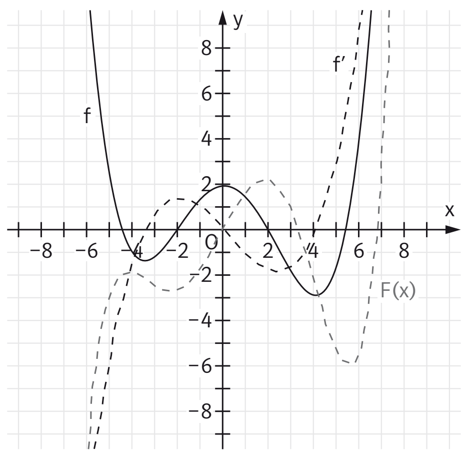
II Weitere Eigenschaften von Funktionen und deren Graphen

1 Die zweite Ableitung

S. 44

1



Um den Graphen der Ableitung f′ zu skizzieren, sucht man zuerst die Punkte mit waagrechten Tangenten. so erhält man die Nullstellen der Ableitung bei etwa −3,5; 0,1 und 4. An dazwischenliegenden Punkten liest man die Tangentensteigung ab, z.B. bei $x = -4{,}5$ etwa Steigung −3, bei $x = -2$ etwa die Steigung 1,5 usw.

Um den Graphen der Integralfunktion $\int_0^x f(t)\,dt$ zu skizzieren, sucht man zuerst die Nullstellen von f. Dort hat die Integralfunktion Extremstellen. In den Bereichen, in denen $f > 0$ steigt die Integralfunktion und in den Bereichen, in denen $f < 0$ fällt die Integralfunktion. Die Wendestellen von f sind die Nullstellen der Integralfunktion.

S. 45

2

a) $f'(x) = 15x^2 + \frac{1}{x}$; $\quad f''(x) = 30x - x^{-2}$; $\quad f''(1) = 29$

b) $f'(x) = 2x^{-3} + 3c^{3x-3}$; $\quad f''(x) = -6x^{-4} + 9e^{3x-3}$; $\quad f''(1) = 3$

c) $f'(x) = 6\cdot(3x-5)$; $\quad f''(x) = 18$; $\quad f''(1) = 18$

d) $f'(x) = -\sin(x-1)$; $\quad f''(x) = -\cos(x-1)$; $\quad f''(1) = -1$

e) $f'(x) = f''(x) = 0$; $\quad f''(1) = 0$

f) $f'(x) = \frac{9}{2}x^2\cdot(x^3+3)^{\frac{1}{2}}$; $\quad f''(x) = \frac{27}{4}x^4\cdot(x^3+3)^{-\frac{1}{2}} + 9x\cdot(x^3+3)^{\frac{1}{2}}$; $\quad f''(1) = \frac{27}{8} + 18 = 21\frac{3}{8}$

g) $f'(x) = \frac{4x^2+8x}{(x+1)^2}$; $\quad f''(x) = \frac{8}{(x+1)^3}$; $\quad f''(1) = 1$

h) $f'(x) = \frac{-x-3}{(x-3)^3}$; $\quad f''(x) = \frac{2x+12}{(x-3)^4}$; $\quad f''(1) = \frac{7}{8}$

3 $f'(x) = 30x^5 + 3x^2$; $\quad f''(x) = 150x^4 + 6x$; $\quad f'''(x) = 600x^3 + 6$;

$f^{(4)}(x) = 1800x^2$; $\quad f^{(5)}(x) = 3600^x$; $\quad f^{(6)}(x) = 3600$

4

a) $f'(x) = 4x^3 + \cos x$; $\quad f''(x) = -12x^2 - \sin x$;

b) $f'(t) = -4t^{-5} + 0{,}8t^3$; $\quad f''(t) = -20t^{-6} + 2{,}4t^2$

c) $f'(x) = 4x^3 + 27x^2 + 54x + 27$; $\quad f''(x) = 12x^2 + 54x + 54$

d) $f_t'(x) = -3tx^3 + 1$; $\quad f_t''(x) = 6tx$

e) $f_a'(x) = a^2$; $\quad f_a''(x) = 0$

f) $h'(x) = \left(2x^3 - \frac{1}{2}\sin x\right)\cdot(x^4+\cos x)^{-\frac{1}{2}}$;

$h''(x) = \left(6x^2 - \frac{1}{2}\cos x\right)\cdot(x^4+\cos x)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\cdot\left(2x^3 - \frac{1}{2}\sin x\right)\cdot(4x^3 - \sin x)\cdot(x^4+\cos x)^{-\frac{3}{2}}$

g) $p(t) = t^3 - t^{-1}$; $\quad p'(t) = 3t^2 + t^{-2}$; $\quad p''(t) = 6t - 2t^{-3}$

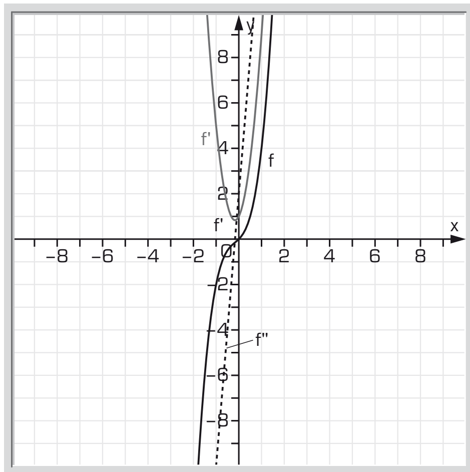
h) $g(x) = 2x^4 + 3x^3 - 1$; $\quad g'(x) = 8x^3 + 9x^2$; $\quad g''(x) = 24x^2 + 18x$

i) $h(z) = 8\cdot(z+1)^{-3}$; $\quad h'(z) = -24(z+1)^{-4} = -\frac{24}{(z+1)^4}$; $\quad h''(z) = 96(z+1)^{-5} = \frac{96}{(z+1)^5}$

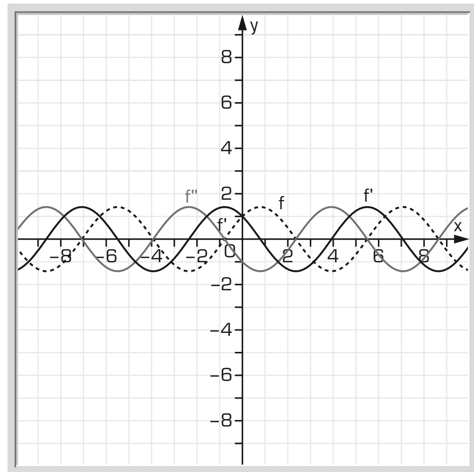
k) $f'(z) = 5z^4 - \frac{3}{z^4} - \frac{3}{z^5}$; $\quad f''(z) = 20z^3 + \frac{12}{z^5} + \frac{15}{z^6}$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern, Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

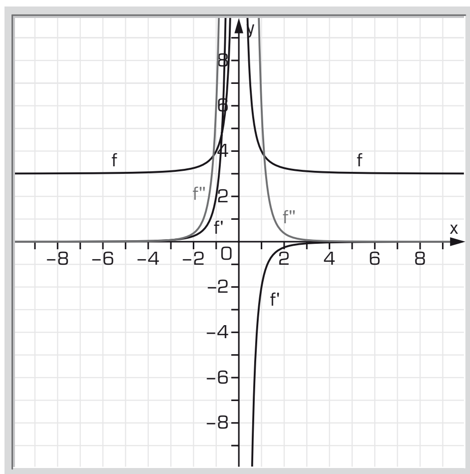
5 a) $f'(x) = 6x^2 + 2x + 1$; $f''(x) = 12x + 2$



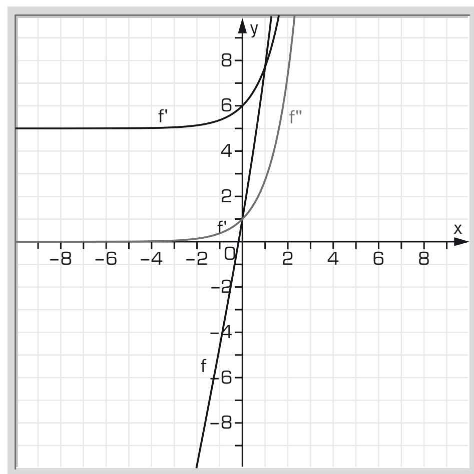
b) $f'(x) = -\sin x + \cos x$; $f''(x) = -\cos x - \sin x$



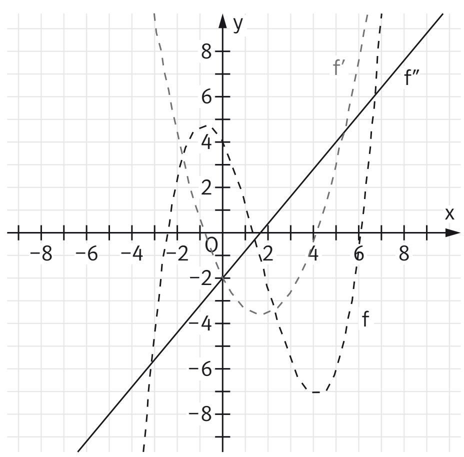
c) $f'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$; $f''(x) = 6x^{-4} = \frac{6}{x^4}$



d) $f'(x) = 5 + e^x$; $f''(x) = e^x$



6 Individuelle Lösungen, z. B.



7 a) $f(x) = e^x$ b) $f(x) = \sin x$ oder $f(x) = \cos x$ oder $f(x) = e^x$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

8 a) Funktion zur Berechnung der Kreisfläche
$A'(r) = 2r\pi$; $A''(r) = 2\pi$
b) Funktion zur Berechnung des Umfangs eines Rechtecks in Abhängigkeit von der Seitenlänge a
$U'(a) = 2$; $U''(a) = 0$
c) Funktion zur Berechnung der Oberfläche eines Zylinders in Abhängigkeit von der Höhe
$O'(h) = 2\pi r$; $O''(h) = 0$
d) Funktion zur Berechnung des Kegelvolumens
$V'(r) = 4\pi r^2$; $V''(r) = 8\pi r$
d) Funktion zur Berechnung des Kegelvolumens in Abhängigkeit von der Höhe
$V'(h) = \frac{1}{3}\pi r^2$; $V''(h) = 0$
f) Funktion zur Berechnung der Oberfläche eines Kegels in Abhängigkeit vom Radius der Grundfläche
$O'(r) = \pi s + 2r\pi$; $O''(r) = 2\pi$

9 a) $f''(x) = 2 \cdot \cos x$ (III) b) $f''(x) = -\sin x$ (II) c) $f''(x) = -\sin x - \cos x$ (I)

10 Einfacher werden: $x^2 - x$; $x^2 \cdot (1 - \cos x)$; $3x^5 - x^4$; $7x^3 + x^2 + 5$
Schwieriger werden: $\frac{1}{\sin x}$; $\frac{1}{x}$; $\frac{x+1}{x-1}$

11 a) Der rot gezeichnete Graph ist der Graph der 1. Ableitung, der orange gezeichnete Graph ist der Graph der 2. Ableitung.
b) Der rot gezeichnete Graph ist der Graph der 1. Ableitung, der orange gezeichnete Graph ist **nicht** der Graph der 2. Ableitung, da z.B. $f''(1) \neq 1$.
a) Der rot gezeichnete Graph ist der Graph der 1. Ableitung, der orange gezeichnete Graph ist **nicht** der Graph der 2. Ableitung, da die Ableitung einer quadratischen Funktion keine konstante Funktion ist.

12 a)
$$\begin{aligned} \lg(6 \cdot 2{,}4x) &= \lg(30 \cdot 0{,}6^x) \\ \lg 6 + x \cdot \lg 2{,}4 &= \lg 30 + x \cdot \lg 0{,}6 \\ x(\lg 2{,}4 - \lg 0{,}6) &= \lg 30 - \lg 6 \\ x &= \frac{\lg 30 - \lg 6}{\lg 2{,}4 - \lg 0{,}6} \approx 1{,}161 \end{aligned}$$
b) Substitution: $0{,}4^x = u$
$u - 6 \cdot u^{-1} = 1 \quad | \cdot u$
$u^2 - u - 6 = 0$
$u_1 = 3$; $0{,}4^x = 3 \Rightarrow x \lg 0{,}4 = \lg 3 \Rightarrow x = \frac{\lg 3}{\lg 0{,}4} \approx -1{,}199$
$u_2 = -2$; $0{,}4^x = -2 \Rightarrow x$ nicht definiert.

2 Krümmung von Graphen

S. 46 **1** Strecke ④ entspricht dem Aufschrieb.

S. 48 **2** $g'(x) = -52x^3$; da g′ eine streng monoton fallende Funktion ist, ist der Graph von g rechtsgekrümmt.

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

3 $f'(x) = 10x^4 + 12x^3 - 2$; $f''(x) = 40x^3 + 36x^2$
$p'(x) = 5x^4 + 6x^3$; $p''(x) = 20x^3 + 18x^2$
$h'(x) = 10x^4 + 12x^3$; $h''(x) = 40x^3 + 36x^2$
$g'(x) = 20x^4 + 24x^3 + 3$; $g''(x) = 80x^3 + 72x^2$
$k'(x) = 25x^4 + 30x^3 + 2$; $k''(x) = 100x^3 + 90x^2$
Ja, er hat recht. Die zweiten Ableitungen sind Vielfache des Terms $T(x) = 10x^3 + 9x^2$.
Es gilt $T(x) > 0$ ($T(x) < 0$) falls $x > 0{,}9$ ($x < -0{,}9$). Damit sind die Graphen im Intervall $]-0{,}9;\infty[$ ($]-\infty;-0{,}9[$) links-(rechts-)gekrümmt.

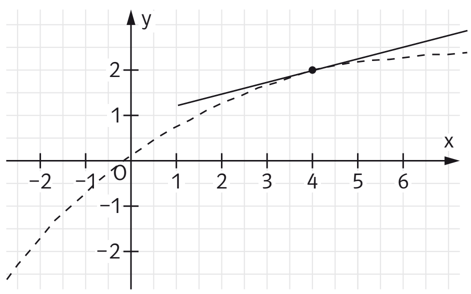
4 Individuelle Lösungen, z.B. $f(x) = e^x$ mit $D_f = \mathbb{R}$ oder $g(x) = x^2$ mit $D_g = \mathbb{R}$ oder $h(x) = x^4$ mit $D_h = \mathbb{R}$ oder $k(x) = \frac{1}{x}$ mit $D_k = \mathbb{R}^+$.

5 a) $]-6;-4[$, $]-1;1[$, $]4;\infty[$ b) Individuelle Lösungen

6 a) Graph linksgekrümmt in Intervallen $]-\infty;-1{,}5[$ und $]1{,}5;\infty[$, Graph rechtsgekrümmt im Intervall $]-1{,}5;1{,}5[$.
b) $f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{9}{4}x$; $f''(x) = x^2 - \frac{9}{4}$
$f''(x) > 0$ falls $x^2 > \frac{9}{4}$; also $|x| > \frac{3}{2}$, d.h. Graph linksgekrümmt falls $x \in]-\infty;-1{,}5[$ oder $x \in]1{,}5;\infty[$.
$f''(x) < 0$ falls $|x| < \frac{3}{2}$, d.h. Graph rechtsgekrümmt falls $x \in]-1{,}5;1{,}5[$.

7 a) $f''(x) = 1 > 0$, also Graph von f linksgekrümmt
b) $f''(x) = -\frac{1}{4} < 0$, also Graph von f rechtsgekrümmt
c) $f''(x) = 36x^2 + 4 > 0$, da $x^2 > 0$ für alle $x \in \mathbb{D}_f$, also Graph von f linksgekrümmt
d) $f''(x) = -300x^2 < 0$, da $x^2 > 0$ für alle $x \in \mathbb{D}_f$, also Graph von f rechtsgekrümmt
e) $f''(x) = 4 \cdot e^{2x} > 0$, also Graph von f linksgekrümmt
f) $f''(x) = 6x + 6 > 0$ für $x > -1$, also Graph dann linksgekrümmt

8 a) Zum Beispiel:



b) Da die Funktion streng monoton wachsend ist, kann der Graph höchstens einen Schnittpunkt mit der x-Achse haben.
c) Da das Vorzeichen der ersten Ableitung aufgrund der strengen Monotonie nicht wechselt, hat die Funktion keine Extrema.
d) Ja. Der Graph müsste allerdings stärker gekrümmt sein als beim Beispiel bei a).

S. 49

9 a) Gegenbeispiel: $f(x) = x2$ für $x \in \mathbb{R}-$. $f'(x) = 2x < 0$, also f streng monoton fallend für $x < 0$, obwohl $f'(x) = 2x$ für $x < 0$ streng monoton wachsend ist.
b) Gegenbeispiel: $f(x) = -x^4$; für $x = 0$ gilt $f''(0) = 0$.
c) Gegenbeispiel: $f(x) = x^3$; $f''(x) = 6x$. Es gilt $f'(0) = 0$ und $f''(0) = 0$.
d) Gegenbeispiel: $f(x) = \cos x$; $F(x) = \sin x$ und $f'(x) = -\sin x$ sind bezüglich der x-Achse zueinander symmetrisch und haben so unterschiedliches Krümmungsverhalten.

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

10 a) Falsch. Graph von f″ ist eine Gerade, also muss der Graph von f′ eine Parabel sein, deren Monotonieverhalten beim Extremum wechselt.

b) Keine Aussage möglich. Aus dem Graphen von f″ kann man nur etwas über das Monotonieverhalten von f′ aussagen, nicht aber etwas über die Funktionswerte.

c) Richtig. Da $f''(x) > 0$ für $x > 0$ ist der Graph von f linksgekrümmt.

d) Richtig. Man betrachtet die 2. Ableitung von f′, also f‴. Es gilt $f'''(x) > 0$ für alle x, also ist f′ linksgekrümmt.

e) Falsch. Z.B. $F(x) = \frac{1}{48}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 2x$ mit $F''(x) = f'(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1$; G_F linksgekrümmt in $]-\infty; -2[$ und $]2; -\infty[$ und rechtsgekrümmt in $]-2; 2[$, $f'(x) = \frac{1}{2}x$ wie in der Zeichnung.

f) Falsch, da F mindestens ein Extremum hat und dort das Monotonieverhalten wechselt.

11 a) $f'(x) = 3x^2 + 6x + 3$; $f''(x) = 6x + 6$
$f''(x) > 0$ falls $x > -1$, also G_f in $]-1; \infty[$ linksgekrümmt;
$f''(x) < 0$ falls $x < -1$, also G_f in $]-\infty; -1[$ rechtsgekrümmt.

b) $f'(x) = (2x)^{-\frac{1}{2}}$; $f''(x) = -(2x)^{-\frac{3}{2}}$
$f''(x) < 0$ für alle $x > 0$, also G_f in $]0; \infty[$ rechtsgekrümmt

c) $f'(x) = 7 - 5e^{5x}$; $f''(x) = -25e^{5x}$
$f''(x) < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also G_f überall rechtsgekrümmt

d) $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 1$; $f''(x) = 12x^2 - 12$
$f''(x) > 0$ für $x > 1$, also G_f in $]1; \infty[$ linksgekrümmt;
$f''(x) < 0$ für $-1 < x < 1$, also G_f in $]-1; 1[$ rechtsgekrümmt;
$f''(x) > 0$ für $x < 1$, also G_f in $]-\infty; 1[$ linksgekrümmt.

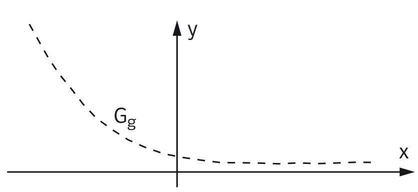
e) $f'(x) = x^3 + 6{,}75x^2 - 30x + 8$; $f''(x) = 3x^2 + 13{,}5x - 30$
$f''(x) > 0$ falls $x < -6{,}13$, also G_f in $]-\infty; -6{,}13[$ linksgekrümmt;
$f''(x) < 0$ für $-6{,}13 < x < 1{,}63$, also G_f in $]-6{,}13; 1{,}63[$ rechtsgekrümmt.
$f''(x) > 0$ für $x > 1{,}63$, also G_f in $]1{,}63; +\infty[$ linksgekrümmt.

f) $f'(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4x$; $f''(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x + 4$ (Nullstellen über CAS/Funktionsplotter)
$f''(x) < 0$ für $x < -2{,}05$, also G_f in $]-\infty; -2{,}05[$ rechtsgekrümmt;
$f''(x) > 0$ für $-2{,}05 < x < 0{,}19$, also G_f in $]-2{,}05; 0{,}19[$ linksgekrümmt;
$f''(x) < 0$ für $0{,}19 < x < 0{,}87$, also G_f in $]0{,}19; 0{,}87[$ rechtsgekrümmt;
$f''(x) > 0$ für $x > 0{,}87$, also G_f in $]0{,}87; +\infty[$ linksgekrümmt.

g) $f'(x) = -3x^2 + 8x + 9$; $f''(x) = -6x + 8$
$f''(x) > 0$ falls $x < \frac{4}{3}$, also G_f in $\left]-\infty; \frac{4}{3}\right[$ linksgekrümmt;
$f''(x) < 0$ falls $x > \frac{4}{3}$, also G_f in $\left]\frac{4}{3}; \infty\right[$ rechtsgekrümmt.

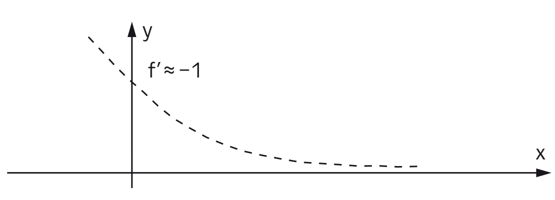
h) $f'(x) = -\frac{1}{2}\sin x$; $f''(x) = -\frac{1}{2}\cos x$
$f''(x) > 0$ für $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi$, also G_f in $\left]\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right[$ linksgekrümmt;
$f''(x) < 0$ für $\frac{3}{2}\pi < x < \frac{5}{2}\pi$, also G_f in $\left]\frac{3}{2}\pi; \frac{5}{2}\pi\right[$ rechtsgekrümmt.

12



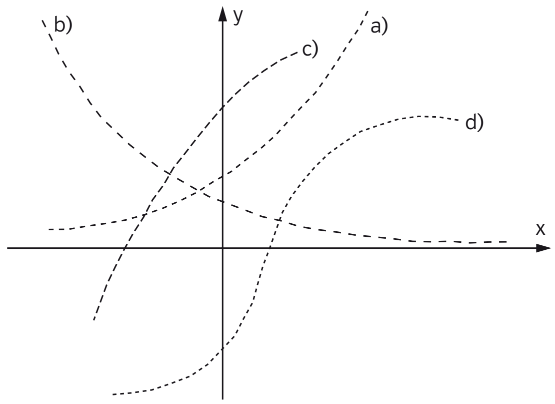
G_g muss monton fallend und linksgekrümmt sein.

13 Ja, er hat recht. ?



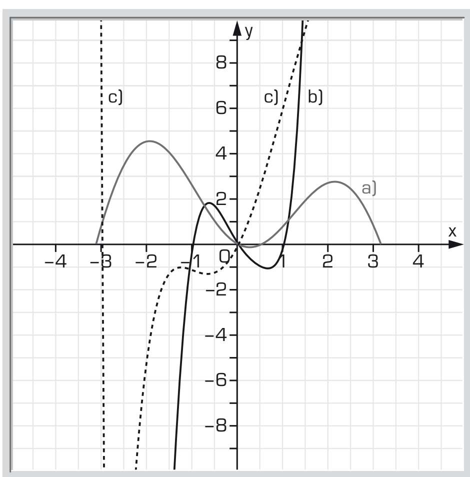
Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern, Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

14



15 n = 0: $x \mapsto a$; $f''(x) = 0$; keine Krümmung
n = 1: $x \mapsto ax$; $f''(x) = 0$; keine Krümmung
n = 2: $x \mapsto ax^2$; $f''(x) = 2a$; $a > 0$ linksgekrümmt, $a < 0$ rechtsgekrümmt
n = 3: $x \mapsto ax^3$; $f''(x) = 6ax$; $a > 0$: für $x > 0$ linksgekrümmt, für $x < 0$ rechtsgekrümmt
$a < 0$: für $x < 0$ linksgekrümmt, für $x > 0$ rechtsgekrümmt
…
allgemein: Für $n = 0$ und $n = 1$ keine Krümmung
für n gerade: $a > 0$ linksgekrümmt, $a < 0$ rechtsgekrümmt
für n ungerade: $a > 0$ für $x > 0$ linksgekrümmt, für $x < 0$ rechtsgekrümmt
$a < 0$ für $x < 0$ linksgekrümmt, für $x > 0$ rechtsgekrümmt.

??? **16**



CAS liefert Wendestellen.
a) $]-\pi; -0{,}94509\ldots[$ rechtsgekrümmt;
$]-0{,}94509\ldots; 1{,}22363\ldots[$ linksgekrümmt;
$]1{,}22363\ldots; \pi[$ rechtsgekrümmt
b) $]-\infty; -1{,}97492\ldots[$ linksgekrümmt;
$]-1{,}97492\ldots; 0{,}24115\ldots[$ rechtsgekrümmt;
$]0{,}24115\ldots; \infty[$ linksgekrümmt
c) $]-\infty; -1[$ rechtsgekrümmt;
$]-1; 1[$ linksgekrümmt;
$]1; 2[$ rechtsgekrümmt

17 a) $f(x)$ ist an der Stelle x3 am größten.
b) $f'(x)$ ist an der Stelle x6 am größten.
c) $f'(x)$ ist an der Stelle x_1 am kleinsten.
d) $f''(x)$ ist an der Stelle x_1 am größten.
e) $f''(x)$ ist an der Stelle x_4 am kleinsten.
f) $F_{x_1}(x)$ ist an der Stelle x_6 am größten.

18

	B	$\overline{B}$	
A	0,2	10 % = 0,1	0,3
$\overline{A}$	0,2	0,5	0,7
	$\frac{2}{5} = 0{,}4$	0,6	1

$P(A \cap B) = 0{,}2$;
$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}2}{0{,}3} = 0{,}\overline{6}$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

3 Wendepunkte, Art der Extrema

S. 50

1 Die Abtragung wechselt an den Stellen des Flusses, wo die Linkskrümmung (-biegung) in eine Rechtskrümmung (-biegung) wechselt und umgekehrt.

S. 52

2 a) $f''(x) = 36x^2 - 4$; $f'''(x) = 72x$; $f''(x) = 0$ für $x = \frac{1}{3}$ und $x = -\frac{1}{3}$
$f'''\left(\frac{1}{3}\right) \neq 0$; $f'''\left(-\frac{1}{3}\right) \neq 0$, also Wendestellen $\frac{1}{3}$ und $-\frac{1}{3}$

b) $f''(x) = 40x^3 - 36x^2$; $f'''(x) = 120x^2 - 72x$; $f''(x) = 0$ für $x = 0$ und $x = 0{,}9$;
$f''(0) = 0$ und $f''(0)$ hat keinen Vorzeichenwechsel; $f'''(0{,}9) \neq 0$, also Wendestelle $x = 0{,}9$

c) $f''(x) = 42x + 6$; $f'''(x) = 42$; $f''(x) = 0$ für $x = -\frac{1}{7}$
$f'''\left(-\frac{1}{7}\right) \neq 0$, also Wendestelle $-\frac{1}{7}$

d) $f''(x) = 2 - \frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}}$; $f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$ $f''(x) = 0$ für $x = \frac{1}{4}$ $f'''\left(\frac{1}{4}\right) \neq 0$, also Wendestelle $\frac{1}{4}$

e) $f''(x) = 6x^2 - 30$; $f'''(x) = 12x$; $f''(x) = 0$ für $x = \sqrt{5}$ und $x = -\sqrt{5}$
$f'''(\sqrt{5}) \neq 0$; $f'''(-\sqrt{5}) \neq 0$, also Wendestellen $\sqrt{5}$ und $-\sqrt{5}$

f) $f''(x) = -12x^2 - 1$; $f'''(x) = -24x$; $f''(x) = 0$ hat keine Lösung, also keine Wendestelle.

3

	Wendepunkte	Linkskrümmung	Rechtskrümmung
a)	(−2 | 1,7), (1 | 0,3), (4 | −1,5)	]−2;1[;]4;∞[	]−∞;−2[;]1;4[0,3
b)	(2 | 1), (4 | 1,5), (6 | 3), (8 | 0)	]−∞;2[;]4;6[;]8;+∞[	0,7

4 a) $f'(x) = 6x^2$; $f''(x) = 12x$; $f'''(x) = 12$
keine Extremstelle
Wendestelle: $x = 0$ $(f'''(0) \neq 0)$
Linkskrümmung im Intervall: $]0;\infty[$; Rechtskrümmung im Intervall: $]-\infty;0[$

b) $f'(x) = -625x^4 + 1$; $f''(x) = -2500x^3$
Extremstellen: $x_1 = -\frac{1}{5}$; $x_2 = \frac{1}{5}$
Wendestelle: $x = 0$; $f''(0)$ hat Vorzeichenwechsel
Linkskrümmung im Intervall: $]-\infty;0[$; Rechtskrümmung im Intervall: $]0;\infty[$

c) $f'(x) = 2(x-4)$; $f''(x) = 2$
Extremstelle: $x = 4$
kein Wendepunkt, der Graph ist überall linksgekrümmt.

d) $f'(x) = e^x - 1$; $f''(x) = e^x$
Extremstelle: $x = 0$
kein Wendepunkt, der Graph ist überall linksgekrümmt.

e) $f'(x) = -1 - 2x$; $f''(x) = -2$
Wendestelle: $x = -\frac{1}{2}$
kein Wendepunkt, der Graph ist überall rechtsgekrümmt.

f) $f'(x) = 6x(x^2-3)$; $f''(x) = 18x^2 - 18$; $f'''(x) = 36x$
Extremstellen: $x_1 = 0$; $x_2 = -\sqrt{3}$; $x_3 = \sqrt{3}$
Wendestellen: $x_4 = 1$; $x_5 = -1$ $(f'''(1) \neq 0,\ f'''(-1) \neq 0)$
Linkskrümmung: $]-\infty;-1[$; $]1;6[$; Rechtskrümmung: $]-1;1[$; $]6;+\infty[$

g) $f'(x) = \frac{2x^2-2x-3}{(2x-1)^2}$; $f''(x) = \frac{14}{(2x-1)^3}$
Extremstellen: $x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{7}$; $x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{7}$;
kein Wendepunkt
Linkskrümmung: $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$; Rechtskrümmung: $\left]+\infty;\frac{1}{2}\right[$

h) $f'(x) = 4x(x^2-1)$; $f''(x) = 12x^2 - 4$; $f'''(x) = 24x$
Extremstellen: $x_1 = 0$; $x_2 = -1$; $x_3 = 1$
Wendestellen: $x_4 = \sqrt{\frac{1}{3}}$; $x_5 = -\sqrt{\frac{1}{3}}$ $\left(f'''\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \neq 0;\ f'''\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \neq 0\right)$
Linkskrümmung: $\left]-\infty;-\sqrt{\frac{1}{3}}\right[$; $\left]\sqrt{\frac{1}{3}};\infty\right[$ Rechtskrümmung: $\left]-\sqrt{\frac{1}{3}};\sqrt{\frac{1}{3}}\right[$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

5 a) $f''(x) = -\sin x$
Wendepunkte: $W_1(0|0)$, $W_2(\pi|0)$, $W_3(2\pi|0)$
Linkskrümmung: $]\pi;2\pi[$; $]0;\pi[$ Rechtskrümmung: $]0;\pi[$; $]1;4[$
b) $f''(x) = -\cos x - \sin x$
Wendepunkte: $W_1\left(\frac{3}{4}\pi\middle|0\right)$, $W_2\left(\frac{7}{4}\pi\middle|0\right)$
Linkskrümmung: $\left]\frac{3}{4}\pi;\frac{7}{4}\pi\right[$ Rechtskrümmung: $\left]0;\frac{3}{4}\pi\right[$; $\left]\frac{7}{4}\pi;2\pi\right[$
c) $f''(x) = -2\cos x$
Wendepunkte: $W_1\left(\frac{\pi}{2}\middle|0\right)$, $W_2\left(\frac{3}{2}\pi\middle|0\right)$
Linkskrümmung: $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$; $\left]\frac{3}{2}\pi;2\pi\right[$ Rechtskrümmung: $\left]\frac{\pi}{2};\frac{3}{2}\pi\right[$
d) $f''(x) = -\sin x$
Wendepunkte: $W_1(0|0)$, $W_2\left(\pi\middle|\frac{1}{2}\pi\right)$, $W_3(2\pi|\pi)$
Linkskrümmung: $]\pi;2\pi[$ Rechtskrümmung: $]0;\pi[$

6 a) Der Graph hat Ende September die größte Steigung, sodass etwa hier die größte Umsatzsteigerung war, der größte Umsatzrückgang war Ende Januar.
b) Da der Graph rechtsgekrümmt ist, wird der Umsatz zunächst immer langsamer weiter wachsen. Im ungünstigsten Fall kann er auf Dauer wieder sinken.

7 a) $f'(x) = 2ax + b$; $f''(x) = 2a$
Ist $a > 0$, so ist $f''(x) = 2a > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, damit ist der Graph von f überall linksgekrümmt.
Ist $a < 0$, so ist $f''(x) = 2a < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, damit ist der Graph von f überall rechtsgekrümmt.
b) $f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$; $f''(x) = \frac{n(n+1)}{x^{n+2}}$
$f''(x) > 0$ für gerades n. Damit ist für gerades n der Graph von f in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ überall linksgekrümmt.

8 $f_a'(x) = 3x^2 - 2ax$; $f_a''(x) = 6x - 2a$
$f_a''(x) = 0$ liefert $x = \frac{1}{3}a$
Da f_a'' bei $x = \frac{1}{3}a$ einen Vorzeichenwechsel hat, hat f an der Stelle $x = \frac{1}{3}a$ einen Wendepunkt.
$W\left(\frac{1}{3}a\middle|-\frac{2}{27}a\right)$

S. 53

9 a) Falsch. Für $x \in]-0{,}5;2[$ nimmt $f''(x)$ sowohl Werte größer als auch kleiner Null an.
b) Richtig. f'' hat an der Stelle $x = 2$ eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von+ nach −.
c) Ja, $P(0|f(0))$ kann ein Terrassenpunkt sein.
d) Falsch. f''' hat an der Stelle $x = 0{,}8$ ein Maximum, f' hat somit an dieser Stelle eine Nullstelle, f ändert sein Krümmungsverhalten nicht.

10 a) $f'(x) = 3x^2$; $f''(x) = 6x$
Wendepunkt $W(0|0)$ ist Terrassenpunkt, da $f'(0) = 0$
Wendetangente: $y = 0$; $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$
b) $f'(x) = 6x^4 - 3x^2 - 1$; $f''(x) = 24x^3 - 6x$
Wendepunkte: $W_1(0|0)$, $W_2(0{,}5|-0{,}5875)$, $W_3(-0{,}5|0{,}59375)$
Wendetangenten: $y = -x$; $y = -\frac{11}{8}x + 0{,}1$; $y = -\frac{11}{8}x - 0{,}1$ $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$
c) $f'(x) = 10x^4 + 0{,}1$; $f''(x) = 40x^3$
Wendepunkt: $W(0|0)$
Wendetangente: $y = 0{,}1x$ $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
d) $f'(x) = 4x^3 - 12x$; $f''(x) = 12x^2 - 12$
Wendepunkte: $W_1(1|4)$, $W_2(-1|4)$
Wendetangenten: $y = -8x + 12$; $y = 8x + 12$ $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

e) $f'(x) = 15x^2+6x-1$; $f''(x) = 30x+6$
Wendepunkt: $W\left(-\frac{1}{5}\middle|0{,}28\right)$
Wendetangente: $y = -1{,}6x-0{,}04$; $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

f) $f'(x) = -5x^{-6}$; $f''(x) = 30x^{-7}$
kein Wendepunkt $\mathbb{D} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

g) $f'(x) = \frac{2x^2+18x+2}{(x+9)^2}$; $f''(x) = \frac{158}{(x+9)^3}$
kein Wendepunkt $\mathbb{D} = \mathbb{R}\setminus\{-9\}$

h) $f'(x) = -\frac{12}{7}x^3+\frac{4}{7}x$; $f''(x) = -\frac{36}{7}x^2+\frac{4}{7}$
Wendepunkte: $W_1\left(\frac{1}{3}\middle|\frac{5}{189}\right)$; $W_2\left(-\frac{1}{3}\middle|\frac{5}{189}\right)$
Wendetangenten: $y = \frac{8}{63}x-\frac{1}{63}$; $y = -\frac{8}{63}x-\frac{1}{63}$ $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

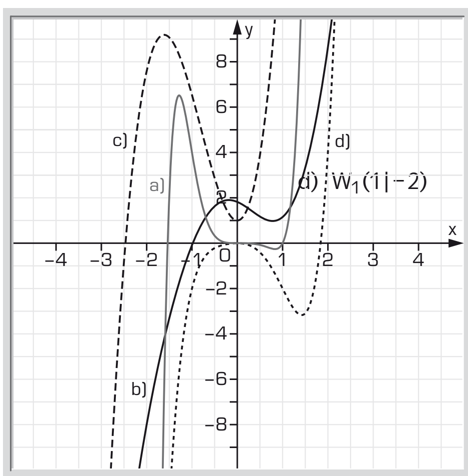
i) $f'(x) = -4x^{-5}+1{,}2x$; $f''(x) = 20x^{-6}+1{,}2$
kein Wendepunkt $\mathbb{D} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

k) $f'(x) = \frac{-x^2-6x-1}{(x+3)^2}$; $f''(x) = \frac{-16}{(x+3)^3}$
kein Wendepunkt $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{-3\}$

l) $f'(x) = \sin x$; $f''(x) = -\cos x$
Wendepunkt: $W\left(\frac{1}{2}\pi\middle|0\right)$
Wendetangente: $y = x+\frac{1}{2}\pi$ $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

11 a) Die Zunahme der Tierpopulation ist an der Wendestelle am größten. (etwa bei $x = 1{,}8$)
b) Die Gerade $y = s$ ist die Wachstumsschranke, sie begrenzt die maximale Größe der Tierpopulation.

??? **12**



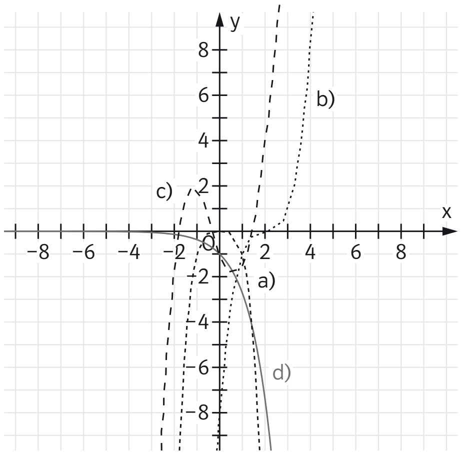
CAS liefert Wendepunkte.
a) $W_1(-1{,}0292\ldots|4{,}3525\ldots)$,
$W_2(0{,}6683\ldots|-0{,}1804\ldots)$, $W_3(0|0)$
b) $W_1(0{,}3202\ldots|01{,}4225\ldots)$
c) $W_1(-0{,}8044\ldots|5{,}0824\ldots)$

13 a) z.B. $f'(x) = x2$ (oder $f(x) = 2x2-3$) b) z.B. $f'(x) = -x5$ (oder $f(x) = 2x5+4$)
c) z.B. $f'(x) = \sin x$ (oder $f(x) = 2\cos x-1$) d) z.B. $f'(x) = x$ (oder $f(x) = x^3$)

14 a) $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$; $f'(x) = 3ax^2+2bx+c$; $f''(x) = 6ax+2b$
Aus $f''(x) = 6ax+2b = 0$ folgt $x_0 = -\frac{b}{3a}$; es muss $a \neq 0$ gelten, sonst wäre der Grad der Funktion nicht 3. Wegen des Vorzeichenwechsels liegt ein Wendepunkt vor.
b) Wegen $b = 0$ ergibt sich $x_0 = 0$. Damit liegt der Wendepunkt auf der y-Achse.
c) $f(x) = ax^5-bx^3+cx$; $f'(x) = 5ax^4-3bx^2+c$; $f''(x) = 20ax^3-6bx$
Aus $f''(x) = 0$ folgt $x_1 = 0$; $x_2 = -\sqrt{\frac{3b}{10a}}$; $x_3 = \sqrt{\frac{3b}{10a}}$. Wegen des Vorzeichenwechsels liegen jeweils Wendepunkte vor. Da der Graph symmetrisch zum Ursprung ist, liegen die Wendepunkte auf einer Ursprungsgeraden; ihre Gleichung ist $y = \left(c-\frac{21b^2}{100a}\right)\cdot x$.

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

15



z. B.

a) $f(x) = -x^4$

b) $f(x) = (x-2)^3$

c) $f(x) = x^3 - 3x$

d) $f(x) = -e^x$

16 a) (1) Extremstellen: Minimum bei $x \approx -1{,}4$; Maximum bei $x \approx 1{,}4$; Wendestelle bei $x = 0$

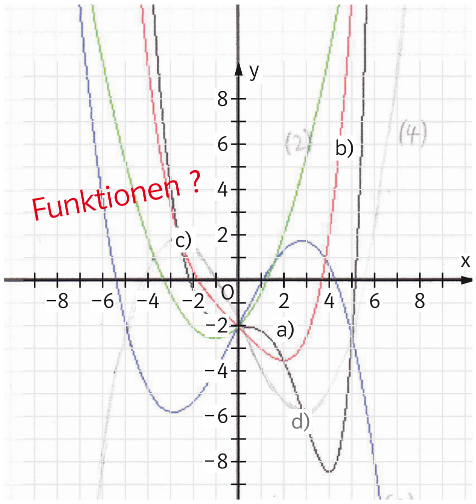
(2) Extremstellen: Minimum bei $x = -0{,}5$; keine Wendestelle

(3) Extremstellen: Minimum bei $x = 1$

(4) Extremstellen: Minimum bei $x = 1{,}4$; Maximum bei $x = -1{,}4$; Wendestelle bei $x = 0$

(5) Extremstellen: Minimum bei $x = 2$; Terrassenpunkt bei $x = 0$; Wendestelle bei $x = 1{,}5$

b)



S. 54

17 $f'(x) = 3x^2 + 2bx + c$; $f''(x) = 6x + 2b$

Es muss gelten: $f'(x) = 0$ und $f''(x) = 0$.

Also I $3x^2 + 2bx + c = 0$

II $6x + 2b = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}b$

x in I: $3 \cdot \left(-\frac{1}{3}b\right)^2 + 2b\left(-\frac{1}{3}b\right) + c = 0 \Rightarrow c = \frac{1}{3}b^2$

18 a) Richtig. Wenn $f(x) = \cos x$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, hat f, da der Graph periodisch verläuft, unendlich viele Wendepunkte.
$f''(x) = -\cos x$ hat unendlich viele Nullstellen $x_n = \frac{2n+1}{2} \cdot \pi$, $n \in \mathbb{Z}$, also hat f unendlich viele Wendestellen.

b) Falsch. Gegenbeispiel: $f(x) = x^3$ mit Wendepunkt $(0|0)$. $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$, $f'(2) = 12$, also $f'\left(\frac{1}{2}\right) < f'(2)$.

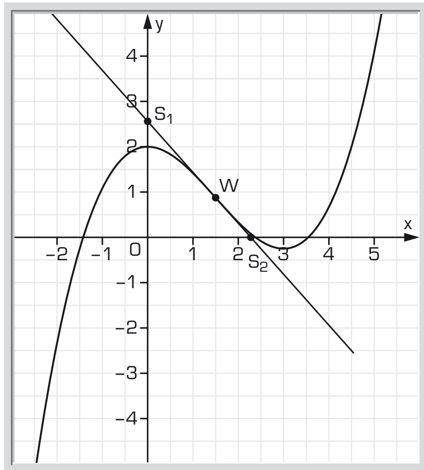
c) Richtig. $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$; $f'(x) = 2ax + b$; $f''(x) = 2a$; also gibt es keinen Wendepunkt.

d) Falsch. Beim Ableiten wird der Grad der Funktion jedes Mal um eins kleiner, also hat die Funktion maximal $n-2$ Wendepunkte.
Beispiel: $f(x) = x^5$ mit $f''(x) = 20x^3$ hat nur einen Wendepunkt $(0|0)$.

e) Richtig. Da sich zwischen zwei Extremstellen das Krümmungsverhalten ändern muss, liegt zwischen den beiden Extremstellen immer auch eine Wendestelle und damit zwischen zwei Wendepunkten ein Extrempunkt.

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

??? **19**



a) $f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x$; $\quad f''(x) = x - \frac{3}{2}$; $\quad W(1{,}5\,|\,0{,}875)$

Wendetangente t: $\quad y = -1{,}125x + 2{,}5625$

b) Schnittpunkte: $\quad S_1(0\,|\,2{,}5625)$, $S_2(2{,}276\,|\,0)$

$A = 0{,}5 \cdot g \cdot h = 0{,}5 \cdot 2{,}276 \cdot 2{,}5625 \approx 2{,}92$

c) Stammfunktion von f: z.B. $F(x) = \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{4}x^3 + 2x$

$$\int_{-3}^{0} f(t)\,dt = F(0) - F(-3) = \left[\frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{4}x^3 + 2x\right]_{-3}^{0}$$

$$= 0 - \left(\frac{27}{8} + \frac{27}{4} - 6\right) = -\frac{33}{8} = -4{,}125$$

20 a) $f_a'(x) = 3x^2 - 2ax$; $\quad f_a''(x) = 6x - 2a$

i) $f_a'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(3x - 2a) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$ oder $x = \frac{2}{3}a$

$f_a''\left(\frac{2}{3}a\right) = 2a$

$f_a''\left(\frac{2}{3}a\right) > 0$ für $a > 0$. $\quad$ Also $T\left(\frac{2}{3}a\,\middle|\,f_a\left(\frac{2}{3}a\right)\right)$ Tiefpunkte für $a > 0$

Ortslinienbestimmung: $\quad x = \frac{2}{3}a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{3}{2}x,\ a > 0$: $\quad f_{\frac{3}{2}x}(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 1$

t_1: $\quad x \mapsto -\frac{1}{3}x^3 + 1 \quad$ Ortslinie aller Tiefpunkte

ii) Analog i)

$H\left(\frac{2}{3}a\,\middle|\,f_a\left(\frac{2}{3}a\right)\right)$ Hochpunkte für $a < 0$

t_2: $\quad x \mapsto -\frac{1}{3}x^3 + 1 \quad$ Ortslinie aller Hochpunkte

iii) $f_a''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{3}a$; $\quad f_a'''(x) = 6 \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{D}_{f_a}$

Ortslinienbestimmung: $\quad x = \frac{1}{3}a \quad \Rightarrow \quad a = 3x$; $\quad f_{3x}(x) = -2x^3 + 1$

t_3: $\quad x \mapsto -2x^3 + 1 \quad$ Ortslinie aller Tiefpunkte

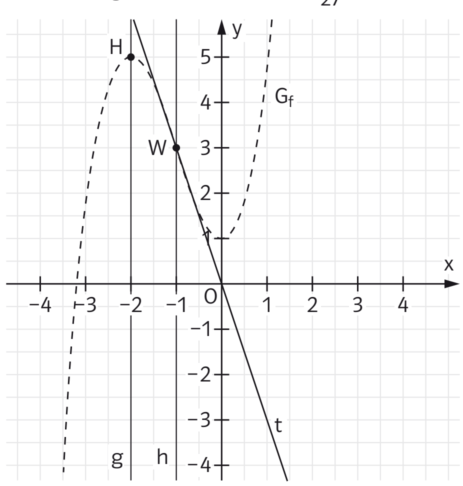
b) $f_a'(x) = 3x^2 - 2ax$; $\quad f_a''(x) = 6x - 2a$

$W_a\left(\frac{1}{3}a\,\middle|\,1 - \frac{2}{27}a^3\right)$

Wendetangente t: $\quad y = -\frac{1}{3}a^2x + \frac{1}{27}a^3 + 1$

Wendetangente durch $(0\,|\,0)$: $\quad \frac{a^3}{27} + 1 = 0$, also $a_0 = -3$

c)



$T(0\,|\,1)$

$H(-2\,|\,5)$

$W(-1\,|\,3)$

t; $y = -3x$

d) $A = \int_{-2}^{-1}(t^3 + 3t^2 + 1)\,dt = \left[\frac{1}{4}t^4 + t^3 + t\right]_{-2}^{-1} = -1\frac{3}{4} + 6 = 4{,}25$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2

21 a) $G(x) = 19{,}95x - (0{,}001x^3 - 0{,}05x^2 + 2x + 0{,}5)$
$= -0{,}001x^3 + 0{,}05x^2 + 17{,}95x - 0{,}5$

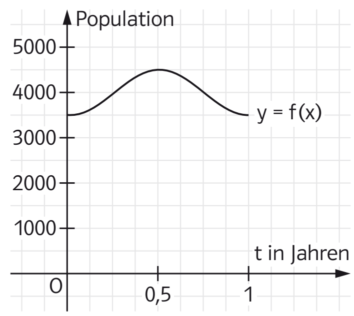
b) $G'(x) = -0{,}003x^2 + 0{,}1x + 17{,}95$
$G'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -62{,}460516\ldots,\ x_2 = 95{,}793849\ldots$
$G(x_2) = 1298{,}77409\ldots$
$H(95{,}79\ldots \mid 1298{,}77\ldots)$
Bei 96 Packungen macht die Firma den größten Gewinn, nämlich etwa 1300 €.

c) Nullstellen $N_1(0 \mid 0)$ und $N_2(161{,}3\ldots \mid 0)$
Produziert die Firma mehr als 162 Packungen, so macht sie Verlust.

22 a) Die Population startet mit 3500 Tieren, wächst dann bis zu 4500 Tieren zur Jahresmitte, um dann wieder auf 3500 Tiere zurückzufallen.

b) $H(0{,}5 \mid 4500)$, $T_1(0 \mid 3500)$, $T_2(1 \mid 3500)$
Nach einem halben Jahr hat die Population ihre Bestandsspitze bei 4500 Tieren, ein Bestandsminimum gibt es zu Beginn bzw. am Ende eines Jahres mit 3500 Tieren.

c) Das größte Wachstum hat die Population nach einem Vierteljahr (Wendepunkt $W_1(0{,}25 \mid f(0{,}25))$, die größte Abnahme nach einem Dreivierteljahr (Wendepunkt $W_2(0{,}75 \mid f(0{,}75))$.



23 a) $f_t'(x) = \frac{1}{2}x^2 + \left(3 + \frac{1}{5}t\right)x + 5; \quad f_t''(x) = x + 3 + \frac{1}{5}t$
Wendepunkt auf der x-Achse, dann $W(0 \mid f(0))$, also $f_t''(0) = 3 + \frac{1}{5}t \quad \Rightarrow \quad t = -15$

b) $F(x) = \frac{1}{24}x^4 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{30}t\right)x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 2tx$

c) $\int\limits_{-2}^{0} f(s)\,ds = \left[\frac{1}{24}x^4 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{30}t\right)x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 2tx\right]_{-2}^{0} = -\left(\frac{2}{3} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{30}t\right)\cdot 8 + 10 - 4t\right) = -6\frac{2}{3} + 4\frac{4}{15}t$

Aus $\int\limits_{-2}^{0} f(s)\,ds = -14\frac{4}{9}$ folgt $-6\frac{2}{3} + 4\frac{4}{15}t = -14\frac{4}{9}$, also $t = -1\frac{79}{96}$

24 $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\quad \left|\overrightarrow{OA}\right| = \sqrt{21}$; $\quad \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\quad \left|\overrightarrow{OB}\right| = \sqrt{11}$

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1-2 \\ 3-4 \\ -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\quad \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{14}$ $\quad \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$; $\quad \left|\overrightarrow{OC}\right| = \sqrt{131{,}25}$

$\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ 7{,}5 \\ -2{,}5 \end{pmatrix}$; $\quad \left|\overrightarrow{OD}\right| = \sqrt{68{,}75}$ $\quad \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -2{,}5-5 \\ 7{,}5-10 \\ -2{,}5-2{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7{,}5 \\ -2{,}5 \\ -5 \end{pmatrix}$; $\quad \left|\overrightarrow{CD}\right| = \sqrt{87{,}5}$

$$\left.\begin{array}{l} \left|\overrightarrow{CD}\right| = 2{,}5 \cdot \overrightarrow{AB} \\ \left|\overrightarrow{OD}\right| = 2{,}5 \cdot \overrightarrow{OB} \\ \left|\overrightarrow{OC}\right| = 2{,}5 \cdot \overrightarrow{OA} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \triangle OAB \text{ und } \triangle OCD \text{ sind ähnlich (SSS-Satz).}$$

25 a) $(20-19) + 4\sqrt{7} - 2\sqrt{7} = 1 + 2\sqrt{7}$

b) $2 + \sqrt[3]{9} + 5^2 + 2\sqrt[3]{9} - 27 = \sqrt[3]{9}$

c) $5\sqrt{5}\cdot(5 + 2\sqrt{15} + 3)\cdot\sqrt{15}\cdot\sqrt[5]{5^4} = \sqrt[5]{5^5}(8 + 2\sqrt{15})\cdot\sqrt{15} = 5(8\sqrt{15} + 30) = 40\sqrt{15} + 150$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern, Lösungen und Materialien – Klasse 12
ISBN 978-3-12-732862-2