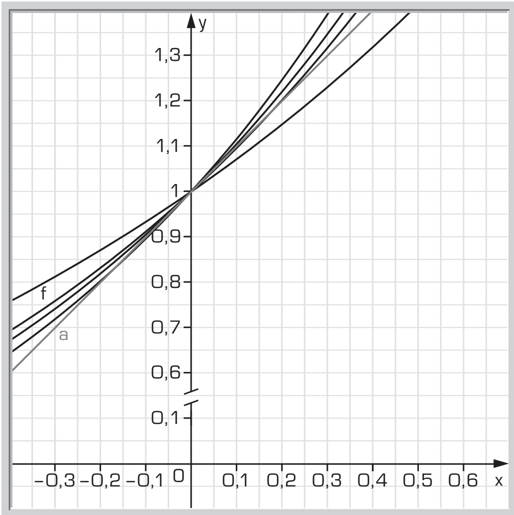
VI Natürliche Exponential- und Logarithmusfunktion

1 Die natürliche Exponentialfunktion und ihre Ableitung

S. 152

1

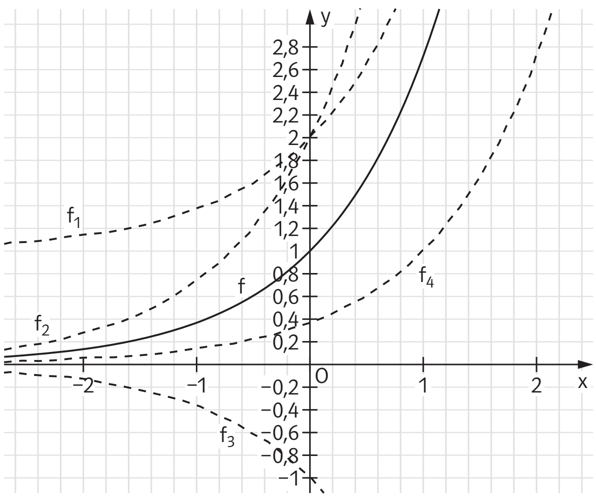


Durch Ausprobieren erkennt man, dass $2 < a < 3$, bzw. sogar $2{,}5 < a < 2{,}8$.
Für $a = 2{,}7$ hat man schon fast die Gerade als Tangente.

S. 154

2 $y = e^x$; $e^4 \approx 54{,}5982$; $e^{0,25} \approx 1{,}2840$; $e^{-2} \approx 0{,}1353$; $e^{\sqrt{5}} \approx 9{,}3565$;
$e^{-1,2} \approx 0{,}3012$; $e^e \approx 15{,}1543$; $e^{-\sqrt{23}} \approx 0{,}0083$; $e^{2,67} \approx 14{,}4400$

3



a) $f_1(x) = e^x + 1$ entsteht aus dem Graphen von $f(x) = e^x$ durch Verschiebung um 1 nach oben.
b) $f_2(x) = 2 \cdot e^x$ ist eine Streckung des Graphen von $f(x) = e^x$ mit dem Faktor 2.
c) $f_3(x) = -e^x$ ist eine Spiegelung an der x-Achse.
d) $f_4(x) = e^{x-1}$ ist eine Verschiebung um 1 nach rechts.

4 Ein DIN-A4-Blatt ist 21 cm breit und 29,7 cm hoch.
a) Gesucht ist x so, dass $e^x \approx 29{,}7$; durch Probieren mit dem TR: $e^{3,39} \approx 29{,}67$
Der Graph passt bis $x = 3{,}39$ auf das Blatt.
b) $e^{21} = 1318815734\,\text{cm} \approx 13\,000\,\text{km}$
Das Blatt müsste rund 13 000 km hoch sein.

5 a) $f'(x) = 4 \cdot e^x$; $f'(-2) = 4 \cdot e^{-2} \approx 0{,}54$ b) $f'(x) = -3 \cdot e^x$; $f'(0{,}5) = -3 \cdot e^{0,5} \approx -4{,}95$
c) $f'(x) = \frac{1}{2}e^x - 2ex$; $f'(1) = \frac{1}{2}e - 2e = -1{,}5e$ d) $f'(x) = 4 \cdot e^x - 3e \cdot x^{e-1}$ $f'(0) = 4$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

6 a) $f'(x) = e^x$; Ansatz für g: $y = mx+t$, wobei $m_A = f'(1)$ und $m_B = f'(-1)$
$f'(1) = e$; $e = e\cdot 1+t \Rightarrow t = 0$; t_A: $y = ex$
$f'(-1) = \frac{1}{e}$; $\frac{1}{e} = -\frac{1}{e}+t \Rightarrow t = \frac{2}{e}$; t_B: $y = \frac{1}{e}x+\frac{2}{e}$
b) $m_N = -\frac{1}{m_A}$ bzw. $m_N = -\frac{1}{m_B}$
Steigung der Normalen in A: $m_N = -\frac{1}{e}$; Steigung der Normalen in B: $m_N = -e$

7 Parallele Tangenten haben dieselbe Steigung, also $f'(x) = g'(x)$
a) $f'(x) = e^x$; $g'(x) = 1 \Rightarrow e^x = 1$ $P(0|1)$; $Q(0|0)$
b) $f'(x) = 2e^x$; $g'(x) = -4 \Rightarrow 2e^x = -4$ keine Lösung möglich
c) $f'(x) = \sqrt{e}$; $g'(x) = e^x \Rightarrow \sqrt{e} = e^x$ $P\left(\frac{1}{2}\middle|\frac{1}{2}\sqrt{e}\right)$; $Q\left(\frac{1}{2}\middle|e^{\frac{1}{2}}-2\right)$

8 $f_c(x) = c\cdot e^x$; Schnittpunkt mit der y-Achse: $c\cdot e^0 = c \rightarrow (0|c)$
$f_c'(x) = c\cdot e^x$; $f_c'(0) = c = 0{,}4$
$f_{0,4}(x) = 0{,}4\cdot e^x$

9 a) Gleichung der Tangente im Punkt $P(a|e^a)$
$m_P = f'(a) = e^a$; $e^a = e^a\cdot a+t \Rightarrow t = e^a\cdot(1-a) \Rightarrow$ t: $y = e^a\cdot x+(1-a)\cdot e^a$
Q: $e^a\cdot x+(1-a)\cdot e^a = 0 \Rightarrow x = a-1$
b) Die x-Koordinate des Punktes Q ist um 1 kleiner als die x-Koordinate des Punktes P.
c) $\left.\begin{array}{l}\tan\alpha = e^a\\ \tan\alpha = \frac{e^a}{x_P-x_Q}\end{array}\right\}\ e^a = \frac{e^a}{x_P-x_Q} \Rightarrow x_P-x_Q = 1$ oder $x_Q = x_P-1$
d) Zu jedem Punkt $P(a|f(a))$ findet man immer einen 2. Punkt $Q(a-1|0)$, der auch auf der Tangente liegt.
Die Verbindungsgerade PQ stellt die Tangente dar.

10 Vgl. Aufgabe 9.
Wenn die Tangente durch $(0|0)$ geht, hat der Berührpunkt die Koordinaten $(1|e)$. Die Tangente hat die Gleichung $y = ex$.

11 a) Der Graph von $f(x)$ wird an der y-Achse gespiegelt und um 1 nach oben verschoben.
b) Der Graph von $f(x)$ verschiebt sich um 1 nach links.
c) Der Graph von $f(x)$ wird an der x- und der y-Achse gespiegelt.
d) Der Graph von $f(x)$ verschiebt sich um 1 nach links und wird an der y-Achse gespiegelt.

12 $f_1(x)$ gehört zu dem lilafarbigen Graphen; $f_1(0) = 0$
$f_2(x)$ gehört zu dem blauen Graphen; $f_2(0) = 1$
$f_3(x)$ gehört zu dem orangefarbigen Graphen; Spiegelung von $y = e^x$ an der y-Achse und Verschiebung um 1 nach oben.
$f_4(x)$ gehört zu dem roten Graphen; $f_4(2) = 0$; es handelt sich um eine um 2 nach rechts verschobene und mit dem Faktor 0,5 gestauchte Normalparabel.

13 a) $f(2) = 1 \Rightarrow ce^2+a = 1$, $a = 1-ce^2$
$f(x) = c\cdot e^x+1-ce^2$; also keine eindeutige Lösung möglich.
Bsp.: $c = 1 \Rightarrow a = 1-e^2 \Rightarrow f(x) = e^x+1-e^2$
b) $\left.\begin{array}{l}f(0) = 1 \Rightarrow c\cdot e^0+a = 1,\ a = 1-c\\ f'(0) = 2 \Rightarrow c\cdot e^0 = 2 \Rightarrow c = 2\end{array}\right\}\ a = -1$
$f(x) = 2e^x-1$

14

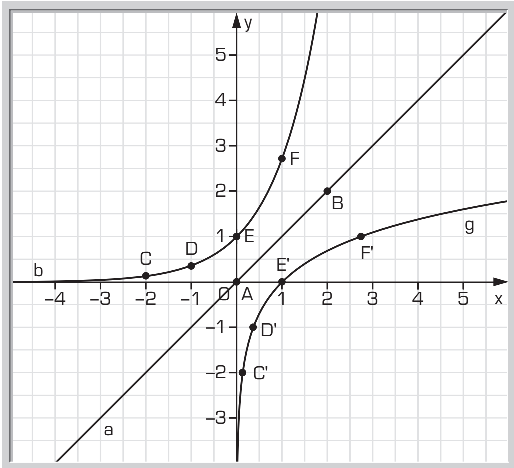
a) 18°	b) 57,3°	c) −36°	d) 225°	e) 143,2°
f) −286,5°	g) 480°	h) 47°	i) −257,8°	k) −510°

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

2 Die natürliche Logarithmusfunktion und ihre Ableitung

S. 155

1 a)



g stellt den Graph einer Funktion dar, da zu jedem $x \in \mathbb{R}^+$ genau ein y-Wert zugeordnet wird.

b) $g(x) = f^{-1}(x)$

$e^x = e$ für $x = 1 \Rightarrow g(e) = 1$

$e^x = e^2$ für $x = 2 \Rightarrow g(e^2) = 2$

$e^x = e^{-1}$ für $x = -1 \Rightarrow g(e^{-1}) = -1$

$e^x = \sqrt{e}$ für $x = \frac{1}{2} \Rightarrow g(\sqrt{e}) = \frac{1}{2}$

c) g ordnet jeder positiven Zahl ihren Logarithmus zur Basis e zu.

S. 157

2 Teilaufgabe b), Fehler im Schülerbuch ?

a) Schätzung: $1 + 2 = 3$ $\quad \ln 24 = \ln 3 \cdot 8 = \ln 3 + \ln 8 \approx 1{,}10 + 2{,}08 = 3{,}18$

b) Schätzung: $2 : 3 = \frac{2}{3}$ $\quad \ln 2 = \frac{1}{3}\ln 8 = 0{,}693$

c) Schätzung: $2 + 2 = 4$ $\quad \ln 72 = \ln 8 + \ln 9 = \ln 8 + 2\ln 3 = 4{,}28$

d) Schätzung: $1 - 2 = -1$ $\quad \ln 0{,}375 = \ln\frac{3}{8} = \ln 3 - \ln 8 \approx 1{,}10 - 2{,}08 = -0{,}98$

e) Schätzung: -1 $\quad \ln\frac{1}{3} = \ln 1 - \ln 3 = -\ln 3 \approx -1{,}10$

f) Schätzung: $\frac{1}{3} \cdot 2 = 0{,}7$ $\quad \frac{1}{3} \cdot \ln 8 = \frac{1}{3} \cdot \ln 2^3 \approx \frac{1}{3} \cdot 2{,}08 = 0{,}693$

3 a) ohne TR nicht lösbar

b) $\ln(e^{-1}) = -1 \cdot \ln e = -1$

c) $\ln(e^3) = 3 \cdot \ln e = 3$

d) $\ln(\sqrt{e}) = \frac{1}{2} \cdot \ln e = \frac{1}{2}$

e) ohne TR nicht lösbar

f) ohne TR nicht lösbar

g) $[\ln(e^2)]^3 = [2 \cdot \ln e]^3 = 2^3 = 8$

h) $[\ln(e^{-2})^5] = \ln e^{-10} = -10$

i) ohne TR nicht lösbar

4 a) $D_f = R^+;\ f'(x) = \frac{2}{x}$

b) $D_f = R^+;\ f'(x) = \frac{1}{x}$

c) $D_f = R^+;\ f'(x) = \frac{1}{x}$

d) $D_f = R^+;\ f'(x) = \frac{3}{x}$

e) $D_f = R^-;\ f'(x) = \frac{1}{x}$

f) $D_f = R^+;\ f'(x) = -\frac{1}{x}$

5 $f'(x) = \frac{1}{x}$ gelbes Kärtchen

$g'(x) = 1 + \frac{2}{x}$ lila Kärtchen

$h'(x) = 2x + \frac{3}{x}$ rotes Kärtchen

$k'(x) = -\frac{2}{x}$ grünes Kärtchen

$u'(x) = \frac{1}{2x}$ gelbes Kärtchen

$v'(x) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x}$ blaues Kärtchen

Das Kärtchen $\frac{3}{8x}$ gehört zu keiner gegebenen Funktion.

6 a) $F(x) = 4 \cdot \ln x + c$ $\quad x > 0$

$F(x) = 4 \cdot \ln(-x) + c$ $\quad x < 0$

b) $F(x) = \frac{3}{4}\ln x + c$ $\quad x > 0$

$F(x) = \frac{3}{4}\ln(-x) + c$ $\quad x < 0$

c) $F(x) = x + 2\ln x + c$ $\quad x > 0$

$F(x) = x + 2\ln(-x) + c$ $\quad x < 0$

d) $F(x) = x - \frac{5}{2}\ln x + c$ $\quad x > 0$

$F(x) = x - \frac{5}{2}\ln(-x) + c$ $\quad x < 0$

7 a) $x > 0$: $F(x) = 0{,}5x^2 - \ln x$; $\quad F'(x) = x - \frac{1}{x} = f(x)$

$x < 0$: $F(x) = 0{,}5x^2 - \ln(-x)$; $\quad F'(x) = x - \frac{1}{-x} \cdot (-1) = x - \frac{1}{x} = f(x)$

b) $x > 1$: $F(x) = \ln(x - 1)$; $\quad F'(x) = \frac{1}{x-1} = f(x)$

$x < 1$: $F(x) = \ln(1 - x)$; $\quad F'(x) = \frac{1}{1-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x-1} = f(x)$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern, Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

8 a) $f'(0{,}5) = 2;\quad f'(1) = 1;\quad f'(2) = 0{,}5;\quad f'(4) = 0{,}25$

b) abgelesen: $f'(1{,}75) \approx f(1{,}75)$

mit TR: $f'(1{,}76) \approx 0{,}568;\quad f(1{,}76) \approx 0{,}565$

9 Ansatz: $y = mx + t$

a) $\left.\begin{array}{l} m = f'(e^2) = \frac{1}{e^2} \\ f(e^2) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow\ 2 = e^2 \cdot \frac{1}{e^2} + t \ \Rightarrow\ t = 1 \qquad t_P\text{: } y = \frac{1}{e^2}x + 1$

b) Tangentengleichung an einem beliebigen Punkt $P(x_P \,|\, \ln x_P) \in G_f$:

Steigung: $f'(x_P) = \frac{1}{x_P} \ \Rightarrow\ \ln x_P = \frac{1}{x_P} \cdot x_P + t \ \Rightarrow\ t = \ln x_P - 1$

$t_P\text{: } y = \frac{1}{x_P} \cdot x + \ln x_P - 1$

$A \in t\text{: } 2 = \frac{1}{x_P} \cdot 0 + \ln x_P - 1 \ \Rightarrow\ 3 = \ln x_P \ \Rightarrow\ x_P = e^3$

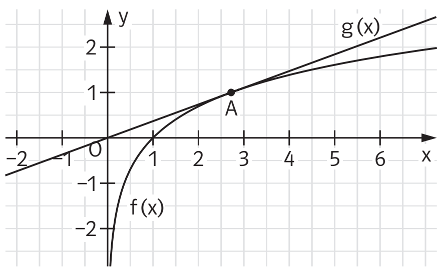
$t_A\text{: } y = e^{-3} \cdot x + 2$

c) Tangentengleichung siehe b): $t\text{: } y = \frac{1}{x_P} \cdot x + \ln x_P - 1$

$B(0 \,|\, n) \in t\text{: } n = \frac{1}{x_P} \cdot 0 + \ln x_P - 1 \ \Rightarrow\ n + 1 = \ln x_P \ \Rightarrow\ x_P = e^{n+1}$

$t_B\text{: } y = e^{-(n+1)} \cdot x + n$

10



a) Vermutung: $g(x)$ ist eine Tangente an G_f mit Berührpunkt bei $x \approx e$

b) Schnittpunkt (graphisch): $A(e \,|\, 1)$

Rechnerisch muss gelten:

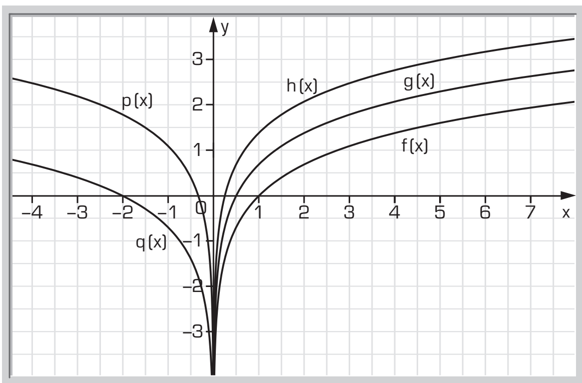
$\ln x = \frac{1}{e} \cdot x$

für $x = e$: $\ln e = \frac{1}{e} \cdot e$

$1 = 1$ w. A.

Tangente an G_f in $(e \,|\, 1)$: $y = \frac{1}{e} \cdot x$

11 a)



b) $P\left(x_P \,|\, \ln(kx_P)\right)$; $m = f'(x_P) = \frac{1}{x_P}$

$\ln(kx_P) = \frac{1}{x_P} \cdot x_P + t$

$\Rightarrow\ t = \ln(kx_P) - 1$

$t_P\text{: } y = \frac{1}{x_P} \cdot x + \ln(kx_P) - 1$

$A \in t_P\text{: } 2 = \frac{1}{x_P} \cdot 0 + \ln(kx_P) - 1$

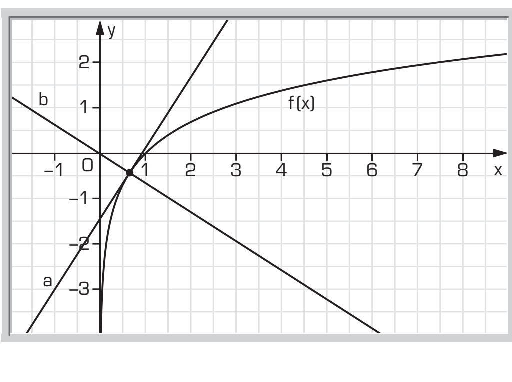
$\Rightarrow\ 3 = \ln(kx_P)$

$e^3 = kx_P \ \Rightarrow\ x_P = \frac{e^3}{k}$

Zu jedem k gibt es einen Berührpunkt $P\left(\frac{e^3}{k} \middle| 3\right)$.

Die Tangente durch P verläuft auch durch A.

c)



$f_1(x) = \ln x$

Steigung der Normale in $P(x_P \,|\, \ln x_P)$:

$m = -x_P$

Gleichung der Normale durch 0: $y = -x_P \cdot x$

Da P Schnittpunkt von Normale und Graph $f_1(x)$ ist, gilt: $\ln x_P = -x_P^2$

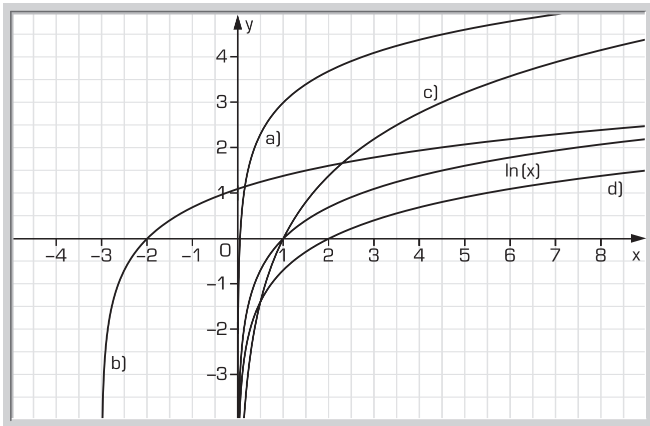
Diese Gleichung wird erfüllt von $x_P \approx 0{,}65$.

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

S. 158

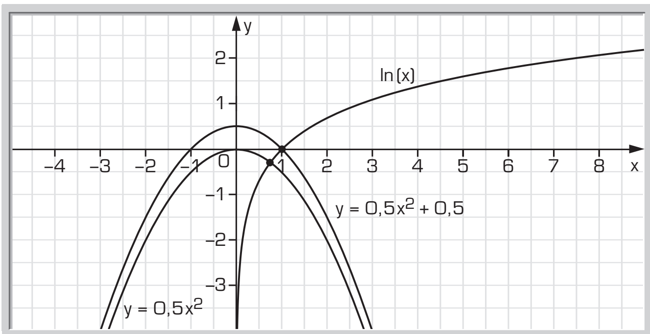
12 $y = \ln(x+3)$ → violetter Graph, da Nullstelle bei $x = -2$
$y = \ln x + 3$ → blauer Graph, Verschiebung von $\ln x$ um $+3$ in y-Richtung
$y = \ln(3x)$ → gelber Graph, da Nullstelle bei $x = \frac{1}{3}$
$y = \frac{x+1}{x+3}$ → roter Graph, Nullstelle bei $x = -1$
Keine Graphen für $y = 3 \cdot \ln x$, $y = \sqrt{x+1}$, $y = \ln x + \ln 3$

13 a) $y = \ln x + 3$
b) $y = \ln(x+3)$
c) $y = 2 \cdot \ln x$
d) $y = \ln\left(\frac{1}{2}x\right)$
e) Individuelle Lösungen



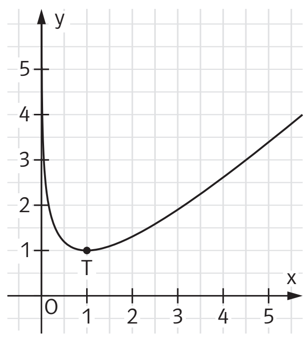
14 violett: $y = 3 + \ln x$; Verschiebung in y-Richtung um 3 nach oben
blau: $y = \ln(x+2{,}5)$; Verschiebung in x-Richtung um 2,5 nach links
gelb: $y = 3 \cdot \ln x$; Streckung in y-Richtung mit Faktor 3
rot: $y = \ln\left(\frac{1}{2}x\right)$; Streckung in x-Richtung mit Faktor $\frac{1}{2}$

15 Für die Schnittstelle x_0 muss gelten:
$$\left.\begin{array}{l} (1)\ \ln x_0 = a x_0^2 + c \\ (2)\ \frac{1}{x_0} \cdot 2 a x_0 = -1 \text{ (orthogonal)} \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{2} \end{array}\right\} \text{ alle Parabeln mit } y = -\frac{1}{2}x^2 \text{ schneiden orthogonal.}$$



Schnittpunkt auf x-Achse:
$\ln x_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{2}$
also: für $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$

16 a) $x = \ln x$ nicht lösbar $\Rightarrow$ keine Nullstelle
$f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$; $1 - \frac{1}{x} = 0$ für $x = 1$
Minimum für $T(1|1)$, da $f'(x) < 0$ für $x < 1$ und
$f'(x) > 0$ für $x > 1$
b) $f(x) = -e$ für $1 - \frac{1}{x_1} = -e \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{1+e}$
$P\left(\frac{1}{1+e} \middle| \frac{1}{1+e} + \ln(1+e)\right) \approx (0{,}27|1{,}58)$
$f'(x) = e$ für $1 - \frac{1}{x_2} = e \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{1}{1-e} < 0$
da $x_2 \notin D_f$ gibt es keinen solchen Punkt.
c) Berührpunkt: $(x_B | x_B - \ln x_B)$
Tangente durch Ursprung mit Steigung $m = f'(x_B)$:
$x_B - \ln x_B = \left(1 - \frac{1}{x_B}\right) \cdot x_B \quad \Rightarrow \quad \ln x_B = 1$, also $x_B = e$
$B(e | e-1)$



Klett

17 a) $D_f = R^+$

b) $f'(x) = \frac{x \cdot \frac{4}{x} - 4\ln x}{x^2} = \frac{4\cdot(1-\ln x)}{x^2}$

Extremwert für $4\cdot(1-\ln x) = 0 \;\Rightarrow\; \ln x = 1$, also $x = e$;

da $f'(x) > 0$ für $x < e$ und $f'(x) < 0$ für $x > 0 \;\Rightarrow\; H\left(e \middle| \frac{4}{e}\right)$

c) $f(x) \to -\infty$ für $x \to 0$, da $f'(x) > 0$ für $x < e$ und einzige Nullstelle bei $x = 1$

18 Sei J = Junge; D = Note 3

	J	$\overline{J}$	
D	9	4	13
$\overline{D}$	9	8	17
	18	12	30

a) $P(D) = \frac{13}{30} \approx 43{,}3\,\%$

b) $P(J \cap D) = \frac{9}{30} = 30\,\%$

c) $P_J(D) = \frac{1}{2} = 50\,\%$

d) $P_D(J) = \frac{9}{13} \approx 69{,}2\,\%$

3 Ableiten zusammengesetzter Funktionen

S. 159

1 a) $h_1(x) = x^2+1-e^x = u(x) - f(x)$; $h_2(x) = (x^2+1)\cdot\ln x = u(x)\cdot g(x)$

$h_3(x) = e^{x^2+1} = f(u(x))$; $h_4(x) = \frac{x^2+1}{\ln x} = \frac{u(x)}{g(x)}$

$h_5(x) = (e^x)^2+1 = u(f(x))$; $h_6(x) = g(u(x))$

b) $h_5'(x) = 2\cdot e^{2x}$; $h_6'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ (Anwendung der Kettenregel)

S. 160

2 a) $f'(x) = 1 - e^x$

b) $f'(x) = 2\cdot e^{2x}$

c) $f'(x) = \frac{3}{\frac{1}{3}\cdot x}\cdot\frac{1}{3} = \frac{3}{x}$

d) $f'(x) = 3\cdot e^{3x+4}$

e) $f'(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}x^2+1}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}x = \frac{x}{\frac{1}{2}x^2+1}$

f) $f'(x) = -2e^{-2x}$

g) $f'(x) = \frac{1}{2}\cdot e^{x^2+2}\cdot 2x = x\cdot e^{x^2+2}$

h) $f'(x) = \frac{1}{\frac{1}{x}}\cdot\frac{(-1)}{x^2} = -\frac{1}{x}$ oder $f(x) = \ln 1 - \ln x$; $f'(x) = -\frac{1}{x}$

3 a) f ist Stammfunktion von $g(x) = f'(x) = \frac{1}{x^2}\cdot 2x = \frac{2}{x}$

b) g ist Stammfunktion von $f(x) = g'(x) = 2\cdot\ln x\cdot\frac{1}{x} = \frac{2\ln x}{x}$

4 a) $D_f = \mathbb{R}$; $f'(x) = 2\cdot e^x + 2x\cdot e^x = 2e^x(1+x)$

b) $D_f = \mathbb{R}^+$; $f'(x) = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1$

c) $D_f = \mathbb{R}$; $f'(x) = 2x\cdot e^{-x} + x^2\cdot e^{-x}\cdot(-1) = x\cdot e^{-x}(2-x)$

d) $D_f = \mathbb{R}^+$; $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}$ oder $f(x) = \frac{1}{2}\ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}$

e) $D_f = \mathbb{R}^+$; $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\ln x + \sqrt{x}\cdot\frac{1}{x} = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}\ln x + 1\right)$

f) $D_f = \mathbb{R}$; $f(x) = 2x\cdot e^{4x}$; $f'(x) = 2\cdot e^{4x} + 2x\cdot e^{4x}\cdot 4 = 2e^{4x}\cdot(1+4x)$

g) $D_f = \mathbb{R}\setminus[0;1]$; $f'(x) = \frac{1}{\frac{x}{x-1}}\cdot\left(\frac{x-1-x}{(x-1)^2}\right) = \frac{(x-1)\cdot(-1)}{x(x-1)^2} = \frac{-1}{x(x-1)}$

h) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$; $f'(x) = \frac{(x+1)\cdot 2\cdot e^{2x} - e^{2x}}{(x+1)^2} = \frac{e^{2x}\cdot(2(x+1)-1)}{(x+1)^2} = \frac{e^{2x}\cdot(2x+1)}{(x+1)^2}$

5 a) richtig: $f'(x) = -e^{-x}\cdot\cos x + e^{-x}\cdot(-\sin x) = e^{-x}\cdot(-\cos x - \sin x)$

Vorzeichenfehler bei der Ableitung von $\cos x$!

b) richtig: $f'(x) = -e^{-x}\cdot\ln x + e^{-x}\cdot\frac{1}{x} = e^{-x}\left(-\ln x + \frac{1}{x}\right)$

Fehler bei der Ableitung von e^{-x}: Richtig ist $(e^{-x}) = -e^{-x}$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

6 Summe: $s(x) = 3e^{2x}+x^2+1$; $s'(x) = 6e^{2x}+2x$

Differenz: $d_1(x) = 3e^{2x}-x^2-1$; $d_1'(x) = 6e^{2x}-2x$; $d_2(x) = x^2+1-3e^{2x}$; $d_2'(x) = 2x-6e^{2x}$

Produkt: $p(x) = 3e^{2x}\cdot(x^2+1)$; $p'(x) = 6e^{2x}\cdot(x^2+1)+3e^{2x}\cdot 2x = 6e^{2x}\cdot(x^2+1+x)$

Quotient 1: $q_1(x) = \frac{3e^{2x}}{x^2+1}$; $q_1'(x) = \frac{(x^2+1)\cdot 6e^{2x}-3e^{2x}\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{6e^{2x}(x^2+1-x)}{(x^2+1)^2}$

Quotient 2: $q_2(x) = \frac{x^2+1}{3e^{2x}}$; $q_2'(x) = \frac{3e^{2x}\cdot 2x-(x^2+1)\cdot 6e^{2x}}{9e^{4x}} = \frac{6e^{2x}\cdot(x-x^2-1)}{9e^{4x}} = \frac{2}{3}e^{-2x}\cdot(-x^2+x-1)$

Verkettung: $f(g(x)) = 3\cdot e^{2(x^2+1)} = 3\cdot e^{2x^2+2}$; $f'(g(x)) = 3\cdot e^{2x^2+2}\cdot 4x = 12x\cdot e^{2x^2+2}$

Verkettung: $g(f(x)) = (3e^{2x})^2+1 = 9e^{4x}+1$; $g'(f(x)) = 36e^{4x}$

7 a) $f(x) = 2x-e^x$; $f'(x) = 2-e^x$

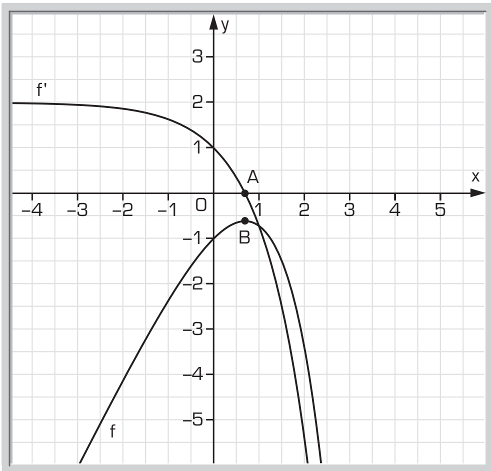
b) $f(x) = \ln x-\ln(x+1)$; $(x>0)$; $f'(x) = \frac{1}{x^2+x}$

c) $f(x) = 3\left(\ln 2+\frac{1}{2}\ln x\right)$; $f'(x) = \frac{3}{2x}$

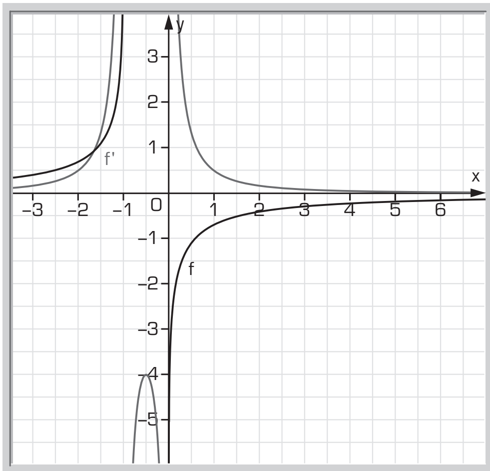
d) $f(x) = e^{-x}+x\cdot e^{-x} = e^{-x}(1+x)$; $f'(x) = -x\cdot e^{-x}$

Kontrolle:
Jeweils Extremstellen von f mit Nullstellen von f′ vergleichen. Ebenso Steigungsverhalten von f und Vorzeichen f′.

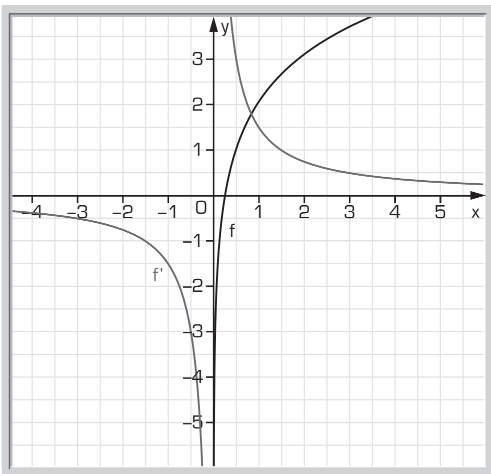
zu a)



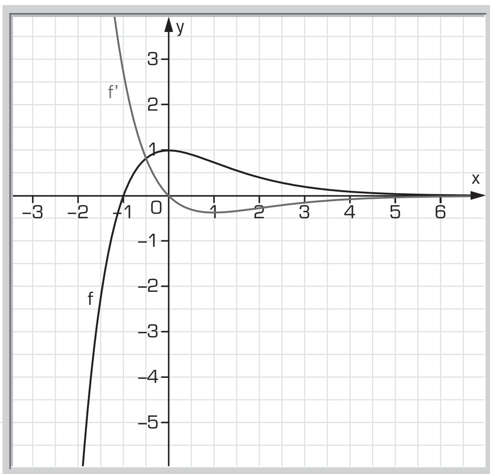
zu b)



zu c)

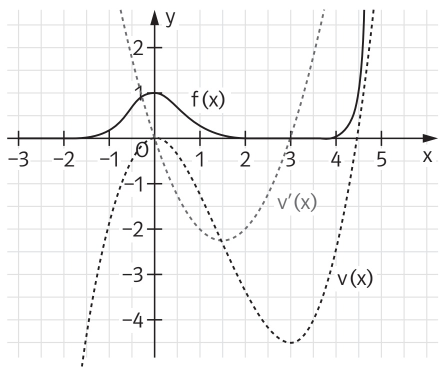


zu d)



Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

8 $v'(x) = 0$ für $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$,
$v'(x) > 0$ für $x < 0$ und $x > 3$;
$v'(x) < 0$ für $0 < x < 3$
Somit gilt für $v(x)$:
v hat bei $x_1 = 0$ einen Hochpunkt und bei $x_2 = 3$ einen Tiefpunkt.
Ebenso gilt für $f(x) = e^{v(x)}$:
f hat Hochpunkt bei x_1 und Tiefpunkt bei x_2.



9 waagrechte Tangente, wenn $f'(x) = 0$.

a) $f'(x) = 1-e^{-x}$; $1-e^{-x} = 0$ wenn $1 = e^{-x}$ $\Rightarrow$ $x = 0$ $P(0|1)$

b) $f'(x) = e^x + xe^x = e^x \cdot (1+x)$; $e^x(1+x) = 0$ wenn $1+x = 0$ $\Rightarrow$ $x = -1$ $P\left(-1\middle|-\frac{1}{e}\right)$

c) $f'(x) = \frac{x \cdot \frac{1}{x} - \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$; $1-\ln x = 0$ wenn $\ln x = 1$ $\Rightarrow$ $x = e$ $P\left(e\middle|\frac{1}{e}\right)$

d) $f'(x) = e^{2x+1} + x \cdot e^{2x+1} \cdot 2 = e^{2x+1} \cdot (1+2x)$; $e^{2x+1} \cdot (1+2x) = 0$ wenn $1+2x = 0$
$\Rightarrow$ $x = -\frac{1}{2}$ $P\left(-\frac{1}{2}\middle|-\frac{1}{2}\right)$

10 (1) $F'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{1}{x}$

(2) $F'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x}$

(3) $F'(x) = \frac{1}{x}(\ln x + x) + \ln x \cdot \left(\frac{1}{x}+1\right) = \frac{\ln x}{x} + 1 + \frac{\ln x}{x} \cdot \ln x = \frac{2\ln x}{x} + \ln x + 1$

(4) $F'(x) = \ln x + \frac{x}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$

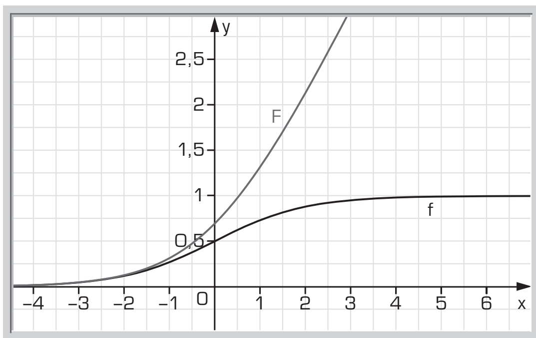
$\Rightarrow$ $F(x) = x \cdot \ln x - x$ ist Stammfunktion von $f(x) = \ln x$

11 Graph der Funktion: schwarz; Graph der Ableitung: grün; Graph der Stammfunktion: blau
Grad von $f = 3$; die beiden Extremwerte sind Nullstellen der Ableitung $f'(x)$.
Nullstellen von $f(x)$ sind die Extremwerte der Stammfunktionen $F(x)$.
Ebenso möglich: Prüfen des jeweiligen Monotonieverhaltens.

12 a) $e^x + 1 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $D_f = \mathbb{R}$

b) $F'(x) = \frac{1}{e^x+1} \cdot e^x = \frac{e^x}{e^x+1}$

c)



13 $f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2+1}$

Gleichung einer Tangente: $y = mx + t$

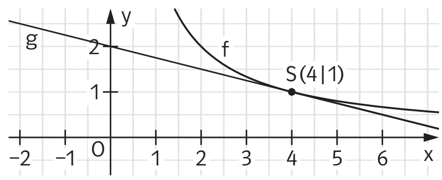
T_{P_1}: $m = f'(-3) = 6 \cdot e^{-8}$, $P_1(-3|e^{-8})$ $\Big\}$ $e^{-8} = 6 \cdot e^{-8} \cdot (-3) + t$ $\Rightarrow$ $t = e^{-8} + 18e^{-8} = 19e^{-8}$; T_{P_1}: $y = 6e^{-8}x + 19e^{-8}$

T_{P_2}: $m = f'(3) = -6 \cdot e^{-8}$, $P_2(3|e^{-8})$ $\Big\}$ $e^{-8} = -6 \cdot e^{-8} \cdot 3 + t$ $\Rightarrow$ $t = e^{-8} + 18e^{-8} = 19e^{-8}$; T_{P_2}: $y = -6e^{-8}x + 19e^{-8}$

Schnittpunkt: $T_{P_1} = T_{P_2}$: $6 \cdot e^{-8}x + 19e = -6 \cdot e^{-8}x + 19e^{-8}$ $\Rightarrow$ $x = 0$; $S(0|19e^{-8})$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

14 $f(x) = g(x);\ \frac{4}{x} = mx+2 \ \Rightarrow\ mx^2+2x-4 = 0$



$m \neq 0$: $\quad x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+16m}}{2m}$

Es gibt genau eine Lösung, wenn $4+16m = 0$,

also für $m = -\frac{1}{4}$.

Dann gilt für S: $x_1 = x_2 = \frac{-2 \pm 0}{2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)} = 4 \ \Rightarrow\ S_1(4|1)$

$m = 0 \ \Rightarrow\ \frac{4}{x} = 2 \ \Rightarrow\ S_2(2|2)$

4 Exponentialfunktionen und Exponentialgleichungen

S. 161

1 Zu lösen ist die Gleichung $1{,}85\,\text{Mrd.} = 0{,}929 \cdot e^{0{,}0192\cdot t}\,\text{Mrd.}$
Durch Probieren (z.B. für $t = 10$, $t = 20$, $t = 30$, $t = 40$) erkennt man, dass $30 < t < 40$ sein muss.
Genaueres Anhähern ergibt $35 < t < 36$.
Der genaue (gerundete) Wert ergibt $t \approx 35{,}87$, d.h. im Jahr 2031 hat sich die Zahl der Einwohner Indiens verdoppelt.
Rechnet man mit „doppelt so viel“, ist $2 \cdot e^{0{,}0192\cdot t}$, also $t = 36{,}1$.

2 Aus der Definition von ln folgt $e^{\ln 2} = 2$.
Also: $2^x = e^{\ln 2 \cdot x} \ \Rightarrow\ k = \ln 2$.

S. 162

3 a) 4 b) $e^{-\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{2}$ c) 2 d) -1 e) $e^{3\ln 2} = \left(e^{\ln 2}\right)^3 = 8$

f) $\ln\left(\frac{1}{2}e^3\right) = \ln\frac{1}{2} + \ln e^3 = \ln 1 - \ln 2 + 3 = 3 - \ln 2$ g) $\ln\left(\frac{1}{3}\sqrt{e}\right) = \ln 1 - \ln 3 + \ln e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \ln 3$

h) $e^{3\ln\sqrt{3}} = \left(e^{\ln\sqrt{3}}\right)^3 = \sqrt{3}^{\,3} = 3\sqrt{3}$ i) $\ln e^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$

4 a) $\frac{\ln a^r}{\ln a^s} = \frac{r\cdot\ln a}{s\cdot\ln a} = \frac{r}{s}$ b) $a^{\frac{\ln b}{\ln a}} = e^{\ln\left(a^{\frac{\ln b}{\ln a}}\right)} = e^{\frac{\ln b}{\ln a}\cdot\ln a} = e^{\ln b} = b$

c) $a^{\frac{1}{\ln a}} = e^{\ln\left(a^{\frac{1}{\ln a}}\right)} = e^{\frac{1}{\ln a}\cdot\ln a} = e$

5 a) richtig; Anwendung der Potenzgesetze: $f(x) = e \cdot e^{2x+1} = e^{1+2x+1} = e^{2x+2}$
b) falsch; $f(x) = 2\cdot e^{x-3} = e^{\ln 2}\cdot e^{x-3} = e^{\ln 2 + x - 3}$
a) richtig; $f(x) = 2^{2x} = \left(e^{\ln 2}\right)^{2x} = e^{2x\ln 2} = e^{2\cdot\ln 2\cdot x}$

6 a) $e^x = \sqrt{2} \ \Rightarrow\ \ln e^x = \ln\sqrt{2} \ \Rightarrow\ x = \frac{1}{2}\ln 2$
b) $e^x = 1000 \ \Rightarrow\ \ln e^x = \ln 1000 \ \Rightarrow\ x = \ln 1000$
c) $e^{0{,}5x} = -1$ hat keine Lösung
d) $\ln\left(\frac{1}{x}\right) - \ln x = 4 \ \Rightarrow\ \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) = 4 \ \Rightarrow\ e^{\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)} = e^4 \ \Rightarrow\ x = \frac{1}{e^2}$
e) $2\cdot e^{x+2} = 5 \ \Rightarrow\ e^{x+2} = 2{,}5 \ \Rightarrow\ \ln e^{x+2} = \ln 2{,}5 \ \Rightarrow\ x = \ln 2{,}5 - 2$
f) $2\ln(\sqrt{x}) + \ln(x^2) = 1 \ \Rightarrow\ \ln x + \ln x^2 = 1 \ \Rightarrow\ \ln x^3 = 1 \ \Rightarrow\ e^{\ln x^3} = e \quad x = e^{\frac{1}{3}}$

7 $f'(x) = 3\cdot e^{2x}\cdot 2 = 6e^{2x};\ \ f'(x) = 12 \ \Rightarrow\ 6e^{2x} = 12 \ \Rightarrow\ e^{2x} = 2 \ \Rightarrow\ \ln e^{2x} = \ln 2$
somit $x = \frac{\ln 2}{2}$

8 a) $2^x = 3 \ \Rightarrow\ \ln 2^x = \ln 3 \ \Rightarrow\ x = \frac{\ln 3}{\ln 2}$
b) $2^{x-1} = 3 \ \Rightarrow\ 2^x = 6 \ \Rightarrow\ \ln 2^x = \ln 6 \ \Rightarrow\ x = \frac{\ln 6}{\ln 2}$
c) $2^{1-x} = 3 \ \Rightarrow\ \frac{2}{2^x} = 3 \ \Rightarrow\ \frac{2}{3} = 2^x \ \Rightarrow\ \ln\frac{2}{3} = \ln 2^x \ \Rightarrow\ x = \frac{\ln\frac{2}{3}}{\ln 2}$
d) $2^{x-2} = -3 \ \Rightarrow\ \frac{2^x}{4} = -3 \ \Rightarrow\ 2^x = -12$ hat keine Lösung

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

9 a) $e^{-x} = e^{\frac{1}{2}} \;\Rightarrow\; x = -\frac{1}{2}$ Exponentenvergleich

b) $e^x = e^{-2} \;\Rightarrow\; x = -2$ Exponentenvergleich

c) $e^x \cdot (e^x - 2) = 0 \;\Rightarrow\; e^x = 2 \;\Rightarrow\; x = \ln 2$; $e^x > 0$, Produktwert = 0, wenn mindestens 1 Faktor = 0

d) $(e^x - 1)\cdot(\ln x - 1) = 0 \;\Rightarrow\; e^x = 1$ oder $\ln x = 1$, also $x_1 = 0$ oder $x_2 = e$

e) $e^{2x} - 3\cdot e^x = 0 \;\Rightarrow\; e^x \cdot (e^x - 3) = 0 \;\Rightarrow\; e^x = 3 \;\Rightarrow\; x = \ln 3$

f) $\ln x \cdot (\ln x - 3) = 0 \;\Rightarrow\; \ln x = 0$ oder $\ln x = 3 \;\Rightarrow\; x_1 = 1$ oder $x_2 = e^3$

(d)–f): Begründung wie bei Teilaufgabe c))

10 a) $u = e^x$; $u^2 - 7u + 12 = 0$; $u_{1/2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{2}$; $u_1 = 4$; $u_2 = 3$

$e^x = 4 \;\Rightarrow\; x_1 = \ln 4$; $e^x = 3 \;\Rightarrow\; x_2 = \ln 3$

b) $u = e^x$; $u^2 - 2u + 1 = 0 \;\Rightarrow\; (u-1)^2 = 0 \;\Rightarrow\; u = 1$

$e^x = 1 \;\Rightarrow\; x = 0$

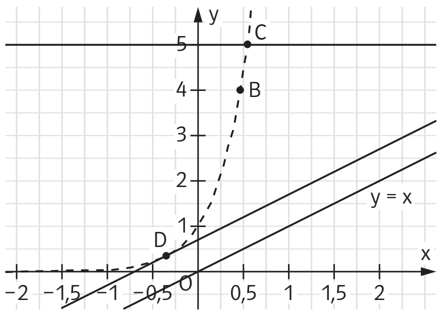
c) $(e^x)^2 - 2e^x - 15 = 0 \;\Rightarrow\; e^x = u$; $u^2 - 2u - 15 = 0$; $u_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+60}}{2}$; $u_1 = 5$; $u_2 = -3$

$e^x = 5 \;\Rightarrow\; x = \ln 5$ ($e^x = -3$ nicht lösbar)

d) $e^{2x} = u$; $u^2 - 3u - 10 = 0$; $u_{1/2} = \frac{3 + \sqrt{9+40}}{2}$; $\Rightarrow\; u_1 = 5$; $u_2 = -2$

$e^{2x} = 5 \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{2}\ln 5$ ($e^{2x} = -2$ nicht lösbar)

11 a)



b) $e^{3x} = 4 \;\Rightarrow\; e^x = 4^{\frac{1}{3}} \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{3}\ln 4$

$B\left(\frac{1}{3}\ln 4 \,\middle|\, 4\right)$

c) $e^{3x} = 5 \;\Rightarrow\; e^x = 5^{\frac{1}{3}} \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{3}\ln 5$

$C\left(\frac{1}{3}\ln 5 \,\middle|\, 5\right)$

d) $f'(x) = 3\cdot e^{3x}$; $3\cdot e^{3x} = 1 \;\Rightarrow\; e^{3x} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow\; x = \frac{1}{3}\cdot \ln\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}\ln 3$

$D\left(-\frac{1}{3}\ln 3 \,\middle|\, \frac{1}{3}\right)$

12 a) $f(x) = (e^{\ln 4})^x = e^{x\cdot\ln 4}$; $f'(x) = \ln 4 \cdot e^{x\cdot \ln 4} = \ln 4 \cdot 4^x \approx 1{,}3863\cdot 4^x$

$F(x) = \frac{1}{\ln 4}\cdot e^{x\cdot\ln 4} = \frac{1}{\ln 4}\cdot 4^x$

b) $f(x) = e^{x\cdot\ln\left(\frac{2}{3}\right)}$; $f'(x) = \ln\left(\frac{2}{3}\right)\cdot e^{x\cdot\ln\left(\frac{2}{3}\right)} = \ln\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x \approx -0{,}4055\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x$

$F(x) = \frac{1}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}\cdot e^{x\cdot\ln\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{1}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x$

c) $f(x) = e^{(x-2)\cdot\ln 2}$; $f'(x) = \ln 2\cdot e^{(x-2)\cdot\ln 2} = \ln 2\cdot 2^{x-2} \approx 0{,}6931\cdot 2^{x-2}$

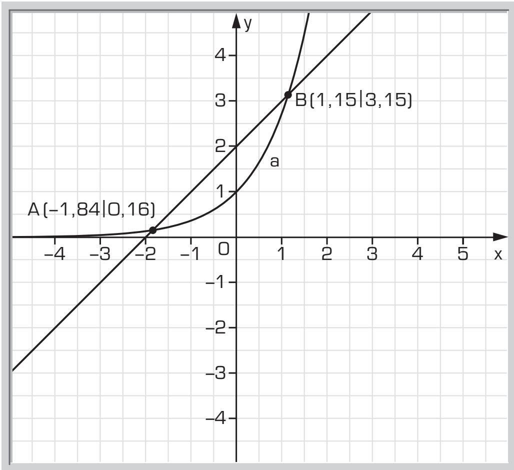
$F(x) = e^{(x-2)\cdot\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}\cdot e^{x-2}$

d) $f(x) = 0{,}5^{2x-1} = (2^{-1})^{2x-1} = 2^{1-2x} = e^{(1-2x)\cdot\ln 2}$; $f'(x) = -2\cdot\ln 2\cdot e^{(1-2x)\cdot\ln 2} = -2\cdot\ln 2\cdot 2^{1-2x}$
$\approx -1{,}3863\cdot 2^{1-2x}$

$F(x) = \frac{1}{2\cdot\ln 2}\cdot e^{(1-2x)\cdot\ln 2} = \frac{-1}{2\cdot\ln 2}\cdot 0{,}5^{2x-1}$

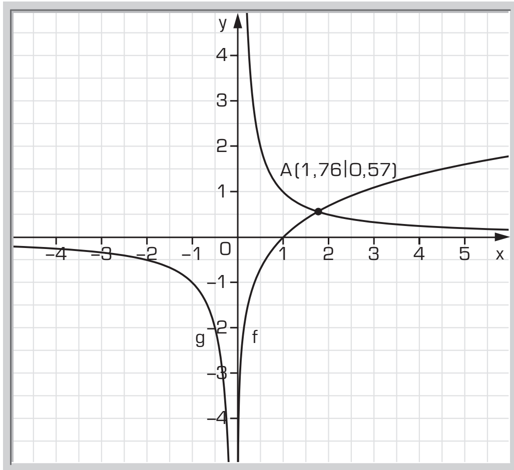
Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

13 a)



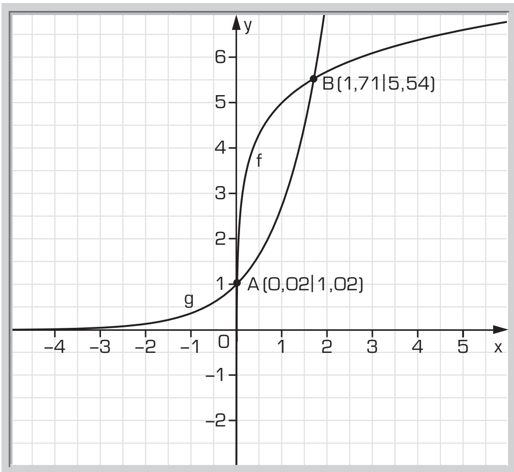
$x_1 \approx -1{,}84$; $x_2 \approx 1{,}15$

b)



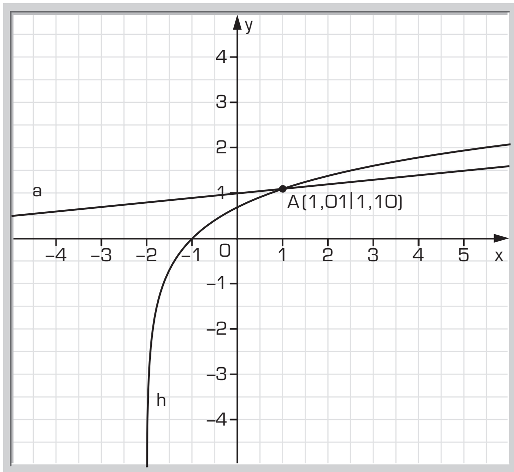
$x \approx 1{,}76$

c)



$x_1 \approx 0{,}02$; $x_2 \approx 1{,}71$

d)



$x_1 \approx 1{,}01$; $x_2 \approx 21{,}6$

14 a) $5-3-(5-2\sqrt{15}+3) = -6+2\sqrt{15}$

b) $\sqrt{\frac{(x^2-x)(x^2+x)\cdot(x-1)}{x+1}} = \sqrt{\frac{x^2\cdot(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x-1)}{x+1}} = |x\cdot(x-1)|$

c) $a+b-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = a+b-(a-2\sqrt{ab}+b) = +2\sqrt{ab}$

5 Exponential- und Logarithmusfunktionen und ihre Graphen

S. 163

1 $\frac{f}{g} = \frac{x^{10}}{e^x}$; Vermutung: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^{10}}{e^x} = 0$ $\frac{g}{f} = \frac{e^x}{10^x}$; Vermutung: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{10^x} = +\infty$

$f-g = x^{10}-e^x$; Vermutung: $\lim\limits_{x\to\infty} x^{10}-e^x = -\infty$

2 a) $f(x) = e^{-x}+x$ gehört zum gelben Graph; $f(0) = 1$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$

b) $g(x) = x+e^x$ gehört zum blauen Graph; $f(0) = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

c) $h(x) = \ln(x-0{,}5)$ gehört zum schwarzen Graph; $f(1{,}5) = 0$; $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$

d) $k(x) = -2e^{-x^2}$ gehört zum roten Graph; $f(0) = -2$; $f(x) < 0$ für alle $x \in D_f$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

S. 165

3 a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{\frac{3}{x}}-7\right) = -7;$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{\frac{3}{x}}-7\right) = +\infty$ Asymptote: $y = -7$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^5\cdot\frac{1}{e^x}\right) = 0;$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^5\cdot\frac{1}{e^x}\right) = -\infty$ Asymptote: $y = 0$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(8\cdot\frac{\ln x}{x}\right) = 0;$ $\lim\limits_{x\to0}\left(8\cdot\frac{\ln x}{x}\right) = -\infty$ Asymptote: $y = 0$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-e^x) = -\infty;$ $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-e^x) = -\infty$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3e^x-x^7) = +\infty;$ $\lim\limits_{x\to-\infty}(3e^x-x^7) = +\infty$ keine Asymptoten

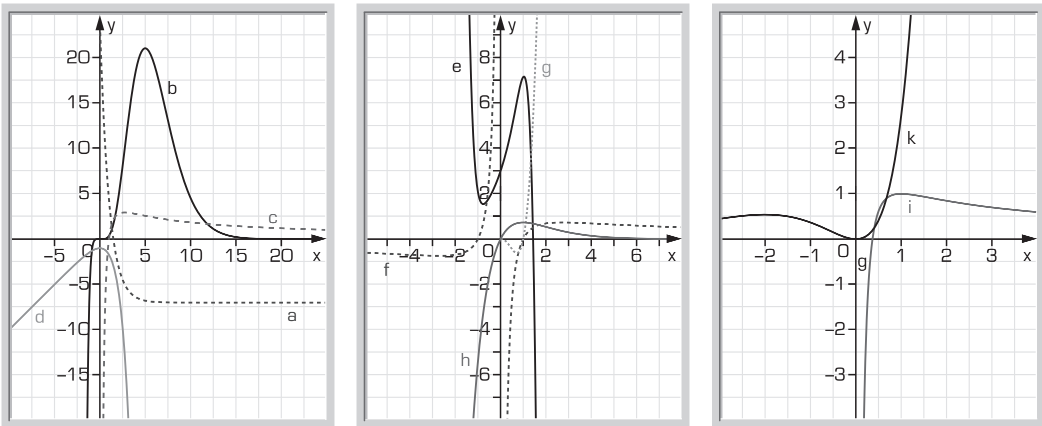
f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2)}{x} = 0;$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(x^2)}{x} = 0$ Asymptote: $y = 0$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}5x^3\cdot\ln x = +\infty;$ $\lim\limits_{x\to0}5x^3\cdot\ln x = 0$ keine Asymptote

h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\cdot e^{-x} = 0;$ $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{x}\cdot e^{-x} = 0$ Asymptote: $y = 0$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot(1+\ln x) = 0;$ $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot(1+\ln x) = -\infty$ Asymptote: $y = 0$

k) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\cdot e^x = +\infty;$ $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2\cdot e^x = 0$ Asymptote: $y = 0$



4 Vorgehensweise für alle Teilaufgaben: Man bestimmt spezielle Funktionswerte und das Verhalten für $\lim\limits_{x\to\pm\infty}$.

a) $f(x) = e^{x-2};$ $f(0) = e^{-2};$ $f(2) = 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x-2} = 0$, also x-Achse ist Asymptote

b) $g(x) = 0{,}5e^{-x}+3;$ $f(0) = 3{,}5$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(0{,}5e^{-x}+3) = 3;$ $\lim\limits_{x\to-\infty}(0{,}5e^{-x}+3) = +\infty$

c) $h(x) = 0{,}25x-e^x;$ $f(0) = -1;$

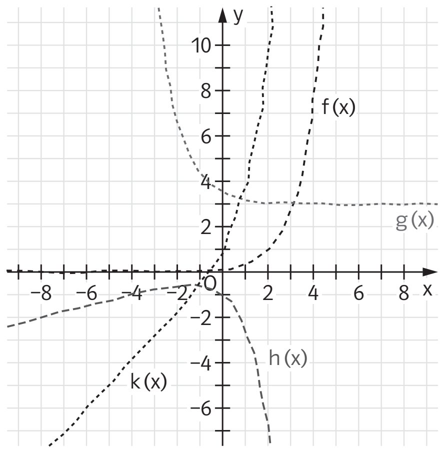
$\lim\limits_{x\to+\infty}(0{,}25x-e^x) = -\infty;$ $\lim\limits_{x\to-\infty}(0{,}25x-e^x) = -\infty;$

Asymptote: $y = 0{,}25x$

d) $k(x) = x+e^x;$ $k(0) = 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+e^x) = +\infty,$ $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+e^x) = -\infty;$

Asymptote: $y = x$



Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

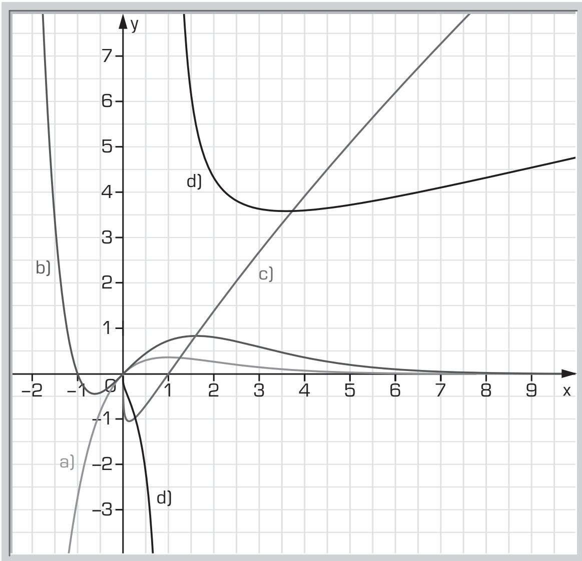
5 a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$ richtig (Satz); $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{e^x}=+\infty$ falsch; richtig: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{e^x}=0$

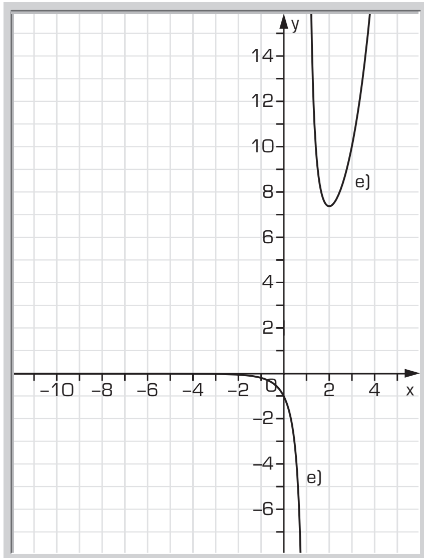
b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+x}{e^x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{e^x}+\frac{x}{e^x}\right)=0$ richtig; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+x}{e^x}=0$ richtig; (e^x wächst stärker als x)

c) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{2x}\cdot\ln x=-\infty$ falsch; richtig: $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{2x}\cdot\ln x=0$; $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{2x}\cdot\ln x=+\infty$ richtig

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+1}{\ln x}=0$ richtig; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\ln x}=0$ falsch; richtig: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\ln x}=+\infty$ (ln x steigt langsamer als x+1)

e) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^x}{x-1}=+\infty$ falsch; richtig: $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}}\frac{e^x}{x-1}=-\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}\frac{e^x}{x-1}=+\infty$ richtig





f) Individuelle Lösungen

S. 166

6 a) $D_f=\mathbb{R}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-4}{e^x}=0$; Asymptote: y = 0

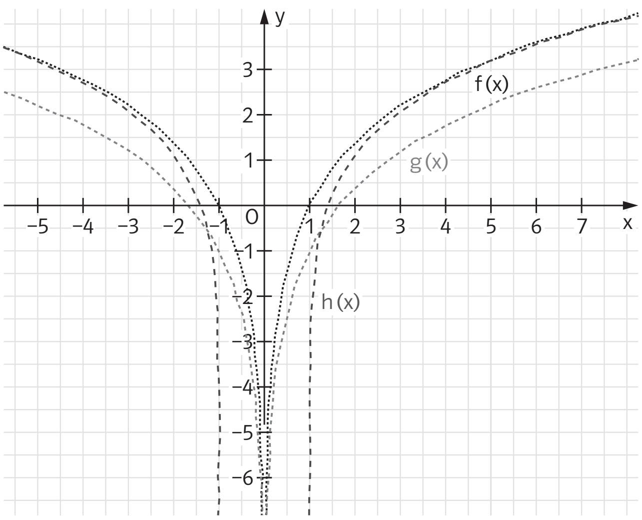
b) $D_f=\mathbb{R}^+$; $\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\ln\frac{1}{x}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\ln\frac{1}{x}=0$ keine Asymptote

c) $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}=1$; $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{\frac{1}{x}}=1$; Asymptote: y = 1

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >0}}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$; Asymptote: x = 0

d) $D_f=\mathbb{R}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+x)\cdot e^{-x}=0$; Asymptote: y = 0

7



Die drei Graphen sind achsensymmetrisch zur y-Achse.
Es gilt: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=+\infty$ für alle drei Funktionen.
Die y-Achse ist senkrechte Asymptote.
$D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ für f und g.
$D_h=\mathbb{R}\setminus[-1;1]$

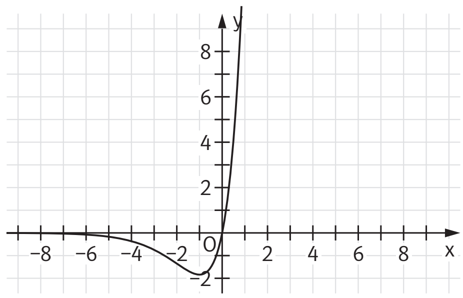
8 a) $f'(x) = 2 - e^x$; $f'(x) = 0$ für $x = \ln 2$; $f(\ln 2) = 2\ln 2 - 2$ $\Rightarrow$ $E(\ln 2 \mid \approx -0{,}61)$
$f'(x) > 0$ für $-\infty < x < \ln 2$; $f'(x) < 0$ für $\ln 2 < x < +\infty$ $\Rightarrow$ E ist Maximum.
$\Rightarrow$ $W_f =]-\infty; 2\ln 2 - 2]$ $\Rightarrow$ keine Nullstelle

b) $f'(x) = 1 - 0{,}5 \cdot e^{-x}$; $f'(x) = 0$ für $x = -\ln 2$; $f(-\ln 2) = 1 - \ln 2$ $\Rightarrow$ $E(-\ln 2 \mid \approx 0{,}3)$
$f'(x) < 0$ für $-\infty < x < -\ln 2$; $f'(x) > 0$ für $-\ln 2 < x < +\infty$ $\Rightarrow$ E ist Minimum.
$\Rightarrow$ $W_f = [-\ln 2 + 1; +\infty[$ $\Rightarrow$ keine Nullstelle

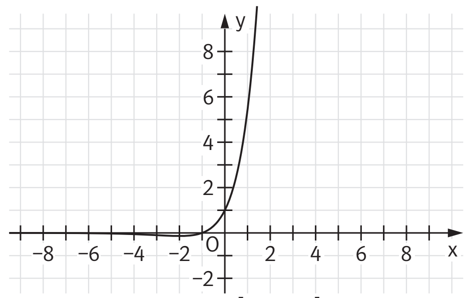
c) $f'(x) = e^x - e^{-x}$; $f'(x) = 0$ für $x = 0$; $f(0) = 2$ $\Rightarrow$ $E(0 \mid 2)$
$f'(x) < 0$ für $-\infty < x < 0$; $f'(x) > 0$ für $0 < x < +\infty$ $\Rightarrow$ E ist Minimum.
$\Rightarrow$ $W_f = [2; +\infty[$ $\Rightarrow$ keine Nullstelle

d) $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$; $f'(x) = 0$ für $x = e$; $f(e) = e$ $\Rightarrow$ $E(e \mid e)$
$f'(x) < 0$ für $0 < x < e$; $f'(x) > 0$ für $e < x < +\infty$ $\Rightarrow$ E ist Minimum.
$\Rightarrow$ $W_f =]-\infty; 0[, [e; \infty[$ $\Rightarrow$ keine Nullstelle

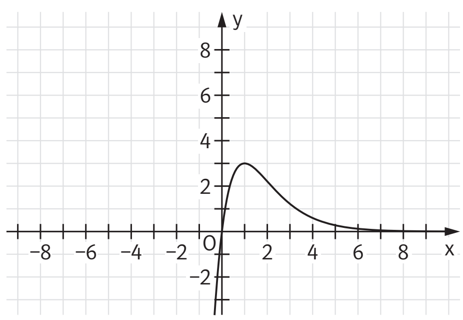
9 a) $f(x) = 5x \cdot e^x$; $D_f = \mathbb{R}$
einzige Nullstelle: $x = 0$
$f'(x) = 5xe^x + 5e^x = 5e^x(x+1)$
$f'(x) = 0$ für $x = -1$
$f'(x) < 0$ für $-\infty < x < -1$;
$f'(x) > 0$ für $-1 < x < +\infty$
$\Rightarrow$ Minimum $(-1 \mid -5 \cdot e^{-1})$
$\lim\limits_{x \to -\infty} 5x \cdot e^x = 0$; $y = 0$ ist Asymptote.



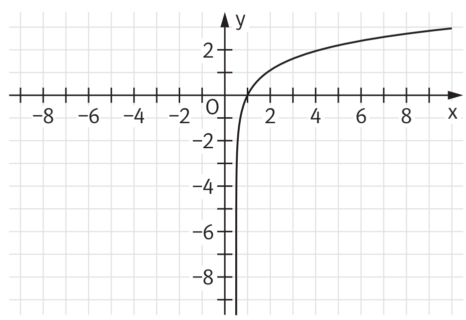
b) $f(x) = (x+1) \cdot e^x$; $D_f = \mathbb{R}$
einzige Nullstelle für $x = -1$
$f'(x) = e^x + (x+1) \cdot e^x = e^x(x+2)$
$\Rightarrow$ $f'(x) = 0$ für $x = -2$
$f'(x) < 0$ für $-\infty < x < -2$;
$f'(x) > 0$ für $-2 < x < +\infty$
$\Rightarrow$ Minimum $(-2 \mid -e^{-2})$
$\lim\limits_{x \to -\infty} (x+1) \cdot e^x = 0$; $y = 0$ ist Asymptote.



c) $f(x) = 3x \cdot e^{-x+1}$; $D_f = \mathbb{R}$
einzige Nullstelle für $x = 0$
$f'(x) = 3x \cdot e^{-x+1} + 3x \cdot e^{-x+1} \cdot (-1)$
$= 3e^{-x+1}(1-x)$
$\Rightarrow$ $f'(x) = 0$ für $x = 1$
$f'(x) > 0$ für $-\infty < x < 1$;
$f'(x) < 0$ für $1 < x < +\infty$
$\Rightarrow$ Maximum $(1 \mid 3)$
$\lim\limits_{x \to +\infty} 3x \cdot e^{-x+1} = 0$; $y = 0$ ist Asymptote.

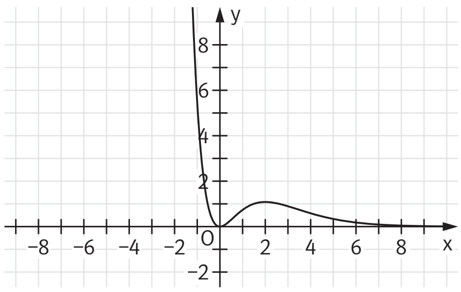


d) $f(x) = \ln(2x-1)$; $D_f = \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$
einzige Nullstelle für $x = 1$
$f'(x) = \frac{2}{2x-1}$; kein Extremwert;
$f'(x) > 0$ für $x \in D_f$
$\Rightarrow$ G_f steigt monoton.
$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(2x-1) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \ln(2x-1) = -\infty$
(keine Asymptoten)

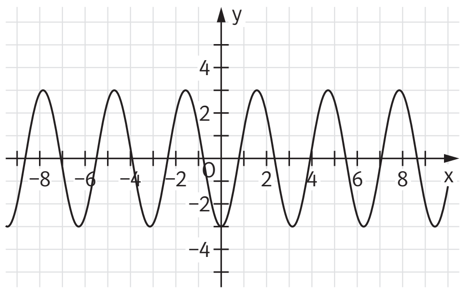


Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

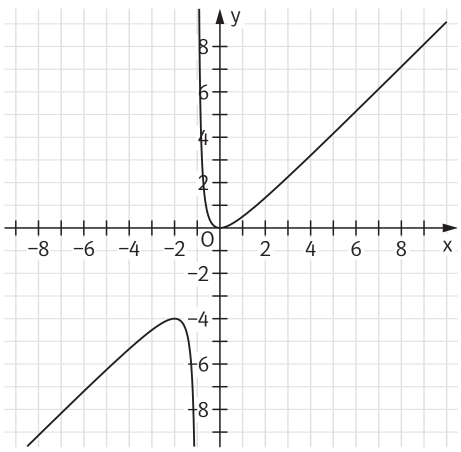
e) $f(x) = 2x^2 \cdot e^{-x}$; $D_f = \mathbb{R}$
einzige (doppelte) Nullstelle für $x = 0$
$f'(x) = 4x \cdot e^{-x} - 2x^2 \cdot e^{-x} = 2x \cdot e^{-x}(2-x)$
$f'(x) = 0$ für $x = 0$ oder $x = 2$
$f'(x) < 0$ für $-\infty < x < 0$;
$f'(x) > 0$ für $0 < x < 2$
$f'(x) < 0$ für $2 < x < +\infty$
$\Rightarrow$ Minimum $(0|0)$; Maximum $(2|8e^{-2})$
$\lim\limits_{x \to +\infty} 2x^2 \cdot e^{-x} = 0$; $y = 0$ ist Asymptote.



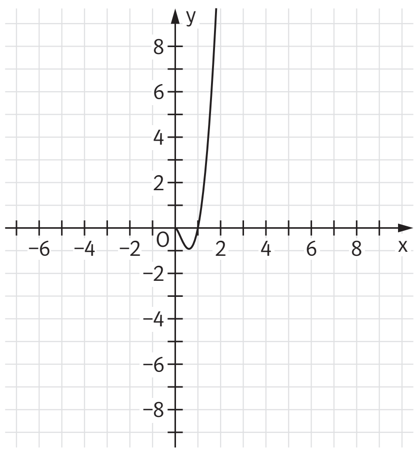
f) $f(x) = 3 \cdot \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$; $D_f = \mathbb{R}$
Nullstellen für $x = \frac{\pi}{4}(2k+1)$ $k \in \mathbb{Z}$
Extremstellen:
$f'(x) = 6 \cdot \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$;
$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2}(k+1)$
Hochpunkte für k gerade
Tiefpunkte für k ungerade
keine Asymptoten



g) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$; $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
einzige doppelte Nullstelle für $x = 0$
$f'(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$;
$f'(x) = 0$ für $x = 0$ oder $x = -2$
$f'(x) > 0$ für $-\infty < x < -2$;
$f'(x) < 0$ für $-2 < x < -1$;
$\Rightarrow$ Maximum $(-2|-4)$
$f'(x) < 0$ für $-1 < x < 0$;
$f'(x) > 0$ für $0 < x < -\infty$;
$\Rightarrow$ Minimum $(0|0)$
$x = -1$ ist senkrechte Asymptote.
$y = x-1$ ist schräge Asymptote
$\left(\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}\right)$.



h) $f(x) = 5x^2 \cdot \ln x$; $D_f = \mathbb{R}^+$
einzige Nullstelle für $x = 1$
$f'(x) = 10x \cdot \ln x + 5x = 5x(2\ln x + 1)$
$f'(x) = 0$ für $x = e^{-\frac{1}{2}}$
$f'(x) < 0$ für $0 < x < e^{-\frac{1}{2}}$;
$f'(x) > 0$ für $e^{-\frac{1}{2}} < x < +\infty$
$\Rightarrow$ Minimum $\left(e^{-\frac{1}{2}} \middle| -2{,}5 \cdot e^{-1}\right)$
keine Asymptoten



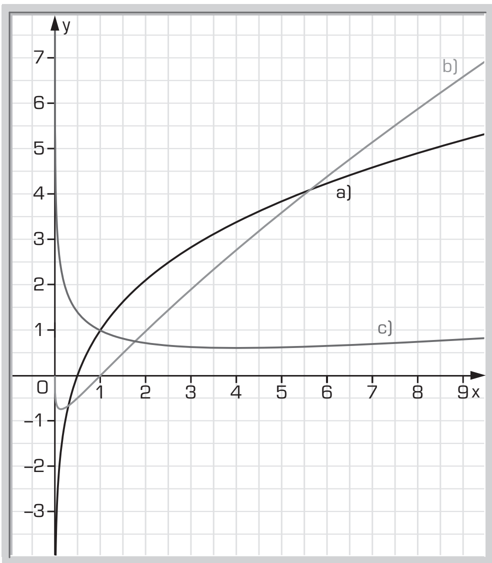
Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

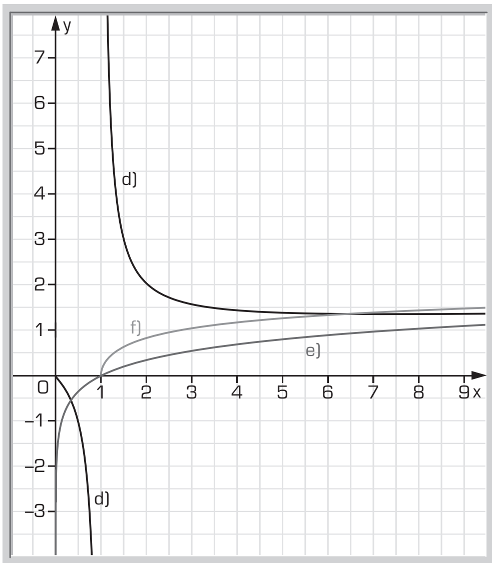
10 $G_1 = G_v$; $v(0) = -4$; G_v ist achsensymmetrisch zur y-Achse; $v(2) \approx -0{,}07$; $v(-2) \approx -0{,}07$
$G_2 = G_p$; $p(0) = 1$; G_p ist achsensymmetrisch zur y-Achse; G_p ist eine Parabel.
$G_3 = G_h$; $h(0) = -1$; $h(1) = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$
$G_4 = G_k$; $k(0) = -4$; keine Nullstellen; G_k ist achsensymmetrisch zur y-Achse;
$k(2) = -1\frac{1}{3}$; $k(-2) = -1\frac{1}{3}$
$G_5 = G_u$; $u(0) = 1$; G_u hat Minimum bei $(0|1)$.
$G_6 = G_f$; $f(0) = 0$; G_f ist achsensymmetrisch zur y-Achse; $W_f = \mathbb{R}_0^+$

11 a) $f'(x) = e^{x-1}$; $F(x) = e^{x+1} + c \quad c \in \mathbb{R}$
b) $f'(x) = 2e^{2x-0{,}5}$; $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x-0{,}5} + c \quad c \in \mathbb{R}$
c) $f'(x) = \ln 2 \cdot e^{(x+2)\cdot \ln 2} = 2^{x+2} \cdot \ln 2$; $F(x) = \frac{1}{\ln 2} e^{(x+2)\cdot \ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \cdot 2^{x+2} + c \quad c \in \mathbb{R}$
d) $f'(x) = \ln 0{,}4 \cdot e^{x \cdot \ln 0{,}4} = 0{,}4^x \cdot \ln 0{,}4$; $F(x) = \frac{1}{\ln 0{,}4} \cdot e^{x \cdot \ln 0{,}4} + 2x + c = \frac{1}{\ln 0{,}4} \cdot 0{,}4^x + 2x + c \quad c \in \mathbb{R}$

12 $f(x) = (x-2)^2 \cdot e^x$
a) f hat bei $x = 2$ eine doppelte Nullstelle, somit hat G_f im Punkt $P(2|0)$ einen Extrempunkt; der linke Graph gehört zu G_f.
b) Der rechte Graph ist der an der y-Achse gespiegelte G_f; also $g\colon x \mapsto (x+2)^2 \cdot e^{-x}$

13 a) $h(x) = \sqrt{x} + \ln x$; $D_h = \mathbb{R}^+$; $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$
b) $h(x) = \sqrt{x} \cdot \ln x$; $D_h = \mathbb{R}^+$; $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$
c) $h(x) = \sqrt{x} - \ln x$; $D_h = \mathbb{R}^+$; $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$
d) $h(x) = \frac{\sqrt{x}}{\ln x}$; $D_h = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$; $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 0$; $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} h(x) = -\infty$; $\lim/x \underset{\to}{>} 1\, h(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \infty$
e) $h(x) = \ln(\sqrt{x})$; $D_h = \mathbb{R}^+$; $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$
f) $h(x) = \sqrt{\ln(x)}$; $D_h = [1; +\infty[$; $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$





14 $f(x) = a \cdot e^{kx}$; $f'(x) = k \cdot a \cdot e^{kx}$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{I.} & f(3) = 3e & \Rightarrow \quad 3e = a \cdot e^{3k} \\ \text{II.} & f'(0) = 1 & \Rightarrow \quad 1 = a \cdot k \end{array}\right\} \quad a = 3;\ k = \frac{1}{3}$$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

S. 167

15 $f(x) = (\ln x)^2$; doppelte Nullstelle für $x = 1$

a) $f'(x) = \frac{2}{x} \cdot \ln x$; $f'(x) = 0$ für $x = 1$; $f'(x) < 0$ für $0 < x < 1$; $f'(x) > 0$ für $1 < x < +\infty$;

$\Rightarrow$ P(1|0) ist Minimum.

b) Gleichung der Ursprungsgeraden: $y = m \cdot x$; $m = f'(x) = \frac{2}{x} \cdot \ln x$

Für Berührpunkt $B\left(x_B \,|\, (\ln x_B)^2\right) \in$ Ursprungsgeraden $\Rightarrow$ $(\ln x_B)^2 = \frac{2}{x_B} \cdot \ln x_B \cdot x_B$

$(\ln x_B)^2 = 2 \cdot \ln x_B$ $\Rightarrow$ $\ln x_B = 0$ oder $\ln x_B = 2$ $\Rightarrow$ $x_B = 1$ oder $x_B = e^2$

$\Rightarrow$ Tangenten: $y = 0$ oder $y = \frac{4}{e^2} \cdot x$

c) $F'(x) = (\ln x)^2 + x \cdot 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} - 2 \cdot \ln x - 2x \cdot \frac{1}{x} + 2 = (\ln x)^2 + 2\ln x - 2\ln x - 2 + 2 = (\ln x)^2$

16 a) z.B. $f(x) = \ln(x-2)$ $[f(x) = \ln(x+4)]$

b) z.B. $f(x) = e^{-x} + 2$ $[f(x) = e^{-x} - 3]$

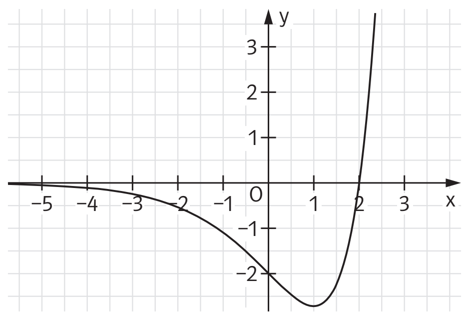
c) z.B. $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$ $\left[f(x) = \frac{\ln x}{x-3}\right]$

d) z.B. $f(x) = e^x + e^{-x}$

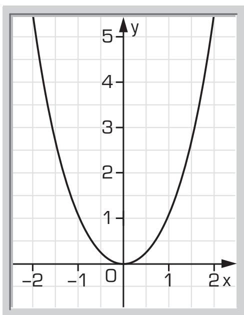
17 a) $f(x) = 0$ für $x = 2$, also Schnittpunkt mit der x-Achse (2|0).
$f(0) = -2$, also Schnittpunkt mit der y-Achse (0|−2).
(Lage der y-Achse und Einheiten siehe Graphik)

b) $f'(x) = e^x + (x-2) \cdot e^x = e^x \cdot (x-1)$;
$f'(x) = 0$ für $x = 1$

$\left.\begin{array}{l} f'(x) < 0 \text{ für } -\infty < x < 1 \\ f'(x) > 0 \text{ für } 1 < x < +\infty \end{array}\right\}$ P(1|−e) ist Tiefpunkt.



18 a)



Erkennbare Merkmale:

1. Achsensymmetrie zur y-Achse: $f(-x) = e^{-x} + e^{-(-x)} - 2 = f(x)$
2. Nullstelle bei (0|0): $f(0) = e^0 + e^0 - 2 = 0$
3. Tiefpunkt bei (0|0): $f'(x) = e^x - e^{-x}$

$f'(x) = 0$ wenn $e^x = e^{-x}$ bzw. $x = -x$

somit Extremstelle bei (0|0)

$\left.\begin{array}{l} f'(x) < 0 \text{ für } -\infty < x < 0 \\ f'(x) > 0 \text{ für } 0 < x < +\infty \end{array}\right\}$ Tiefpunkt bei (0|0)

b) $g(x) = x^2 + ax + b$; $g'(x) = 2x + a$

$\left.\begin{array}{l} g(0) = f(0) = 0 \Rightarrow b = 0 \\ g'(0) = f'(0) = 0 \Rightarrow a = 0 \end{array}\right\}$ gesuchte Funktion: $g(x) = x^2$

19 $L = 10 \cdot \lg \frac{I}{I_0}$;

Flüstern: Einsetzen von $L = 20$ ergibt $2 = \lg\left(\frac{I_{20}}{I_0}\right)$, also $I_{20} = 10^2 \cdot I_0$ oder $I_{20} = 100\, I_0$;

Normale Unterhaltung: Einsetzen von $L = 40$ ergibt $4 = \lg\left(\frac{I_{40}}{I_0}\right)$, also $I_{40} = 10^4 \cdot I_0$ oder $I_{40} = 10\,000\, I_0$.

Damit ist $I_{40} = 100 \cdot I_{20}$, d.h. die Schallintensität ist beim normalen Reden 100-mal größer gegenüber der beim Flüstern.

20 $f_{a;c}(x) = \frac{a}{2c}\left(e^{cx} + e^{-cx}\right)$

a) $f_{a;c}(-x) = \frac{a}{2c}\left(e^{-cx} + e^{-c(-x)}\right) = \frac{a}{2c}\left(e^{-cx} + e^{cx}\right) = f_{a;c}(x)$; Achsensymmetrie zur y-Achse

b) $f'_{a;c}(x) = \frac{a}{2c}\left(e^{cx} - e^{-cx}\right)$; $f'_{a;c}(x) = 0$ für $e^{cx} = e^{-cx}$, also $cx = -cx$, somit $x = 0$

Minimum $\left(0 \,\middle|\, \frac{a}{c}\right)$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern, Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

c) Es muss gelten: I. $f_c(0) = \frac{a}{c} = 5$

II. $f_c(100) = \frac{a}{2c}\left(e^{100c} + e^{-100c}\right) = 30$

aus I: $a = 5c$ eingesetzt in II:

$\frac{5}{2}\left(e^{100c} + e^{-100c}\right) = 30 \quad \Leftrightarrow \quad e^{100c} + e^{-100c} - 12 = 0$

Substitution $u = e^{100c}$:

$u + \frac{1}{u} - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad u^2 - 12u + 1 = 0; \quad u_1 = 6 + \sqrt{35} \approx 11{,}9161;$

$u_2 = 6 - \sqrt{35} \approx 0{,}0839$

$u = e^{100c}$ folgt $c \approx 0{,}0247789$ oder $c \approx -0{,}0247789$

Damit erhält man in beiden Fällen dieselbe Funktion:

$f(x) = 2{,}5 \cdot \left(e^{0{,}024779x} + e^{-0{,}024779x}\right)$

d) $f'(x) = 0{,}061947 \cdot \left(e^{0{,}024779x} + e^{-0{,}024779x}\right)$

$f'(100) = 0{,}73298$; $\tan\varphi = 0{,}73298$ ergibt ein Gefälle von ca. 73 %. $\varphi \approx 36{,}2°$

e) Bedingung: $f(x) = 15$, also $2{,}5 \cdot \left(e^{0{,}024779x} + e^{-0{,}024779x}\right) = 15$

Substitution: $u = e^{0{,}024779x}$: $u + u^{-1} - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad u^2 - 6u + 1 = 0; \; u_1 = 3 + 2\sqrt{2} \approx 5{,}8284$

$u_2 = 3 - 2\sqrt{2} \approx 0{,}17157$

$u = e^{-0{,}024779x}$ folgt: $x \approx 71{,}14$

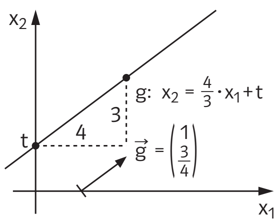
Die Seilhöhe beträgt im Abstand von ca. 71 m, gemessen von der tiefsten Stelle, 15 m.

f) Bedingung: $f'(x) = 0{,}2$, also $0{,}061947 \cdot \left(e^{0{,}024779x} - e^{-0{,}024779x}\right) = 0{,}2$

Daraus erhält man $x \approx 50{,}7$

Ein Stuntman könnte das Seil auf einer Strecke von gut 100 m befahren.

21 a)



Jeder Repräsentant von $\vec{g}$ liegt parallel zur Geraden g. Somit gibt $\vec{g}$ die Richtung der Geraden g an. Ein Steigungsdreieck von g hat die Katheten 4 und 3, also gibt der Vektor $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ die Richtung von g an.

Wegen $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ gilt dies auch für $\vec{g}$.

b) n: $x_2 = -\frac{4}{3} \cdot x_1 + t$; $\quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$; $\quad \vec{n} \circ \vec{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \frac{3}{4} = 1 - 1 = 0$

Die Vektoren $\vec{n}$ und $\vec{g}$ stehen senkrecht aufeinander, somit ist auch die Gerade n senkrecht zur Geraden g.

Die Euler'sche Zahl e

S. 169

1 a) $K_{20} = K_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{20} = 2K_0 \quad \Rightarrow \quad 20\,000\,€ = 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{20}$

$2 = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{20}$

$\Rightarrow \quad p = 100 \cdot \left(\sqrt[20]{2} - 1\right) \approx 3{,}5$

Der Jahreszinssatz beträgt etwa 3,5 %.

b) $K_{20} = K_0 \cdot 1{,}05^{20} = 10\,000\,€ \cdot 1{,}05^{20} \approx 26\,532{,}98\,€$

c) $K_{20} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{7200}\right)^{7200} = 10\,000\,€ \cdot \left(1 + \frac{1}{7200}\right)^{7200} \approx 27\,180{,}93\,€$

2 a) $t_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad n(t_0 + 0) = n(t); \quad n(t_0) = n(0) = 1000$

$n(t) = n(0) + 1{,}75t \cdot n(0) = 1000 + 1750t = 1000(1 + 1{,}75t)$

b) $n(15) = 1000(1 + 1{,}75t \cdot 15) = 27\,250$

3 Es muss gelten: $s_{n+1} - s_n = \frac{1}{(n+1)!} < 10^{-6}$. Dies ist ab $n = 9$ der Fall.

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2