VII Wahrscheinlichkeitsbegriff und Unabhängigkeit

1 Axiomatische Definition von Wahrscheinlichkeit

S. 174

1 Ein Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit von „Sau" kann nur mithilfe der relativen Häufigkeit bestimmt werden. Eine weitere Möglichkeit gibt es nicht.

S. 176

2 a) $P(\{\omega_2\}) = 1-(0{,}2+0{,}45) = 0{,}35$

b) $P(\{\ \}) = 0$; $P(\{w_1\}) = 0{,}2$; $P(\{w_2\}) = 0{,}35$; $P(\{w_3\}) = 0{,}45$;
$P(\{w_1, w_2\}) = 0{,}55$; $P(\{w_1, w_3\}) = 0{,}65$; $P(\{w_2, w_3\}) = 0{,}8$; $P(\{w_1, w_2, w_3\}) = 1$

3 a) $P(a) = \frac{2}{2+3+4+3} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$; $P(b) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$; $P(c) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$; $P(d) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

b) $P(A) = P(\{a, b\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$; $P(B) = P(\{b, c\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$; $P(C) = P(\{c, d\}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$

$P(A \cap B) = P(b) = \frac{1}{4}$; $P(A \cup C) = P(\{a, b, c, d\}) = 1$; $P(A \cup B) = P(\{a, b, c\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$

4 a) $P(A)+P(B)+P(C)+P(D) = 1 \;\Rightarrow\; 2P(B)+P(B)+\frac{1}{2}P(B)+2P(B) = 1 \;\Rightarrow\; \frac{11}{2}P(B) = 1$
also $P(B) = \frac{2}{11}$, somit $P(A) = \frac{4}{11}$; $P(C) = \frac{1}{11}$; $P(D) = \frac{4}{11}$

b) $P(A \cup C) = \frac{4}{11} + \frac{1}{11} = \frac{5}{11}$; $P(A \cap C) = 0$

5 $A \cap B = \{\ \} \;\Rightarrow\; P(A \cup B) = P(A)+P(B) \;\Rightarrow\; P(A)+P(B) \leqq 1$, da $P(A \cup B) \leqq 1$
$\Rightarrow\; P(B) \leqq 1-P(A) \;\Rightarrow\; P(B) \leqq P(\overline{A})$, da $P(\overline{A}) = 1-P(A)$

6

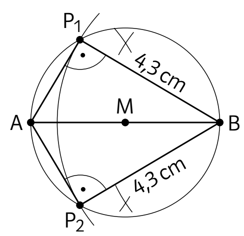
	E_2	$\overline{E_2}$	
E_1	$P(E_1 \cap E_2)$	$P(E_1 \cap \overline{E_2})$	$P(E_1)$
$\overline{E_1}$	$P(E_2 \cap \overline{E_1})$	$P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2})$	$P(\overline{E_1})$
	$P(E_2)$	$P(\overline{E_2})$	1

$E_1 \cap (\overline{E_1} \cap E_2) = \{\ \}$, also
$P(E_1 \cup (\overline{E_1} \cap E_2)) = P(E_1) + P(\overline{E_1} \cap E_2)$
$\Rightarrow\; P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(\overline{E_1} \cap E_2)$
$\Rightarrow\; P(E_1 \cup E_2) \leqq P(E_1) + P(E_2)$, da $\overline{E_1} \cap E_2 \subset E_2$

7
$$\left.\begin{array}{lrcr} \text{I} & P(E_1) + P(E_2) & & = 0{,}4 \\ \text{II} & P(E_2) + P(E_3) & & = 0{,}9 \\ \text{III} & P(E_1) + & P(E_3) & = 0{,}7 \end{array}\right\} \quad \text{I}-\text{II}+\text{III}: \; 2P(E_1) = 0{,}2 \;\Rightarrow\; P(E_1) = 0{,}1$$
$$\Rightarrow\; P(E_2) = 0{,}3;\quad P(E_3) = 0{,}6$$

8 Term (3): $\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot 5$

9 Die Konstruktion erfolgt mithilfe des Thaleskreises.
Für $a \geqq 5\,\text{cm}$ gibt es keine Lösung.



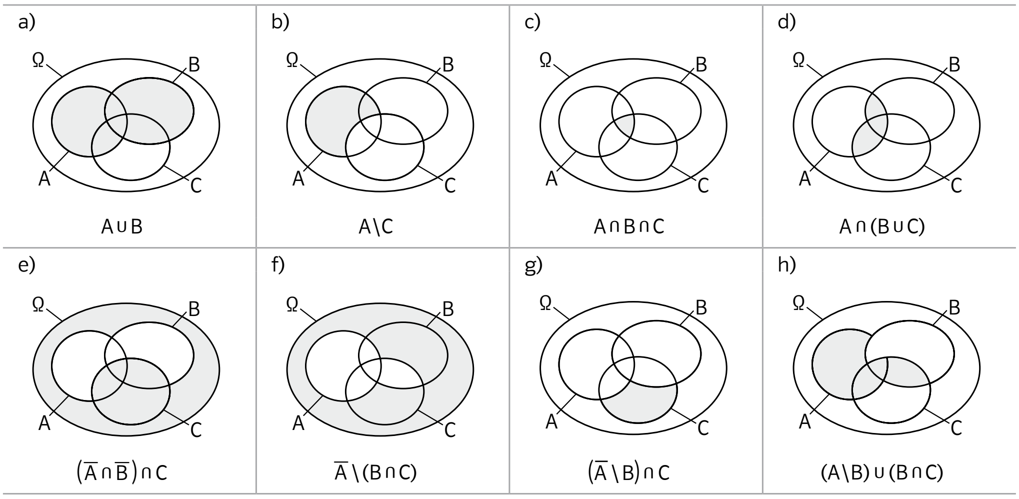
Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

2 Zusammengesetzte Ereignisse

S. 177

1 a) „A und B“: Die Augensumme ist kleiner als sieben und eine Primzahl.
Mögliche Augensummen: {2; 3; 5}
„A oder B“: Die Augensumme ist kleiner als sieben oder eine Primzahl.
Mögliche Augensummen: {2; 3; 4; 5; 6; 7; 11}
b) Die Augensumme ist eine Primzahl, die nicht kleiner als sieben ist.
Mögliche Augensummen: {7; 11}

2



S. 178

3 a) $C\cap D=\{5\}$ b) $C\cup D=\{1; 3; 4; 5; 6\}$ c) $\overline{C\cup D}=\{2\}$ d) $(C\setminus D)\cup(D\setminus C)=\{1; 3; 4; 6\}$
e) $D\setminus C=\{4; 6\}$ f) $\overline{C}\cap\overline{D}=\{2\}$ g) $\overline{C\cap D}=\{1; 2; 3; 4; 6\}$

S. 179

4 $K=\overline{D}\cap\overline{F}$; $L=(D\cap\overline{F})\cup(\overline{D}\cap F)$; $M=\overline{F}$; $N=L$

5 $C=\overline{A}$; $D=A\cap\overline{B}$; $E=A\cap\overline{B}$; $F=(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap\overline{B})$; $G=\overline{A}\cap B$; $H=G$

6 $E_1=A\cup B$; $E_2=\overline{A\cup B}$; $E_3=\overline{A\cap B}$; $E_4=(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap\overline{B})=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$ $E_5=E_3$;
$E_6=(A\cap B)\cap(\overline{A}\cap\overline{B})$

7 $A=\{10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28\}$;
$B=\{20, 22, 24, 26, 28\}$
$\overline{A}=\{11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29\}$;
$\overline{B}=\{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 23, 25, 27, 29\}$
$\overline{A\cup B}=\overline{A}=\{11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29\}$;
$\overline{A}\cap\overline{B}=\{11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29\}=\overline{A\cup B}$; (1)
$\overline{A\cap B}=\{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 23, 25, 27, 29\}$
$\overline{A}\cup\overline{B}=\{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 23, 25, 27, 29\}=\overline{A\cap B}$ (2)
(1) und (2) bestätigen die Gesetze von de Morgan.

8 a) rote Fläche: $X\cap Z\cap\overline{Y}$ blaue Fläche: $Y\setminus(X\cap Z)$
b) individuelle Lösungen

9 $A=E_1\cup E_2\cup E_3$; $B=\cancel{(E_1\cap E_2)\cup(E_1\cap E_3)\cup(E_2\cap E_3)}$;
$C_1=(E_1\cap E_2)\cup(E_1\cap E_3)\cup(E_2\cap E_3)$ (mindestens 2 Schwarzfahrer)
$C_2=[(E_1\cap E_2)\cup(E_1\cap E_3)\cup(E_2\cap E_3)]\setminus(E_1\cap E_2\cap E_3)$ (genau 2 Schwarzfahrer)
$D=B$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

10 E_i: „Das i-te Werkstück ist brauchbar".
$A = E_1 \cap E_2 \cap E_3$; $B = \overline{E_1} \cap \overline{E_3}$; $C = \overline{E_1} \cap E_2 \cap \overline{E_3}$;
$D = \left(\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap E_3\right) \cap \left(E_1 \cap E_2 \cap \overline{E_3}\right) \cup \left(E_1 \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3}\right)$; $E = \left(\overline{E_1} \cap E_2 \cap \overline{E_3}\right) \cup \left(E_1 \cap \overline{E_2} \cap E_3\right)$;

11 $f(x) = 2x - 1 + \frac{4}{x^2 - 1}$
schiefe Asymtote mit $y = 2x - 1$
senkrechte Asymptoten bei $x_1 = -1$; $x_2 = 1$

3 Der Additionssatz

S. 180

1 a) F: Fernseher im Zimmer; C = Computer im Zimmer

	C	$\overline{C}$	
F	43	29	72
$\overline{F}$	16	31	47
	59	60	119

b) $\frac{31}{119} \approx 0{,}26$
26 % der Schüler und Schülerinnen haben weder einen Fernseher noch einen Computer im Zimmer.

S. 181

2 Es sind $99 - 9 = 90$ Zahlen auf dem Glücksrad.
$90:3 = 30$ Zahlen sind durch 3 teilbar, $90:5 = 18$ Zahlen sind durch 5 teilbar,
$90:15 = 6$ Zahlen sind durch 3 und 5 teilbar.
$P(\text{„Gewinn"}) = \frac{30}{90} + \frac{18}{90} - \frac{6}{90} = \frac{42}{90} = \frac{7}{15} \approx 47\%$

3 a) $h(K \cup R) = \frac{22+33+19}{86} = \frac{74}{86}$ oder $h(K \cup R) = \frac{52+55-33}{86} = \frac{74}{86}$
b) $h\left(K \cup \overline{R}\right) = \frac{33+22+12}{86} = \frac{67}{86}$ oder $h\left(K \cup \overline{R}\right) = \frac{55+34-22}{86} = \frac{67}{86}$

4 N: T-Shirt hat Nähfehler; D: T-Shirt hat Druckfehler

	D	$\overline{D}$	
N	6	2	8
$\overline{N}$	5	67	72
	11	69	80

a) $P(N \cup D) = \frac{6+2+5}{80} = \frac{13}{80} \approx 16{,}25\%$
b) $P(N \cap D) = \frac{6}{80} = 7{,}5\%$
c) $P\left(\overline{N} \cup \overline{D}\right) = 1 - P(D \cap N) = \frac{74}{80} = 92{,}5\%$
d) $P\left(\overline{N} \cap \overline{D}\right) = \frac{67}{80} = 83{,}75\%$
e) $P(N \cup D) - P(N \cap D) = \frac{13}{80} - \frac{6}{80} = \frac{7}{80} = 8{,}75\%$

5 a) Ziffernsumme kleiner 4 (ZS < 4) = $\{0+0;\ 0+1;\ 0+2;\ 0+3;\ 1+0;\ 1+1;\ 1+2;\ 2+0;\ 2+2;\ 3+0\}$
2. Ziffer größer 7 (2.Z. > 7) = $\{0+8;\ 1+8;\ 2+8;\ \ldots;\ 9+8;\ 0+9;\ 1+9;\ Z+9;\ \ldots;\ 9+9\}$
$P(ZS < 4) \cup (2.Z. > 7) = \frac{10+20}{100} = 30\%$ $\quad [(ZS < 4) \cap (2.Z. > 7) = \{\ \}]$
b) 1. Ziffer größer als 2. Ziffer (1.Z. > 2.Z.) = $\{1+0;\ 2+1;\ 2+0;\ 3+2;\ 3+1;\ 3+0;\ \ldots;$
$9+8;\ 9+7;\ 9+6;\ \ldots;\ 9+0\}$
$P(1.Z. > 2.Z.) = \frac{1+2+3\ \ldots\ +9}{100} = \frac{45}{100}$
Ziffernsumme durch 3 teilbar (3 teilt ZS) = $\{2+1;\ 3+0;\ \ldots;\ 9+9;\ 9+6;\ 9+3;\ 9+0\}$
$P(3 \text{ teilt ZS}) = 33 + \frac{1}{100} = \frac{34}{100}$
$P((1.Z. > 2.Z.) \cap (3 \text{ teilt ZS})) = \frac{15}{100}$
$P((1.Z. > 2.Z.) \cup (3 \text{ teilt ZS})) = \frac{45}{100} + \frac{34}{100} - \frac{15}{100} = \frac{64}{100} = 64\%$

6 $h(D \cup H) = \frac{65+78-43}{100\,000} = \frac{100}{100\,000} = \frac{1}{1000}$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

7 $\Omega = \{11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 41, 42, 43, 44\}$

$P(A) = \frac{8}{16} + \frac{8}{16} - \frac{4}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} = 75\%$ $\quad P(B) = \frac{8}{16} + \frac{4}{16} - \frac{2}{16} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8} = 62{,}5\%$

$P(C) = \frac{3}{16} + \frac{6}{16} = \frac{9}{16} = 56{,}25\,\%$ $\quad P(D) = \frac{10}{16} + \frac{4}{16} - \frac{2}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} = 75\,\%$

8 a) „mindestens eines“: $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
„keines“: $1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]$
„höchstens eines“: $1 - P(A \cap B)$
„genau eines“: $P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$
b) „nicht beide“ = „höchstens eines“: $1 - P(A \cap B)$
c) „entweder beide oder keines der beiden“: $P(A \cap B) + 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]$
d) „A und nicht zugleich B“: $P(A) - P(A \cap B)$

9 Individuelle Lösungen

10 Gegenbeispiel: Wurf eines L-Würfels:
A: ungerade Augenzahl; B: Primzahl; C: gerade Augenzahl
$P(A) = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{1}{2}$; $P(C) = \frac{1}{2}$
$P(A \cup B \cup C) = 1$; $P(A \cap B \cap C) = \{\ \}$
$P(A \cup B \cup C) \neq P(A) + P(B) + P(C)$

11 $\sqrt{(-4a^2)^2} + a \cdot \sqrt{16a^2 - \frac{8}{3}a + \frac{1}{9}} = 4a^2 + a \cdot \sqrt{\left(4a - \frac{1}{3}\right)^2} = -4a^2 + a \cdot \left|\left(4a - \frac{1}{3}\right)\right| = +4a^2 - 4a^2 + \frac{1}{3}a = +\frac{1}{3}a$

4 Unabhängigkeit von Ereignissen

S. 182

1 a) $P_Z(K)$: Wahrscheinlichkeit (Wk), mit der er Karies hat, wenn er immer Zähne putzt.
$P_{\overline{Z}}(K)$: Wk, mit der er Karies hat, wenn er nicht immer die Zähne putzt.
$P_Z(G)$: Wk, dass er größer als 1,50 m ist, wenn er immer die Zähne putzt.
$P_{\overline{Z}}(G)$: Wk, dass er größer als 1,50 m ist, wenn er seine Zähne nicht immer putzt.
b) $P_Z(K) < P_{\overline{Z}}(K)$; $P_Z(G) = P_{\overline{Z}}(G)$

S. 184

2 a) $P(A) = P(\{a\}) + P(\{d\}) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$; $\quad P(B) = P(\{c\}) + P(\{d\}) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$

$\left.\begin{array}{l} P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \\ P(A \cap B) = P(\{d\}) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} \end{array}\right\}$ da $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$ sind A und B unabhängig.

3 $P(A) = \frac{1}{6}$; $P(B) = \frac{1}{6}$; $P(C) = \frac{1}{6}$
$P(A \cap B) = \frac{1}{36} = P(A) \cdot P(B) \quad \Rightarrow$ A und B sind unabhängig;
$P(A \cap C) = 0 \neq P(A) \cdot P(C) \quad \Rightarrow$ A und C sind unabhängig;
$P(B \cap C) = \frac{2}{36} \neq P(B) \cdot P(C) \quad \Rightarrow$ B und C sind abhängig.

4 $P(A) = 0{,}7 \quad \Rightarrow \quad P(\overline{A}) = 0{,}3 \quad P(B) = 0{,}4$
$P(B \cap \overline{A}) = 0{,}18$; $P(\overline{A}) \cdot P(B) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12 \quad \Rightarrow$ $\overline{A}$ und B sind abhängig, somit auch A und B.

5 $P(B) = 0{,}7 \cdot 0{,}4 + 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}28 + 0{,}12 = 0{,}4$; $\quad P(A) = 0{,}7$
$P(A \cap B) = 0{,}7 \cdot 0{,}4 = P(A) \cdot P(B)$ somit sind A und B unabhängig.

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

6 a) P(„beide einwandfrei“) = $0{,}9 \cdot 0{,}95 = 0{,}855 = 85{,}5\,\%$
b) P(„beide defekt“) = $0{,}1 \cdot 0.05 = 0{,}005 = 0{,}5\,\%$
c) P(„mindestens ein Teil defekt“) = 1 − P(„kein Teil defekt“) = $1 - 0{,}855 = 0{,}145 = 14{,}5\,\%$

S. 185

7 a) $P(A) = \frac{471+151}{1000} = \frac{622}{1000}$; $P(B) = \frac{471+148}{1000} = \frac{619}{1000}$

$$\left.\begin{array}{l} P(A)\cdot P(B) = 0{,}622\cdot 0{,}619 = 0{,}385018 \approx 38{,}5\,\% \\ P(A\cap B) = \frac{471}{1000} = 0{,}471 = 47{,}1\,\% \end{array}\right\}\ \text{A und B sind abhängig.}$$

8 P(„Junge“) = $\frac{4445}{8824} \approx 50{,}37\,\%$ P(„Brillenträger“) = $\frac{524}{8824} \approx 5{,}94\,\%$

$$\left.\begin{array}{l} P(J)\cdot P(B) = \frac{4445\cdot 524}{8824^2} \approx 2{,}99\,\% \\ P(J\cap B) = \frac{268}{8824} \approx 3{,}04\,\% \end{array}\right\}\ \text{J und B sind abhängig.}$$

9 a), b), c) individuelle Lösungen

10
$$\left.\begin{array}{l} \text{Zwei Ereignisse sind unvereinbar, wenn } A\cap B = \{\ \} \Rightarrow P(A\cap B) = 0 \\ P(A) \neq 0,\ P(B) \neq 0 \Rightarrow P(A)\cdot P(B) \neq 0 \end{array}\right\}\ \text{A und B sind abhängig.}$$

11 A und B unabhängig, also $P(A)\cdot P(B) = P(A\cap B) \Rightarrow P(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}06}{0{,}12} = 0{,}5$
P(„Bauteil funktionstüchtig“) = $P(\overline{A}\cap\overline{B}) = P(\overline{A})\cdot P(\overline{B}) = 0{,}88\cdot 0{,}5 = 0{,}44 = 44\,\%$

12 $P(A) = \frac{3}{4}$; $P(B) = \frac{1}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} P(A)\cdot P(B) = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{8} \\ P(A\cap B) = \frac{1}{2} \end{array}\right\}\ \text{A und B sind abhängig.}$$

13 $P(Z) = \frac{1}{2}$; $P(S) = \frac{1}{6}$; $P(F) = \frac{1}{15}$

a) $P(Z)\cdot P(S) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{12}$; $P(Z\cap S) = \frac{1}{6} \Rightarrow$ Z und S sind abhängig;
b) $P(F)\cdot P(S) = \frac{1}{15}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{90}$; $P(F\cap S) = \frac{1}{30} \Rightarrow$ F und S sind abhängig;
c) $P(Z)\cdot P(F) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{15} = \frac{1}{30}$; $P(Z\cap F) = \frac{1}{30} \Rightarrow$ Z und F sind unabhängig.

14 a), b) i) Wk, dass Ken zu spät kommt und die Lehrkraft es vermutet.
(unabhängig davon, ob die Lehrkraft Ken gut einschätzen kann)
ii) Wk, dass Lehrkraft vermutet hat, dass Ken zu spät kommt, wenn dieser zu spät kommt. (hoch)
iii) Wk, dass Ken zu spät kommt, wenn die Lehrkraft es vermutet. (hoch)
iv) Wk, dass Ken zu spät kommt, wenn die Lehrkraft es nicht vermutet hat. (niedrig)
c) Sehr schlecht, da K und V unabhängig sind.

15 P(„Besserung“) = $P(B) = \frac{285+608}{285+608+150+320} = \frac{893}{1363}$
P(„Medikament“) = $P(M) = \frac{285+150}{1363} = \frac{435}{1363}$

$$\left.\begin{array}{l} P(B)\cdot P(M) = \frac{893\cdot 435}{1363^2} = \frac{285}{1363} \\ P(B\cap M) = \frac{285}{1363} \end{array}\right\}\ \text{B und M sind unabhängig.}$$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

S. 186

16 a) $P(\text{„immer nein"}) = \frac{1000-(110+90+90+310+60+60+40)}{1000} = \frac{1000-700}{1000} = \frac{240}{1000} = 24\,\%$

b) $P(\text{„Sportverein und Spaß in Mathe"}) = \frac{90+90}{1000} = \frac{180}{1000} = 18\,\%$

c) H: macht regelmäßig Hausaufgaben; M: macht Mathematik Spaß; S: ist im Sportverein

$P(H) = \frac{90+60+310+40}{1000} = \frac{500}{1000} = \frac{1}{2}$; $P(M) = \frac{110+90+90+310}{1000} = \frac{600}{1000} = \frac{3}{5}$;

$P(S) = \frac{90+90+60+60}{1000} = \frac{300}{1000} = \frac{3}{10}$

$P(H)\cdot P(M) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5} = \frac{3}{10}$; $P(H\cap M) = \frac{310+90}{1000} = \frac{4}{10}$ $\Rightarrow$ H und M sind abhängig;

$P(H)\cdot P(S) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10} = \frac{3}{20}$; $P(H\cap S) = \frac{90+60}{1000} = \frac{15}{100} = \frac{3}{20}$ $\Rightarrow$ H und S sind unabhängig;

$P(M)\cdot P(S) = \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{10} = \frac{9}{50}$; $P(M\cap S) = \frac{90+90}{1000} = \frac{180}{1000} = \frac{9}{50}$ $\Rightarrow$ M und S sind unabhängig.

17 $A = \{31, 32, 33, 34, 35, 36\}$ $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$B = \{11, 13, 15, 22, 24, 26, 31, 33, 35, 42, 44, 46, 51, 53, 55, 62, 64, 66\}$ $P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

$C = \{14, 15, 23, 24, 32, 33, 41, 42, 46, 51, 55, 64\}$ $P(C) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

a) $P(A)\cdot P(B)\cdot P(C) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{36}$ $P(A\cap B\cap C) = \frac{1}{36}$

b) $P(A)\cdot P(B) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{12}$; $P(A\cap B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ $\Rightarrow$ A und B sind unabhängig;

$P(A)\cdot P(C) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{18}$; $P(A\cap C) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ $\Rightarrow$ A und C sind unabhängig;

$P(B)\cdot P(C) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$; $P(B\cap C) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$ $\Rightarrow$ B und C sind abhängig.

c) Würde man die Gleichung „$P(A)\cdot P(B)\cdot P(C) = P(A\cap B\cap C)$" als Definition für die Unabhängigkeit 3-er Ereignisse verwenden, so könnte man daraus nicht auf die paarweise Unabhängigkeit der einzelnen Ereignisse schließen. Daher wäre die genannte Festlegung ungeeignet.

18 $P(S\,I) = 0{,}3$; $P(S\,II) = 0{,}2$; $P(S\,III) = 0{,}5$ $P(F_{S\,I}) = 0{,}04$; $P(F_{S\,II}) = 0{,}19$; $P(F_{S\,III}) = 0{,}1$

a) $P(\overline{F}) = 0{,}3\cdot 0{,}96 + 0{,}2\cdot 0{,}81 + 0{,}5\cdot 0{,}9 = 0{,}9 = 90\,\%$

b) $P_{\overline{F}}(S\,III) = \frac{P(\overline{F}\cap S\,III)}{P(\overline{F})} = \frac{0{,}5\cdot 0{,}9}{0{,}1} = 0{,}5 = 50\,\%$

c) $P(\overline{F}) = 0{,}9$; $P(S\,III) = 0{,}5$

$$\left.\begin{array}{l} P(\overline{F})\cdot P(S\,III) = 0{,}9\cdot 0{,}5 = 0{,}45 \\ P(\overline{F}\cap S\,III) = 0{,}5\cdot 0{,}9 = 0{,}45 \end{array}\right\} \overline{F} \text{ und } S\,III \text{ sind unabhängig.}$$

19 a) $P(R\cap S) = P(R)\cdot P(S) = r\cdot s$

b) $P(R\cap\overline{S}) \cup P(\overline{R}\cap S) = r\cdot(1-s) + (1-r)\cdot s = r - rs + s - rs = r + s - 2\cdot r\cdot s$

c) $P(\overline{R}\cap\overline{S}) = P(\overline{R})\cdot P(\overline{S}) = (1-r)(1-s)$

d) $= b) = r + s - 2\cdot r\cdot s$

e) $P_R(S) = \frac{P(R\cap S)}{P(R)} = \frac{rs}{r} = s$

20 C: Anzahl Treffer Christine; J: Anzahl Treffer Johannes

a) $P(C=2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ $P(J=1) = 0{,}4\cdot 0{,}6 + 0{,}6\cdot 0{,}4 = 0{,}48$

$P((C=2)\cap(J=1)) = P(C=2)\cdot P(J=1) = 0{,}25\cdot 0{,}48 = 0{,}12 = 12\,\%$

b) $P(J=1)\cdot P(C=0) + P(J=2)\cdot P(C=1) + P(J=2)\cdot P(C=0)$

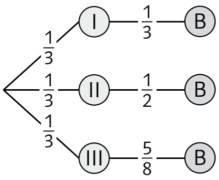
$= 0{,}48\cdot 0{,}5^2 + 0{,}4^2\cdot 2\cdot 0{,}5^2 + 0{,}4^2\cdot 0{,}5^2 = 0{,}24 = 24\,\%$

c) Wird keine Unabhängigkeit vorausgesetzt, so würden sich die Trefferwahrscheinlichkeiten je nach vorhergegangenem Ergebnis ändern, d.h. z.B. $P_{\text{Treffer J}}(\text{Treffer C}) \neq P_{\text{Treffer C}}(\text{Treffer J})$. Somit könnten obige Wahrscheinlichkeiten nicht berechnet werden.

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

S. 187

21



$P(B) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{8}$

$= \frac{35}{72}$

a) $P_B(I) = \frac{P(I\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{35}{72}} = \frac{8}{35}$

b) In einer Urne sind 72 Kugeln, von denen je 24 schwarz, rot und grün sind. Auf 8 schwarzen Kugeln ist ein Kreuz, auf 12 roten und 15 grünen ebenso. Eine Kugel wird gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist sie schwarz, wenn sie ein Kreuz hat?

c) Wenn der Anteil „blau" bei allen Glücksrädern gleich groß ist. Es würde auch genügen, wenn der Anteil „blau" bei Glücksrad I halb so groß ist wie die Summe der entsprechenden Anteile von II und III.

22 a)

	R	$\overline{R}$	
S	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{3}$
$\overline{S}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{3}$
	$\frac{9}{15}$	$\frac{6}{15}$	1

$P(\overline{R}) = \frac{4}{15} + \frac{2}{15} = \frac{6}{15}$ $\quad P(R) = 1 - P(\overline{R}) = 1 - \frac{6}{15} = \frac{9}{15}$

$P(S)\cdot P(\overline{R}) = P(S\cap\overline{R}) \quad\Rightarrow\quad P(S) = \frac{4}{15} : \frac{6}{15} = \frac{2}{3}$

$\frac{2}{3} - \frac{4}{15} = \frac{2}{5}; \qquad \frac{1}{3} - \frac{2}{15} = \frac{1}{5}$

b)

	R	$\overline{R}$	
S		15%	
$\overline{S}$	30%		
			1

I $\quad P(S)\cdot P(1-R) = 0{,}15 \quad\Rightarrow\quad s\cdot(1-r) = 0{,}15 \quad\Rightarrow\quad s = \frac{0{,}15}{(1-r)}$

II $\quad P(1-S)\cdot P(R) = 0{,}3 \qquad (1-s)\cdot r = 0{,}3$

in II: $\left(1 - \frac{0{,}15}{1-r}\right)\cdot r = 0{,}3 \qquad |\cdot(1-r)$

$(1 - r - 0{,}15)\cdot r = 0{,}3\cdot(1-r)$

$0 = r^2 - 1{,}15r + 0{,}3$

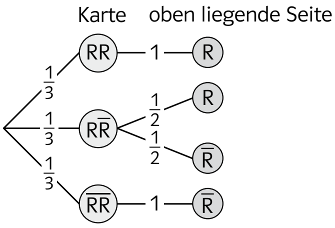
$r_{1/2} = \frac{1{,}15 \pm \sqrt{1{,}3225 - 1{,}2}}{2} = \frac{1{,}15 \pm 0{,}35}{2}$

$r_1 = 0{,}75 \quad\Rightarrow\quad s_1 = \frac{0{,}15}{(1-0{,}75)} = 0{,}6; \qquad r_1\cdot s_1 = 0{,}45;\ (1-r_1)\cdot(1-s_1) = 0{,}1$

$r_2 = 0{,}4 \quad\Rightarrow\quad s_2 = \frac{0{,}15}{(1-0{,}4)} = 0{,}25; \qquad r_2\cdot s_2 = 0{,}1;\ (1-r_2)\cdot(1-s_2) = 0{,}45$

c) Individuelle Lösungen

23 R: Rauten



$P_R(R) = \frac{P(R\cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$

24 F: Frauen; NT = naturwissenschaftlich-technologischer Zweig

	NT	$\overline{NT}$	
F			51
$\overline{F}$ = M			
	80		120

$\overline{F} = 120 - 51 = 69$

$P(\overline{F}\cap NT) = P(\overline{F})\cdot P(NT) = \frac{69}{120}\cdot\frac{80}{120} = \frac{23}{60}$

$\frac{23}{60}$ von 120 Schülern $= \frac{23}{60}\cdot 120 = 46$

46 Männer müssen den naturwissenschaftlich-technologischen Zweig gewählt haben.

25 Aus der Unabhängigkeit von S und M folgt:

$P(S) \cdot P(M) = P(S\cap M)$

$\frac{a+b}{a+b+c+d}\cdot\frac{a+c}{a+b+c+d} = \frac{a}{a+b+c+d}$

$\Rightarrow (a+b)\cdot(a+c) = a(a+b+c+d)$

$\Rightarrow a^2 + ac + ba + bc = a^2 + ab + ac + ad$

$\Rightarrow bc = ad$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

26 a) Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen.
Im Dreieck AFC ist der Winkel CFA = 90°;
im Dreieck DBC ist der Winkel CBA = 90° (Thaleskreis über [CD])
Somit stimmen beide Dreiecke in α und einem 90°-Winkel überein.
$\Rightarrow$ Sie sind ähnlich.

b) In ähnlichen Dreiecken gilt:
$\frac{b}{\overline{CF}} = \frac{2r}{a} \quad \Rightarrow \quad \overline{CF} = \frac{ab}{2r}$
$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \overline{CF} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \frac{ab}{2r} = \frac{abc}{4r}$

27 $\sin(2\varphi) = -\frac{1}{2}\sqrt{3} \quad 2\varphi_1 = 240° \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = 120° \quad$ bzw. $\quad \varphi_1 = \frac{2}{3}\pi$;
$2\varphi_2 = 300° \quad \Rightarrow \quad \varphi_2 = 150° \quad$ bzw. $\quad \varphi_2 = \frac{5}{6}\pi$

Das Ziegenproblem

S. 190 **1** Individuelle Lösungen

S. 191 **2** a) Die 2. Stufe stellt in beiden Fällen keinen Zufallsprozess dar, da die Entscheidung („bleiben“ bzw. „wechseln“) jeweils feststeht und somit sicher ist.

b) Strategie „bleiben“: $P(A) = P(A \cap A) = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$
Strategie „wechseln“: $P(A) = P(Z_1 \cap A) + P(Z_2 \cap A) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$

3 a) $A_1 \cap K_1 \cap M_3$: Das Auto steht hinter Tür 1 und der Kandidat wählt Türe 1 und der Moderator öffnet Türe 3.
$P(A_1 \cap K_1 \cap M_3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{18}$

b) $P(A_1 \cap K_1 \cap M_3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{9}$

c) $P_{K_1 \cap M_2}(A_1)$ gibt die bedingte Wahrscheinlichkeit an, dass das Auto hinter der Türe 1 steht, wenn der Kandidat Türe 1 gewählt hat und der Moderator Türe 2 geöffnet hat.

$$P_{K_1 \cap M_2}(A_1) = \frac{P(A_1 \cap K_1 \cap M_2)}{P(K_1 \cap M_2)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{3}{18}} = \frac{1}{3}$$

$P_{K_1 \cap M_2}(A_3)$ gibt die bedingte Wahrscheinlichkeit an, dass das Auto hinter der Türe 3 steht, wenn der Kandidat Türe 1 gewählt hat und der Moderator Türe 2 geöffnet hat.

$$P_{K_1 \cap M_2}(A_3) = \frac{P(A_3 \cap K_1 \cap M_2)}{P(K_1 \cap M_2)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1}{\frac{3}{18}} = \frac{2}{3}$$

Folgerung: Es ist günstiger im 2. Schritt die Türe zu wechseln.

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2