \frac{1}{9}x^2 + \frac{6}{x} - 6\frac{1}{9}$





J_1 hat nur negative Funktionswerte, da die Funktion in $x = 1$ gleich Null ist und dann streng monoton fällt.

9 Modellieren mit der Binomialverteilung

S. 83 **1** a) $B(100; 0{,}70; 65) = 0{,}04678 \approx 4{,}7\,\%$ b) $B(200; 0{,}70; 130) = 0{,}01858 \approx 1{,}9\,\%$

S. 85 **2** Bei einer Bernouilli-Kette der Länge n und Trefferwahrscheinlichkeit p gibt es genau k Treffer bzw. sind genau die ersten k Treffer.

3

a) 0,10292	b) 0,07049	c) 0,000	d) 0,11783	e) 0,95265
f) 0,99996	g) 0,99948	h) 0,0000	i) 0,95265	k) 0,0000

4

a) 0,08122	b) 0,54329	c) 0,46208	d) 0,53792	e) 0,45671
f) 0,96846	g) 0,95846	h) 0,94812		

5 für $k = 7$ (= 0,26683)

6 P(„rot“) = 0,64; n = 5
a) $B(5; 0{,}64; 3) = \binom{5}{3} \cdot 0{,}64^3 \cdot 0{,}36^2 = 0{,}3397$ b) $\frac{36}{100} \cdot \frac{35}{99} \cdot \frac{64}{98} \cdot \frac{63}{97} \cdot \frac{62}{96} \cdot \binom{5}{3} = 0{,}34864$

S. 86 Tabelle **7** a) für $k \geqq 38$ b) für $k \geqq 33$ und $k \geqq 47$ c) für $k \geqq 44$ d) für $k \geqq 46$

8 a) 0,38766 b) 0,0217 c) 0,7007

Tabelle **9** a) 0,39174
b) bei 18 Schaltern sind mit 73,38 % mindestens 16 einwandfreie dabei $\Rightarrow$ die Wahrscheinlichkeit $P_{0,1}^{18}(X > 2)$ ist größer als Null.

Tabelle oder **10** a) P(„mindestens 16“) = 0,9568 P(„höchstens 14“) = 0,0113 P(„alle 20“) = 0,1216
b) Durch Probieren mit z. B. Excel $\Rightarrow$ $P(X \leqq 11) < 0{,}05$ erst bei $n = 16$ möglich

und Tabelle **11** a) $0{,}4^3 \cdot 0{,}6^7 = 0{,}18\,\%$ b) $F_{0,4}^{10}(3) = 38{,}2\,\%$
c) $0{,}4^2 \cdot B(7; 0{,}6; 4) = 1{,}86\,\%$ d) $F_{0,6}^{3}(1) \cdot 1 \cdot \left(1 - F_{0,4}^{5}(1)\right) = 0{,}035200 \cdot (1 - 0{,}33696) = 23{,}3\,\%$

Tabelle **12** P(„Mann“) = $\frac{180}{400} = 45\,\%$; P(„Frau“) = 55 %
$\sum_{k=11}^{20} B(20; 0{,}45; k) = 1 - \sum_{k=0}^{10} B(20; 0{,}45; k) =$ oder $= \sum_{k=0}^{9} B(20; 0{,}55; k) = = 0{,}24929$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern, Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

13 X: Anzahl der Schüler, die keinen Wahlunterricht besuchen.
$P(X \leqq 10) = F_{0,3}^{50}(10) \approx 0{,}079$?
Kann ein Schüler höchstens einen Wahlunterricht belegen, so wird jeder Schüler eindeutig einem Sektor des Diagramms zugeordnet. Könnte ein Schüler mehrere Kurse belegen, so wäre die Zuordnung nicht mehr eindeutig und der Grundwert nicht mehr die Gesamtschülerzahl.

14 a) $B(5; 0{,}9; 5) = 0{,}9^5 = 59{,}0\,\%$ b) $1 - \sum_{k=0}^{2} B(5; 0{,}9; 5) = 99{,}1\,\%$
c) $0{,}1^3 \cdot 0{,}9^2 = 0{,}081\,\%$ d) $0{,}1^2 \cdot 0{,}9 = 0{,}9\,\%$
e) $0{,}9 + 0{,}1 \cdot 0{,}9 + 0{,}1^2 \cdot 0{,}9 = 99{,}9\,\%$ f) $0{,}1^3 \cdot 0{,}9^2 + 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^3 = 0{,}81\,\%$

S. 87

15 a) 0,40327 b) 0,14104 c) 0,00406

16 a) P(„Nichtwähler“) = 0,292
$1 - (1 - 0{,}292)^n \geqq 0{,}99 \quad \Rightarrow \quad (1 - {,}292)^n \leqq 0{,}01 \quad \Rightarrow \quad n \geqq 13{,}33 \quad \Rightarrow \quad n \geqq 14$
Man muss mindestens 14 Wahlberechtigte auswählen mit folgenden Annahmen: Die Wahlberechtigten werden zufällig ausgewählt. Das Ziehen ohne Zurücklegen wird durch das Ziehen mit Zurücklegen ersetzt.
b) Der Zweitstimmenanteil von 23 % bezieht sich auf einen anderen Grundwert, und zwar auf die Anzahl der gültigen Stimmen und nicht auf die Anzahl der Wahlberechtigten.

17 a) $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geqq 0{,}9 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{5}{6}\right)^n \leqq 0{,}1$
$\Leftrightarrow \quad n \ln\left(\frac{5}{6}\right) \leqq \ln(0{,}1)$
$\Leftrightarrow \quad n \geqq 12{,}6 \quad \Rightarrow \quad n \geqq 13$
b) analog: $n \geqq 25{,}3 \quad \Leftrightarrow \quad n \geqq 26$
c) analog: $n \geqq 37{,}9 \quad \Leftrightarrow \quad n \geqq 38$

18 $\sum_{k=4}^{50} B(50; 0{,}1; k) = 1 - \sum_{k=0}^{3} B(50; 0{,}1; k) = 0{,}7497 \approx 75{,}0\,\%$

19 a) z. B. gerade Augenzahl — n = Anzahl der Würfel; $p = \frac{1}{2}$
b) n = Anzahl der Bauteile — p = Wahrscheinlichkeit des Ausschuss
c) n = Anzahl der Versuche — p = Trefferwahrscheinlichkeit
d) n = Anzahl der Drehungen — p = P(„Schwarz“) (z. B.)
e) n = Anzahl der Schüler — p = 0,7 (P(„Zunge einrollen“)
f) n = Anzahl der Buchstaben — p = 0,05

20 a) $B(10; 0{,}81; 10) = 12{,}2\,\%$b) $\sum_{k=2}^{10} B(10; 0{,}1; k) = 26{,}4\,\%$

21 a) 6 Personen, da $B(25; 0{,}25; 6) \approx 0{,}183$ b) $14{,}9\,\% = 1 - \sum_{k=0}^{8} B(25; 0{,}25; k)$

S. 88

22 a) $B(8; 0{,}05; 2) = 0{,}0515$ b) $0{,}05^2 \cdot 0{,}95^6 = 0{,}00184 = 0{,}18\,\%$
c) $0{,}05^3 \cdot 0{,}95^5 \cdot 6 = 0{,}00058 = 0{,}058\,\%$

23 a) $B\left(100; \frac{1}{3}\right)$-verteilt: $P(X \leqq k) \geqq 0{,}90 \quad \Rightarrow \quad F_{\frac{1}{3}}^{100}(?) \geqq 0{,}9$ für $k \geqq 39$ (Tabelle)
b) $P(X \leqq 32) = F_{\frac{1}{3}}^{100}(32) \approx 0{,}434$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

24 $p = 0{,}08$

a) $P(X>0) = 1 - P(x=0) = 1 - \frac{\binom{40}{0}\cdot\binom{460}{3}}{\binom{500}{3}} \approx 0{,}222$ b) $P(X>0) = 1 - B(3;0{,}08;0) = 1 - 0{,}92^3 \approx 0{,}221$

25 a) $P(A) = 0{,}9^3 \cdot 0{,}1^2 = 0{,}00729 \approx 0{,}73\,\%$ $P(B) = 1 - \sum_{k=3}^{5} B(5;0{,}1;k) = 0{,}00856 \approx 0{,}86\,\%$

b) $1 - \sum_{k=0}^{1} B(100;0{,}1;k) = 99{,}97\,\%$ c) $0{,}94 = 65{,}61\,\%$

d) $1 - (0{,}9^4)^n \geqq 0{,}99 \;\Leftrightarrow\; 0{,}9^{4n} \leqq 0{,}01 \;\Rightarrow\; 4n \geqq 43{,}71 \;\Rightarrow\; n \geqq 10{,}9$

26 a) $1 - \left[\left(\frac{36}{37}\right)^{10} + \binom{10}{1}\cdot\frac{1}{37}\cdot\left(\frac{36}{37}\right)^9\right] \approx 0{,}0285$ b) $1 - \sum_{k=0}^{2} B\left(20;\frac{6}{37};k\right) = 0{,}65169 \approx 65{,}2\,\%$

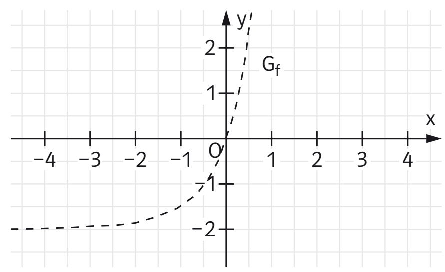
c) $\sum_{k=0}^{6} B\left(20;\frac{18}{37};k\right) \approx 0{,}0730 \approx 7{,}3\,\%$

27 a) $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ Nullstellen: $z = e^x \;\Rightarrow\; x = 0$

Asymptote für $x \to -\infty$: $y = -2$

$f'(x) = 2e^{2x} + e^x$

$\Rightarrow$ streng monoton steigend; keine Extrema



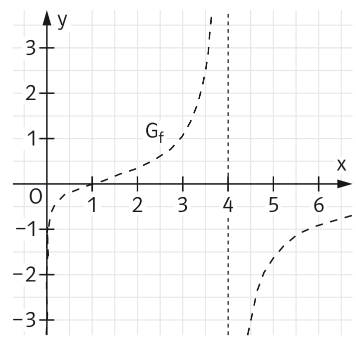
b) $\mathbb{D} = \mathbb{R}^+ \setminus \{4\}$ Nullstelle: $x = 1$

Asymptoten: $x = 0$; $x = 4$; $y = 0$

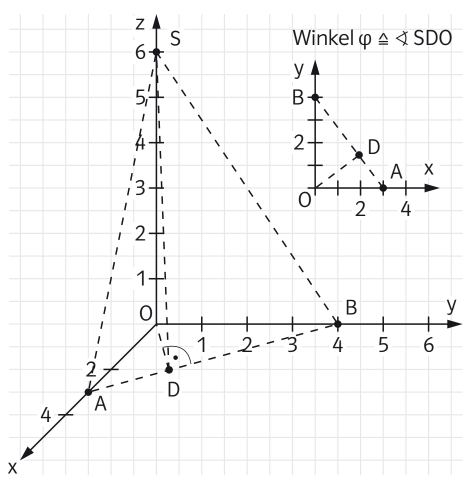
$f'(x) = \frac{(4-x)\frac{1}{x} + \ln x}{(4-x)^2}$

x	0 < x < 1	0 ≦ x < 4	0 > 4
f′(x)	> 0	> 0	> 0
f(x)	↗	↗	↗

streng monoton steigend



28



1. Schritt:

Finde die Koordinaten von D: ($d_3 = 0$)

$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = 3d_1 - 4d_2 = 0 \;\Rightarrow\; d_2 = \frac{3}{4}d_1$

$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1d_1 \\ \frac{3}{4}d_1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; d_1 = 3 + 3k$

$-4k = \frac{9}{4} + \frac{9}{9}k$

$\Rightarrow\; k = -\frac{9}{25} \;\Rightarrow\; d_1 = 1\frac{23}{25}$; $d_2 = 1\frac{11}{25}$

2. Schritt:

Winkel über das Skalarprodukt

$\overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{DS} = |\overrightarrow{DO}| \cdot |\overrightarrow{DS}| \cdot \cos\varphi$

$\begin{pmatrix} -1\frac{23}{25} \\ -1\frac{11}{25} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1\frac{23}{25} \\ -1\frac{11}{25} \\ 6 \end{pmatrix} = 2\frac{2}{5} \cdot \sqrt{41\frac{19}{25}} \cdot \cos\varphi$

$5\frac{19}{25} = 2\frac{2}{5} \cdot \sqrt{41\frac{19}{25}} \cdot \cos\varphi$

$\Rightarrow\; \varphi = 68{,}2°$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern, Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

10 Erwartungswert und Varianz

S. 89

1 a)

k	0	1	2
P(X=k)	$\frac{4}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{2}{25}$

$\Rightarrow$ $E(X) = \frac{6}{5}$; $Var(x) = \frac{12}{25}$

b)

k	1	2	4
P(X=k)	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$

$\Rightarrow$ $E(X) = \frac{6}{5}$; $Var(x) = \frac{9}{25}$

S. 90

2 a)

n	10	20	50	100
E(X)	4	8	20	40
σ^2	2,4	4,8	12	24
σ	1,55	2,19	3,46	4,90

b)

n	10	20	50	100
$E(X) \mathrel{\hat{=}} k$	4	8	20	40

Da wenn $k = E(X)$ die Wahrscheinlichkeit am größten ist.

3 $n = 25$; $P(X) = 0{,}75$; $P(Y) = 0{,}25$

a) $E(X) = 18{,}75$; $\sigma^2 = 4{,}69$; $E(Y) = 6{,}25$; $\sigma^2 = 4{,}69$

b) $1 - F_{0,25}^{25}(9) = 7{,}13\,\%$

4 a) $\frac{1}{15} \cdot 630 = 12$

b) $\left(\frac{14}{15}\right)^{29} \cdot \frac{1}{15} \cdot 30 + \left(\frac{14}{15}\right)^{30} \approx 0{,}397 \approx 39{,}7\,\%$

c) $\left(\frac{14}{15}\right)^{28} \cdot \left(\frac{1}{15}\right)^{2} \cdot \binom{30}{2} = 28\,\%$

5 Die Werte von X weichen um höchstens σ vom Erwartungswert ab.

S. 91

6 a) $\mu = 5$ Es gilt „im Durchschnitt“ 5 Fehlentscheidungen.

b) $P(3 \leqq x \leqq 7) = \sum_{k=2}^{7} B(100; 0{,}05; k) \approx 75{,}4\,\%$

7 a) $q = \sigma^2 : \mu = 0{,}8$ $n = \mu : p = \mu : (1-q) = 100$

b) $q = \frac{2}{3}$; $n = 10$ c) $q = 0{,}75$; $n = 300$ d) $q = \frac{5}{6}$; $n = 400$

e) $q = 0{,}6$; $n = 1000$ f) $q = 0{,}75$; $n = 240$

8 a) $\bar{k} = 1{,}86$ b) $p^* = 46{,}5\,\%$ c)

k (in %)	0	1	2	3	4
$B(4; p^*; k)$	8,2	28,5	37,1	21,5	4,7
h(k)	7	32	33	24	4
$\frac{h(k) - B(4; p^*; k)}{B(4; 0{,}65; k)}$	−15	12	−11	12	−14

9 Individuelle Lösungen
Z. B. 10 Kugeln; X = Anzahl der roten mit P(„rot“) = 0,4 ($q = 0{,}6$; $p = 0{,}4$; $n = 10$)

und Tabelle **10** a) $\sigma = \sqrt{12} \approx 3{,}5$; $\mu = 20$

$k = 1 \Rightarrow 16{,}5 \leqq x \leqq 23{,}5$; $k = 2 \Rightarrow 14 \leqq x \leqq 26$; $k = 3 \Rightarrow 9{,}5 \leqq x \leqq 30{,}5$

b) $\sum_{k=17}^{23} B(50; 0{,}4; k) = 68{,}8\,\%$ $\sum_{k=14}^{26} B(50; 0{,}4; k) = 94{,}1\,\%$ $\sum_{k=10}^{30} B(50; 0{,}4; k) = 99{,}8\,\%$

und Tabelle **11** a) $\mu = 15$; $\sigma = 2{,}74$

$12{,}26 \leqq x \leqq 17{,}74 \Rightarrow \sum_{k=15}^{17} B(30; 0{,}5; k) = 63{,}8\,\%$

$9{,}52 \leqq x \leqq 20{,}48 \Rightarrow \sum_{k=10}^{20} B(30; 0{,}5; k) = 95{,}7\,\%$

$6{,}78 \leqq x \leqq 23{,}22 \Rightarrow \sum_{k=7}^{23} B(30; 0{,}5; k) = 99{,}9\,\%$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern, Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

12 a) $E(X) = \mu = 0 \cdot 0{,}03 + 1 \cdot 0{,}12 + 2 \cdot 0{,}24 + 3 \cdot 0{,}26 + 4 \cdot 0{,}20 + 5 \cdot 0{,}1 + 6 \cdot 0{,}04 + 7 \cdot 0{,}01 = 2{,}99$
$\sigma = 1{,}45$ (mit den Formeln von Abs. 3 und 4)
b) $P(|X - \mu| \leqq \sigma) = P(2) + P(3) + P(4) = 0{,}7$

13 $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$; $\sigma' = \sqrt{4 \cdot n \cdot p \cdot q} = 2 \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot q} = 2\sigma$

14 $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $F''(x) = 6 - 3x$ $\Leftrightarrow$ Wendepunkt in $x = 3$; $F(3) = 18$
von $-\infty$ bis 3 ist G_F linksgekrümmt; von 3 bis $+\infty$ ist G_F rechtsgekrümmt.

Thema: Binomialverteilung und Tabellenkalkulation

S. 92

1 a) Excel-Datei im Internetauftritt zum Ausfüllen
b) $Var(20; 0{,}3) = 4{,}2 = Var(20; 0{,}7)$; $Var(20; 0{,}5) = 5$

2 a) Excel-Datei im Internetauftritt zum Ausfüllen
b) $Var(20; 0{,}3) = 4{,}2$; $Var(50; 0{,}3) = 10{,}5$; $Var(100; 0{,}3) = 21$

Thema: Sigma-Regeln

S. 93

1 $\sigma = 10{,}3$ $\Rightarrow$ der Verdacht auf bevorzugte Fallrichtung bestätigt sich;
$\mu = 425 \cdot \frac{1}{2} = 212{,}5$

2 $\sigma = \sqrt{50 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} = 3\frac{1}{3}$
$\mu = 16{,}6$ $\Rightarrow$ 20 Antworten liegen zu ≈ 68,3 % im σ-Erwartungsbereich
$\Rightarrow$ könnte geraten sein!

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2