IV Koordinatengeometrie im Raum

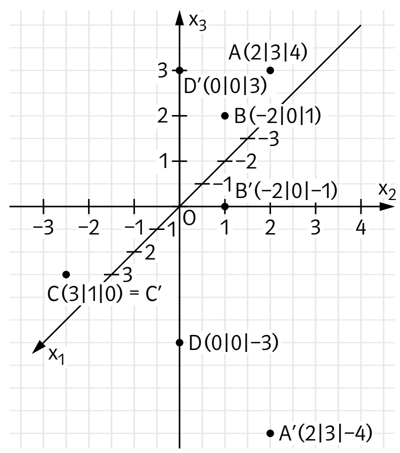
1 Das dreidimensionale Koordinatensystem

S. 90

1 1. Möglichkeit: A: Linke vordere obere Ecke des ganz linken Würfels
B: rechte hintere obere Ecke des ganz rechten Würfels
C: rechte hintere untere Ecke des obersten Würfels
D: linke hintere obere Ecke des obersten Würfels
2. Möglichkeit: Platz des Würfels wird nummeriert, sonst wie 1. Möglichkeit
Bsp. zu A: linke vordere obere Ecke des Würfels in der 1. Etage, erste Reihe, Platz eins.
bei B: rechte hintere obere Ecke des Würfels in der 1. Etage, dritte Reihe, Platz drei.
Um die Angabe nur mit Zahlen machen zu können, muss man zunächst einen festen Ausgangspunkt der Zählung wählen (= Ursprung eines Koordinatensystems).
Dann muss die Bedeutung der einzelnen Zahlen festgelegt werden:
1. Zahl: Anzahl der Schritte nach vorne (+) oder nach hinten (−).
2. Zahl: Anzahl der Schritte nach rechts (+) oder nach links (−).
3. Zahl: Anzahl der Schritte nach oben (+) oder nach unten (−).
Beispiel: Ursprung B, somit ist A(3|−3|0); C(0|−1|1); D(0|−2|2)

S. 91

2



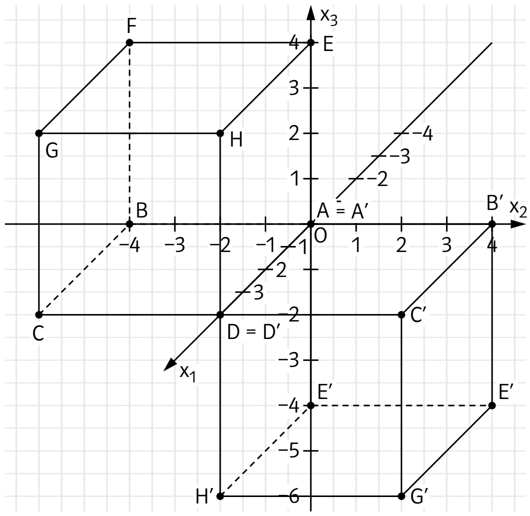
3 a) $x_1 = 0$: Punkte liegen in x_2x_3-Ebene
$x_2 = 0$: Punkte liegen in x_1x_3-Ebene
$x_3 = 0$: Punkte liegen in x_1x_2-Ebene
b) $x_2 = x_3 = 0$: Punkte liegen auf x_1-Achse.
c) $x_1 = x_2 = 1$: Punkte liegen auf einer Parallelen zur x_3-Achse durch den Punkt P(1|1|0).

4 P(2|3|0); Q(4|4|0); $x_3 = 0$; man zeichnet die Parallelen zur x_1- und x_2-Achse durch die Punkte P und Q.
R(0|3|1); S(0|−2|−1); $x_1 = 0$; man zeichnet die Parallelen zur x_2- und x_3-Achse durch die Punkte R und S.
T(2|0|2); U(3|0|−1); $x_2 = 0$; man zeichnet die Parallelen zur x_1- und x_3-Achse durch die Punkte T und U.

5 a) (x_1- und x_2-Koordinaten bleiben); A′(2|0|0); B′(−1|2|1); C′(−2|3|−4); D′(3|4|2)
b) (x_2- und x_3-Koordinaten bleiben); A′(−2|0|0); B′(1|2|−1); C′(2|3|4); D′(−3|4|−2)
c) (x_1- und x_3-Koordinaten bleiben); A′(2|0|0); B′(−1|−2|−1); C′(−2|−3|4); D′(3|−4|−2)
d) (alle Koordinaten verändern ihr Vorzeichen); A′(−2|0|0); B′(1|−2|1); C′(2|−3|−4); D′(−3|−4|2)

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

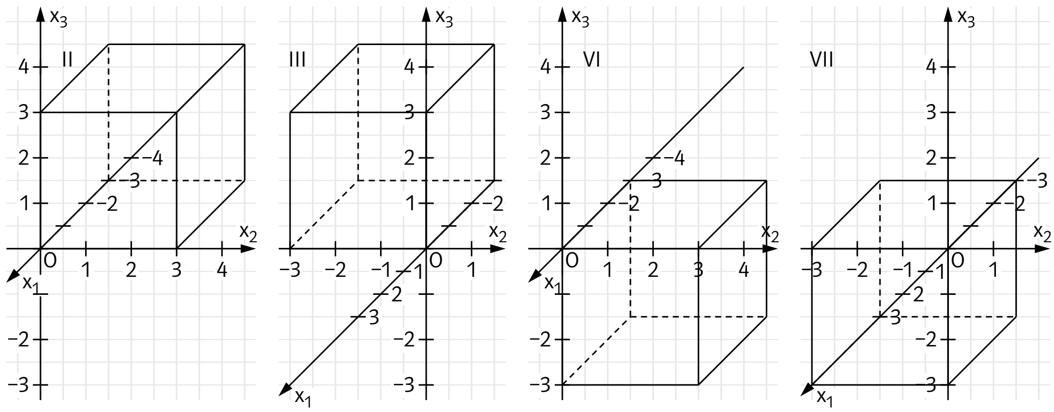
6



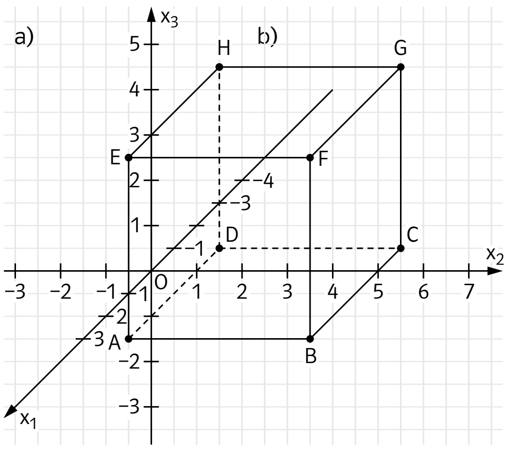
a) C(4|−4|0); F(0|−4|4);
G(4|−4|4); H(4|0|4)

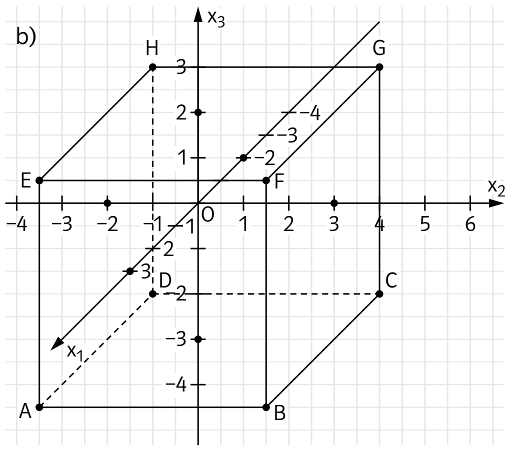
b) B′(0|4|0); C′(4|4|0); E′(0|0|−4);
F′(0|4|−4); G′(4|4|−4); H′(4|0|−4)

7



8





A(5|2|1); B(5|6|1); C(1|6|1); D(1|2|1);
E(5|2|5); F(5|6|5); G(1|6|5); H(1|2|5)
Keine Schnittpunkte der Koordinatenachsen mit den Würfelflächen vorhanden.

A(3|−2|−3); B(3|3|−3); C(−2|3|−3);
D(−2|−2|−3); E(3|−2|2); F(3|3|2);
G(−2|3|2); H(−2|−2|2)

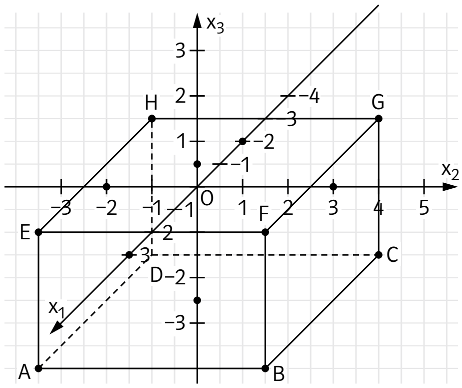
c) Würfel analog wie bei Teilaufgabe b) mit den vorgegebenen Punkten D und F statt B und H.

S. 92

9 Individuelle Lösungen

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

10 a)

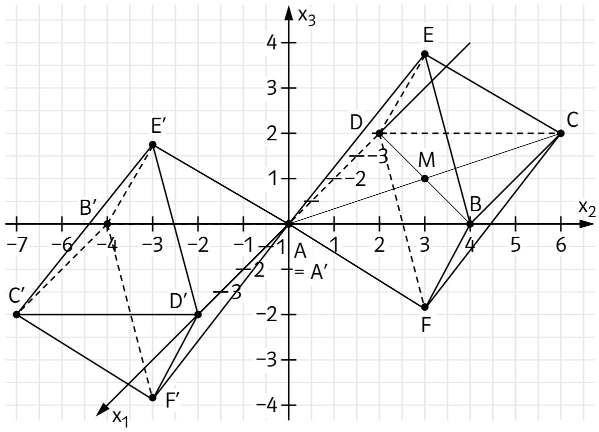


$\overline{AB} = x_2(C) - x_2(E) = 5$; $\overline{AE} = x_3(E) - x_3(C) = 3$;
$\overline{AD} = x_1(E) - x_1(C) = 5$

b) $A(3|-2|-2{,}5)$; $B(3|3|-2{,}5)$; $C(-2|3|-2{,}5)$; $D(-2|-2|-2{,}5)$; $E(3|-2|0{,}5)$; $F(3|3|0{,}5)$; $G(-2|3|0{,}5)$; $H(-2|-2|0{,}5)$

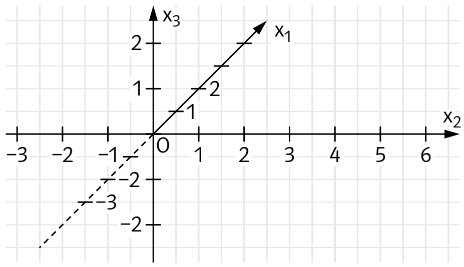
11 a) $M(-2|2|0)$

c)

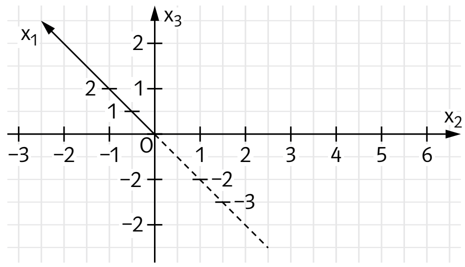


b) $\overline{ME} = MA = \frac{1}{2}\overline{AC} = 2\sqrt{2}$
$E(-2|2|2\sqrt{2})$; $F(-2|2|-2\sqrt{2})$

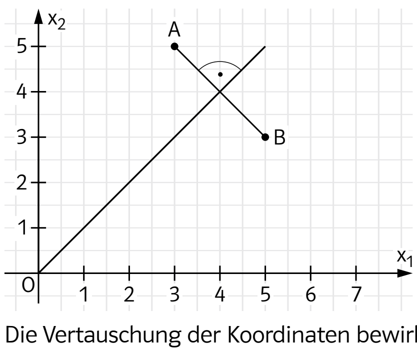
12 Blick von links unten in den VIII. Quadranten;



Blick von rechts unten in den V. Quadranten



13 a)

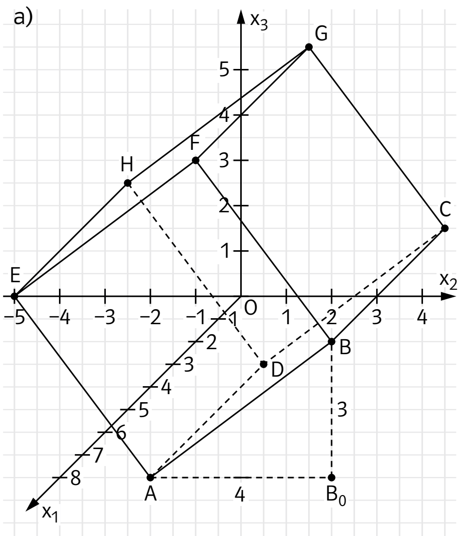


Die Vertauschung der Koordinaten bewirkt eine Spiegelung an der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten.

b) Die Punkte $A(3|5|2)$ und $B(5|3|2)$ sind symmetrisch zur winkelhalbierenden Ebene des I. Oktanten (bzw. III. bzw. V. bzw. VII. Oktanten).

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern, Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

14 a)



b) A und B haben gleiche x_1-Koordinaten, also gilt: $[AB] \parallel x_2x_3$-Ebene.
A und D haben gleiche x_2- bzw. x_3-Koordinaten, also gilt: $[AD] \parallel x_1$-Achse.
Da $[AE] \perp [AD]$ gilt, muss $[AE] \parallel x_2x_3$-Ebene sein.
Somit sind die Würfelflächen ABFE und DCGH parallel zur x_2x_3-Ebene.

c) $\overline{AB} = \sqrt{(6-2)^2 + (3-0)^2} = 5$; $\overline{AD} = 5$

d) Das Quadrat ABFE mit der Seitenlänge 5 LE ist auch im Schrägbild unverzerrt.
Dreht man das Steigungsdreieck AB_0B um 90° gegen den Uhrzeigersinn, so ergibt sich für die Koordinaten von E:
$e_2 = 2 - 3 = -1$; $e_3 = 0 + 4 = 4 \Rightarrow E(8\,|\,-1\,|\,4)$

e) $C(3\,|\,6\,|\,3)$; $F(8\,|\,3\,|\,7)$; $G(3\,|\,3\,|\,7)$; $H(3\,|\,-1\,|\,4)$

15 $\alpha_1 + \alpha_2 + \varepsilon = 180°$; (Stufenwinkel an parallelen Geraden)
$\alpha_1 = 180° - 142° - 15{,}6° = 22{,}4°$
$\alpha_1 + \alpha_2 + \beta + \frac{1}{3}\beta = 180°$ (Winkelsumme im Dreieck)
$\beta = (180° - 22{,}4° - 15{,}6°) \cdot \frac{3}{4} = 106{,}5° \Rightarrow \delta = \frac{1}{3} \cdot 106{,}5° = 35{,}5°$

16 $ax^2 = -x^2 - 4x - 3 \Rightarrow (a+1) \cdot x^2 + 4x + 3 = 0$
Die Gleichung hat nur eine Lösung für $D = 16 - 12 \cdot (a+1) = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$
$\frac{1}{3}x^2 = -x^2 - 4x - 3 \Rightarrow \frac{4}{3}x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow 4x^2 + 12x + 9 = 0 \Rightarrow (2x+3)^2 = 0$
$\Rightarrow x = -1{,}5$; $y = 0{,}75$; $B(-1{,}5\,|\,0{,}75)$.

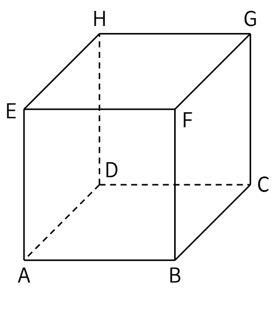
2 Vektoren

S. 93

1 a) Die Pfeile sind parallel, gleich lang und gleich gerichtet.
b) Die Pfeile symbolisieren die Geschwindigkeit des Flugzeugs. Es genügt, einen Pfeil zu zeichnen.
c) Man kann die Flugrichtung mitteilen. Es fehlt die Angabe des Betrags der Geschwindigkeit.

S. 95

2

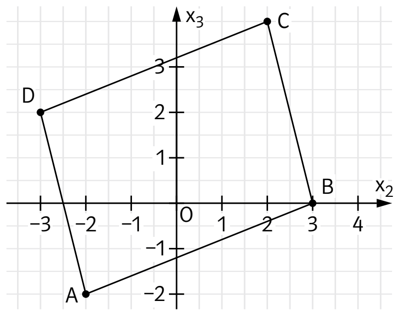


a) von jeder Ecke aus kann man sieben Pfeile zu den anderen Ecken zeichnen. Es gibt also $7 \cdot 8 = 56$ Pfeile.

b) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$; $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{GH}$; $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$;
$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{HE} = \overrightarrow{GF}$; $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DH}$; $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{HD}$;
$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BG}$; $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{GB}$; $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EG}$; $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{GE}$; $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DG}$; $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{GD}$;
$\overrightarrow{AG}$; $\overrightarrow{GA}$; $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{FH}$; $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{HF}$; $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CH}$; $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{HC}$; $\overrightarrow{BH}$; $\overrightarrow{HB}$;
$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DE}$; $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{ED}$; $\overrightarrow{CE}$; $\overrightarrow{EC}$; $\overrightarrow{DF}$; $\overrightarrow{FD}$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

3 a)



b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3+2 \\ 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -3+2 \\ 2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2-3 \\ 4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 2+3 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

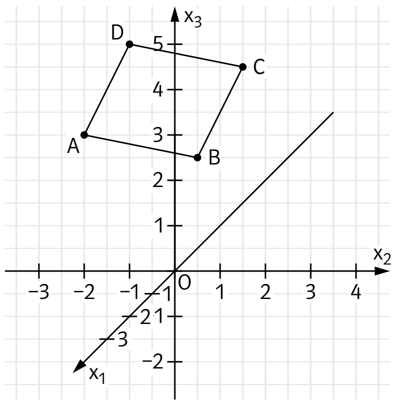
Das Viereck ist ein Parallelogramm.

4 a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 4-0 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 1-3 \\ 0-4 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

c) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

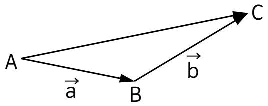
5



$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1+2 \\ 1+3 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

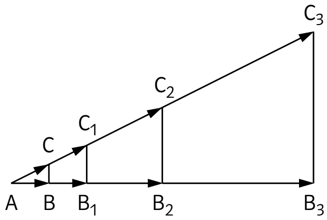
$\overline{DC} = \begin{pmatrix} 1+2 \\ 2+2 \\ 5-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

6



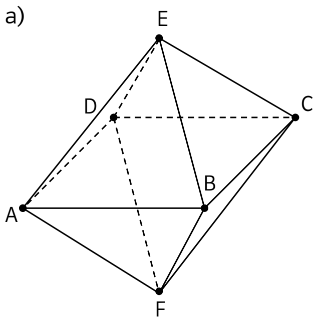
Die Aussage ist falsch.
Die Längen der Pfeile, die $\vec{a}$ und $\vec{b}$ repräsentieren, sind zusammen mindestens so lang wie der Pfeil zu $\overrightarrow{AC}$. (Dreiecksungleichung)

7



$A_{AB_4C_4} = 4^4 \cdot A_{ABC} = 256 \cdot A_{ABC}$

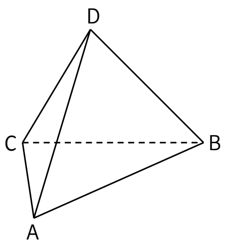
8 a)



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{FC}$; $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{EC}$
$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CF}$; $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{CE}$
$\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{FD}$; $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{ED}$; $\overrightarrow{EF}$
$\overrightarrow{DB}$; $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{DF}$; $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{FB}$; $\overrightarrow{FE}$
(18 verschiedene Vektoren)

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

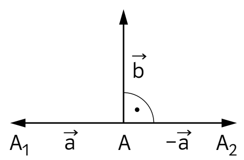
b)



$\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AD}$
$\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BD}$
$\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{CD}$
$\overrightarrow{DA}$; $\overrightarrow{DB}$; $\overrightarrow{DC}$
(12 verschiedene Vektoren)

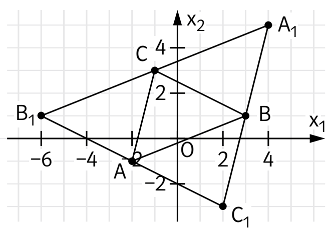
9 a) Der Springer kann 8 verschiedene Züge machen, der Turm 14 verschiedene Züge (7 waagerecht, 7 senkrecht).
b) Individuelle Lösungen.

10



Für ein gleichschenkliges Dreieck A_1A_2B muss der Pfeil für $\vec{b}$ senkrecht zum Pfeil für $\vec{a}$ sein.
Für ein gleichseitiges Dreieck muss die Länge des Pfeils für $\vec{b}$ $\sqrt{3}$ mal so lang sein wie der Pfeil für $\vec{a}$.

11



$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \overrightarrow{BA_1}$; $A_1(4|5)$
$\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \overrightarrow{BC_1}$; $C_1(2|-3)$
$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB_1}$; $B_1(-6|1)$

12 a) $\sqrt{125} - \sqrt{98} - \sqrt{45} - 3\sqrt{8} - \sqrt{5} = 5\sqrt{5} - 7\sqrt{2} - 3\sqrt{5} - 6\sqrt{2} - \sqrt{5} = \sqrt{5} - 13\sqrt{2}$.
b) $\sqrt{\frac{1{,}47ac^4d^2}{b}} : \sqrt{3\frac{ac}{b^2}} = \sqrt{\frac{1{,}47ac^4d^2 \cdot b^2}{3abc}} = \sqrt{0{,}49 \cdot bc^3d^2} = 0{,}7c \cdot d \cdot \sqrt{bc}$, falls $a, b, c, d > 0$
c) $\sqrt{x^4y^5 - x^2y^7} = \sqrt{x^2y^5 \cdot (x^2 - y^2)} = x \cdot y^2 \cdot \sqrt{y(x^2 - y^2)}$

13

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
Gradmaß	15°	435°	480°	135°	225°	−315°	−690°	345°
Bogenmaß	$\frac{\pi}{12} \approx 0{,}26$	$\frac{29}{12}\pi \approx 7{,}59$	$\frac{8}{3}\pi \approx 8{,}38$	$\frac{3}{4}\pi \approx 2{,}36$	$\frac{5}{4}\pi \approx 3{,}93$	$-\frac{7}{4}\pi \approx -5{,}50$	$-\frac{23}{6}\pi \approx -12{,}04$	$\frac{23}{12}\pi \approx 6{,}02$

3 Addition und Subtraktion von Vektoren

S. 96

1 A nach B: Gehe 1 nach rechts in x_1-Richtung, 2 nach unten in x_2-Richtung.
B nach C: Gehe 4 nach rechts in x_1-Richtung, 1 nach oben in x_2-Richtung.
A nach C: Gehe 5 nach rechts in x_1-Richtung, 1 nach unten in x_2-Richtung.
Für die Bewegung von A nach C in x_1- und x_2-Richtung müssen die Befehle für die Bewegung von A nach B und von B nach C addiert werden.

S. 98

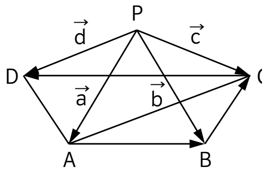
2 $\overrightarrow{AG} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$; $\overrightarrow{CE} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$; $\overrightarrow{FH} = -\vec{a} + \vec{c}$; $\overrightarrow{BF} = \vec{b}$; $\overrightarrow{DG} = \vec{b} - \vec{c}$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

3 a) $\overrightarrow{PR}$ b) $\vec{0}$ c) $\overrightarrow{PG} - \overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ d) $\overrightarrow{RP}$

e) $\overrightarrow{PS}$ f) $\overrightarrow{RQ}$ g) $\vec{B}$ h) $\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{RS} - \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{SR} + \overrightarrow{RP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SQ}$

4



$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$; $\overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b}$

$\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a}$; $\overrightarrow{CA} = \vec{a} - \vec{c}$

$\overrightarrow{AD} = \vec{d} - \vec{a}$; $\overrightarrow{DA} = \vec{a} - \vec{d}$

$\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}$; $\overrightarrow{CB} = \vec{b} - \vec{c}$

$\overrightarrow{CD} = \vec{d} - \vec{c}$; $\overrightarrow{DC} = \vec{c} - \vec{d}$

5 a) $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix}$

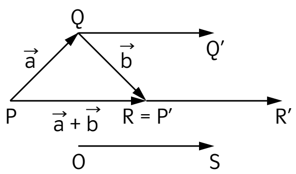
6 $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \vec{A}$; $\vec{A} = \vec{B} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

a) $B(4|-2|6)$ b) $B(19|10|34)$ c) $A(-19|12|28)$ d) $A(31|-70|-184)$

7 a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 16 \\ -2 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

8



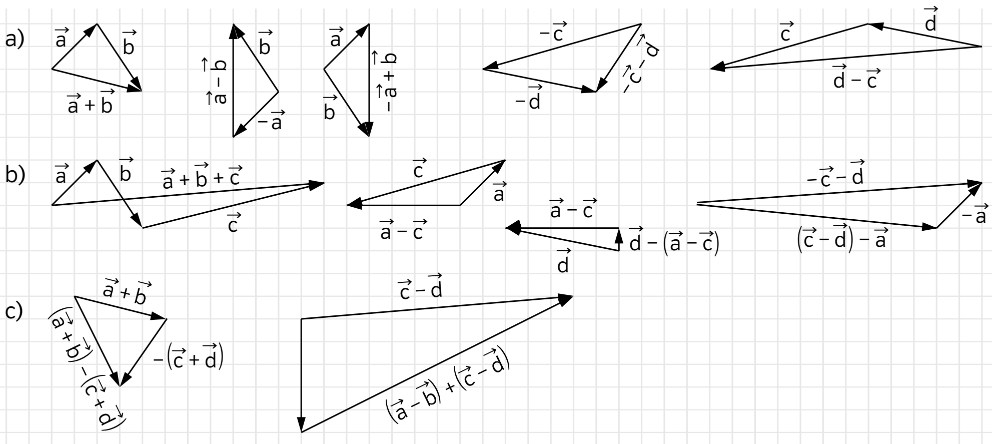
a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -12 \\ 10 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \\ -14 \end{pmatrix}$; $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow S(0|-1|-4)$

$Q'(3|-6|5)$; $P' = R = (2|6|-5)$; $R'(2|5|-9)$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 13 \\ -3 \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 12 \end{pmatrix}$; $a + b = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow S(-6|6|9)$

$Q'(2|19|4)$; $P' = R(5|6|7)$; $R'(-1|12|16)$

9



10 a) $C(1|6|-1)$; $D(1|2|-1)$; $E(3|2|2)$; $F(3|6|2)$; $G(1|6|2)$

b) $M(3|2|0{,}5)$; $N(2|6|-1)$; $S(1|4|2)$;

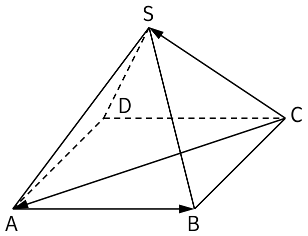
$\overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{MS} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{NS} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

S. 99

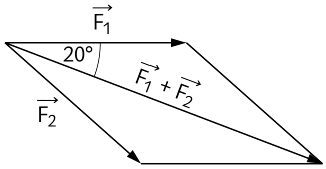
11 $\vec{a} = \vec{y} - \vec{z}$; $\vec{b} = -\vec{x} - \vec{y} + \vec{z}$; $\vec{c} = \vec{x} + \vec{y}$

12

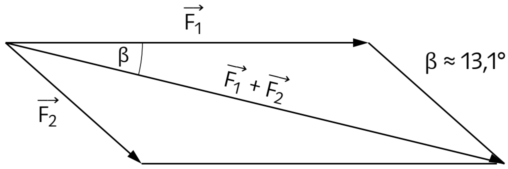


$\overrightarrow{CS} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AS}$
$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{CS} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AS}$

13 a) gleiche Kraft:



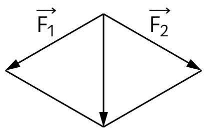
doppelte Kraft:



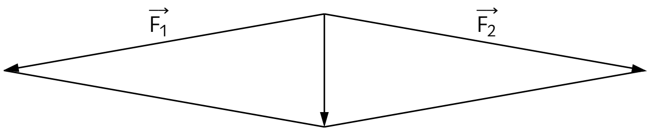
$\beta \approx 13{,}1°$

b) Beim Winkel 180° wird der Mann mit der geringsten Kraft gezogen, weil die Kräfte entgegenwirken.

14

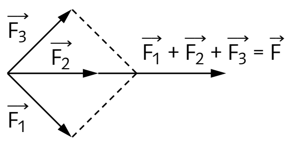


50 N
$\alpha = 120°$



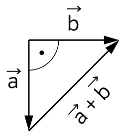
50 N
$\alpha = 160°$

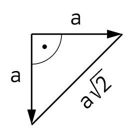
15



Der Pfeil für $\vec{F}$ ist $(1 + \sqrt{2})$ mal so lang wie die Pfeile für $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ und $\vec{F_3}$.
Die Pfeile für die Kräfte der Hobbysportler sind $\frac{1 + \sqrt{2}}{3} \approx 0{,}805$ mal so lang wie die Pfeile der Profisportler.
Jeder Hobbysportler muss mit mindestens 80,5% der Kraft des Profisportlers ziehen, damit die Gruppe nicht verliert.

16





Die Repräsentanten von a und b schließen einen Winkel von 90° ein.

17 a) $f(x) = -2 \cdot (x+2)(x-2)$; $x_1 = -2$; $x_2 = 2$ b) $g(x) = 4 \cdot (x+1)(x-2)$; $x_1 = -1$; $x_2 = 2$
c) $k(x) = x \cdot (x-1)^2$; $x_1 = 0$; $x_2 = 1$
d) $h(x) = 2x^2 \cdot (x + \sqrt{10})(x - \sqrt{10})$; $x_1 = 0$; $x_2 = \sqrt{10}$; $x_3 = -\sqrt{10}$
e) $s(x) = 10x^3 \cdot (x^2 + 4)$; $x_1 = 0$ f) $d(x) = x \cdot (x-1)(x-2)^2$; $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$
g) $f(x) = 5x^2 \cdot (x+3)(x-3)$; $x_1 = 0$; $x_2 = -3$; $x_3 = 3$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

18 a) I $\frac{2}{3}x - 5y + 1 = 0$; II $\frac{1}{3}x = y + 1$

$$\begin{array}{lrl} \text{I} & \frac{2}{3}x - 5y + 1 = 0 & \\ \text{II} & \frac{1}{3}x - y - 1 = 0 & \\ \hline \text{I} - 2\cdot\text{II:} & -3y + 3 = 0 & \Rightarrow \; y = 1;\; x = 6 \end{array}$$

b) I $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 5$; II $\frac{x}{4} - 4 = \frac{2y}{3}$

$$\begin{array}{lrl} \text{I} & \frac{x}{2} - \frac{y}{3} - 5 = 0 & \\ \text{II} & \frac{x}{4} - \frac{2y}{3} - 4 = 0 & \\ \hline 2\text{I} - \text{II} & \frac{3}{4}x \quad - 6 = 0 & \Rightarrow \; x = 8;\; y = -3 \end{array}$$

19 $P(E) = 1 - P(E) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0{,}52$
(E: Mindestens ein Würfel zeigt die Augenzahl 6.)

4 Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl (S-Multiplikation)

S. 100

1 a) $\frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \frac{r}{1}$ $r > 0$ (Strahlensatz) $\Rightarrow$ $\overline{OQ} = r \cdot \overline{OP}$

b) $\overrightarrow{OQ'} = -\overrightarrow{OQ}$; der Repräsentant von $\overrightarrow{OQ'}$ ist auch r-mal so lang wie der Repräsentant von $\overrightarrow{OP}$.
$\overrightarrow{OQ'} = -r\overrightarrow{OP}$.

S. 101

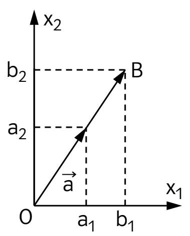
2 a) $\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -0{,}4 \\ 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2ac \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 4 \\ -\frac{6}{5} \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -33 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} -7{,}5 \\ -8{,}25 \\ -9 \end{pmatrix}$

3 a) $\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 50 \\ 4 \\ 15 \end{pmatrix}$ c) $4\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ d) $\frac{1}{24}\begin{pmatrix} 288 \\ -20 \\ -3 \end{pmatrix}$

S. 102

4 a) $\begin{pmatrix} -3 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 16 \\ 10 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -1{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 7{,}5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0{,}5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10{,}5 \\ 5 \end{pmatrix}$

5 a)

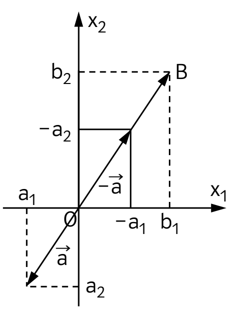


$\vec{b} = r\cdot\vec{a} \;\Rightarrow\; \overrightarrow{OB} = r \cdot \overline{OA}$

$\frac{b_1}{a_1} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{r}{1} \;\Rightarrow\; b_1 = r\cdot a_1$ (Strahlensatz)
$b_2 = r\cdot a_2$ (Beweis analog)

$\left.\begin{array}{l} \vec{b} = r\cdot\vec{a} = r\cdot\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \\ \vec{b} = \begin{pmatrix} r\cdot a_1 \\ r\cdot a_2 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$ Behauptung.

b)



$\vec{b} = r\cdot\vec{a}$, $r < 0$ lässt sich durch $b = (-r)\cdot(-\vec{a})$
auf den in Teilaufgabe a) begründeten Fall zurückführen.

Es gilt also: $r\cdot\vec{a} = (-r)\cdot(-\vec{a})$ und damit

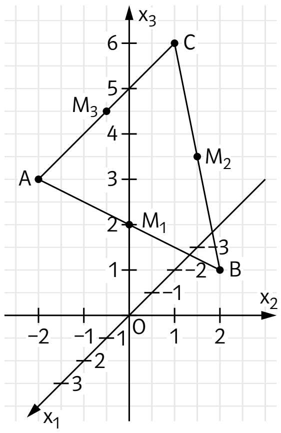
$r\cdot\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = (-r)\cdot\begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\cdot(-a_1) \\ -r\cdot(-a_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_1 \\ ra_2 \end{pmatrix}$

6 a) $x = 4$ b) $x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ c) nicht lösbar d) $x = -\frac{1}{2}$ e) $x = 20$ f) $x = 6$

7 $\vec{M} = \vec{A} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \vec{A} + \frac{1}{2}(\vec{B} - \vec{A}) = \vec{A} + \frac{1}{2}\vec{B} - \frac{1}{2}\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{A} + \frac{1}{2}\vec{B} = \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{B})$.

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

8 a)



$\overrightarrow{M_{AB}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2+3 \\ -3+3 \\ 2+2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad M_1 = (0\,|\,0\,|\,2)$

$\overrightarrow{M_{AC}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2-4 \\ -3-1 \\ 2+4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad M_2 = (-3\,|\,-2\,|\,3)$

$\overrightarrow{M_{BC}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2-4 \\ 3-1 \\ 2+4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad M_3 = (-1\,|\,1\,|\,3)$

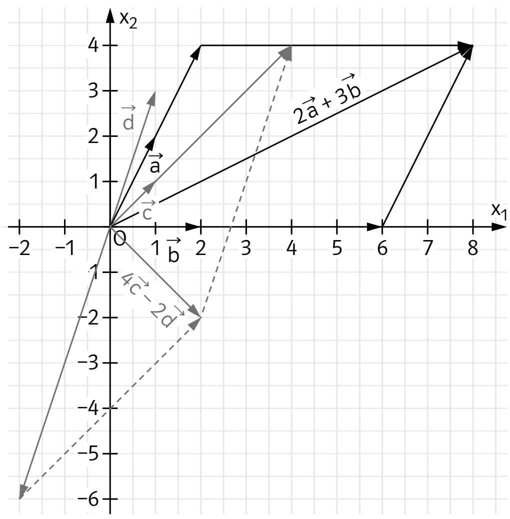
b) [AB] ist parallel zur x_1x_2-Ebene.

9 a) $\vec{0}$ b) $22{,}8\vec{a} + 8{,}4\vec{b} - 12{,}1\vec{c}$ c) $4\vec{a} + 3\vec{b}$ d) $9\vec{a} + 6\vec{b}$ e) $2\vec{u} - 10\vec{v}$

10 a) + b)

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$;

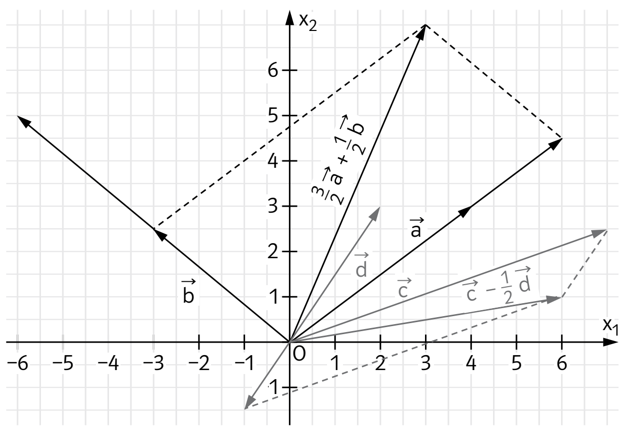
$\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$



c) + d)

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix}$;

$\vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$; $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$



11 a) richtig, da $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ b) falsch; $\vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$ c) falsch; $\vec{0} \cdot \vec{a} = \vec{0}$

d) richtig, siehe c) e) falsch; $\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A}$ f) falsch; $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

12 $a = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $c = \begin{pmatrix} -2 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$; $d = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

a) $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -6 \\ 4{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 16{,}5 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4{,}5 \end{pmatrix}$

Die Zeichnungen sind analog zu Aufgabe 10 auszuführen.

S. 103

13 $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$; $\overrightarrow{CB} = \vec{a}$; $\vec{c} = \overrightarrow{AB} = \vec{a} - \vec{b}$ $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\vec{c}$

Somit gilt auch $\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{AB}$.

14 a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0{,}5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4{,}5 \\ 6 \end{pmatrix}$

c) $\vec{x} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

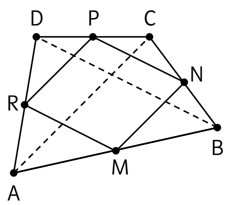
15 Individuelle Lösungen

16 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA}$; $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}$; $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB}$;

$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SC}$;

$\overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB}$

17 a)



(1) $[MN] \parallel [AC] \parallel [RP]$
(2) $[MR] \parallel [BD] \parallel [NP]$
} Satz über Mittellinie im Dreieck

aus (1) und (2) $\Rightarrow$ Viereck MNPR ist ein Parallelogramm.

b) $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ und $\vec{D}$ sind die Ortsvektoren der Eckpunkte A, B, C und D des Vierecks.

(1) $\overrightarrow{MN} = \vec{N} - \vec{M} = \frac{1}{2}(\vec{B} + \vec{C}) - \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{B}) = \frac{1}{2}(\vec{C} - \vec{A})$
(2) $\overrightarrow{RP} = \vec{P} - \vec{R} = \frac{1}{2}(\vec{C} + \vec{D}) - \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{D}) = \frac{1}{2}(\vec{C} - \vec{A})$
} $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{RP}$ $\Rightarrow$ Viereck MNPR ist ein Parallelogramm.

c) Die Überlegungen bzw. Rechnungen gelten für Vektoren im Raum ebenfalls, denn es wurden für sie keinerlei Einschränkungen gemacht.

18 a) $\triangle ABD$ ist rechtwinklig (Thaleskreis) $A_{ABCD} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 5\right) = 60$

b) $\overline{AB} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$; $A_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot h = 30$ $\Rightarrow$ $h = \frac{60}{13}$

c) Schnittpunkt der Diagonalen sei N. Der Schnittpunkt S der Winkelhalbierenden des Winkels BNC mit [BC] hat von den Diagonalen den gleichen Abstand. Ist das Parallelogramm ABCD ein Rechteck, so halbiert S die Seite [BC].

19 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3 = \frac{1}{2}(x+2)^2 + 1$; $S(-2\,|\,1)$

Die Parabel ist mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ gestreckt und nach oben geöffnet.

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

5 Betrag von Vektoren, Länge von Strecken

S. 104

1 $\overline{PQ} = \sqrt{(7-3)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{41}$

2 a) $d = \sqrt{10^2+4^2} = \sqrt{116}$ b) $D = \sqrt{116+5^2} = \sqrt{141}$

S. 105

3 $|\vec{a}| = \sqrt{5}$ $\vec{a_0} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$; $|\vec{b}| = 5$ $\vec{b_0} = \begin{pmatrix}0{,}6\\0{,}8\end{pmatrix}$; $|\vec{c}| = \sqrt{29}$ $\vec{c_0} = \frac{1}{\sqrt{29}}\begin{pmatrix}-2\\-5\end{pmatrix}$;

$|\vec{d}| = \sqrt{5}$ $\vec{d_0} = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}8\\-0{,}6\end{pmatrix}$; $\vec{x} = \sqrt{29}$ $\vec{x_0} = \frac{1}{\sqrt{29}}\begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix}$;

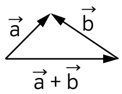
$|\vec{y}| = 7$ $\vec{y_0} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}3\\-2\\6\end{pmatrix}$; $|\vec{u}| = 0{,}3$ $\vec{u_0} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ $|\vec{v}| = \sqrt{10}$ $\vec{V_0} = \begin{pmatrix}\sqrt{0{,}2}\\\sqrt{0{,}3}\\\sqrt{0{,}5}\end{pmatrix}$

4 a) $\overline{AB} = \sqrt{65}$; $\overline{AC} = \sqrt{130}$; $\overline{BC} = \sqrt{65}$ Dreieck ABC ist gleichschenklig
b) $\overline{AB} = \sqrt{181}$; $\overline{AC} = \sqrt{185}$; $\overline{BC} = \sqrt{178}$
c) $\overline{AB} = \sqrt{21}$; $\overline{AC} = 3$; $\overline{BC} = \sqrt{8}$
d) $\overline{AB} = \sqrt{13}$; $\overline{AC} = \sqrt{13}$; $\overline{BC} = \sqrt{14}$ Dreieck ABC ist gleichschenklig

5 $\overline{PQ} = \sqrt{1^2+2^2+(p-5)^2} = 3 \Rightarrow (p-5)^2 = 4$; (1) $p-5 = 2 \Rightarrow p = 7$ $P_1(5|0|7)$
(2) $p-5 = -2 \Rightarrow p = 3$ $P_2(5|0|3)$

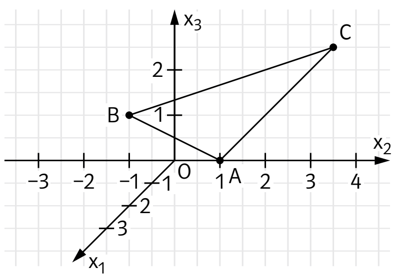
6 $\vec{u} = r\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix}r\cdot v_1\\r\cdot v_2\\r\cdot v_3\end{pmatrix}$; $|\vec{u}| = \sqrt{(r\cdot v_1)^2 + (r\cdot v_2)^2 + (r\cdot v_3)^2} = |r|\cdot|\vec{v}|$

7



$|\vec{a}+\vec{b}| \leq |\vec{a}|+|\vec{b}|$

8 a)



b) $\overline{AB} = \sqrt{4+1+4} = 3$;
$\overline{AC} = \sqrt{1+4+4} = 3$;
$\overline{BC} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$;
$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$
Das Dreieck ABC ist gleichschenklig rechtwinklig.

9 $\overline{OA} = 4$; $\overline{OB} = \sqrt{4+b^2} = 4 \Rightarrow b^2 = 12$; $b_1 = 2\sqrt{3}$; $b_2 = -2\sqrt{3}$
$\overline{AB} = \sqrt{4+b^2} = 4 \Rightarrow b_1 = 2\sqrt{3}$; $b_2 = -2\sqrt{3}$
Für $b_1 = 2\sqrt{3}$ und $b_2 = -2\sqrt{3}$ ist das Dreieck OAB gleichseitig.

10 $\overline{XM} = \sqrt{(4-x_1)^2 + (1-x_2)^2 + (-1-x_3)^2} = 3 \Rightarrow (4-x_1)^2 + (1-x_2)^2 + (-1-x_3)^2 = 9$
Mögliche Lösungen: (2|0|1); (6|0|−3); (3|3|1)

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

11 a) $AC_k = \sqrt{(1+3k)^2 + (1{,}5+2k)^2 + (3-2k)^2} = \sqrt{12{,}25+17k^2}$

$BC_k = \sqrt{(-1+3k)^2 + (-1{,}5+2k)^2 + (-3-2k)^2} = \sqrt{12{,}25+17k^2}$ $\Rightarrow$ $\overline{BC_k} = \overline{AC_k}$ für alle $k \in \mathbb{R}$

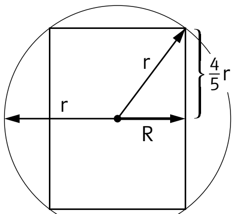
b) $\overline{AB} = \sqrt{2^2+3^2+6^2} = 7$

$AC_k = 7 \Rightarrow 17k^2+12{,}25 = 49 \Rightarrow k^2 = \frac{36{,}75}{17}$; $k_1 \approx 1{,}47$; $k_2 \approx -1{,}47$

Für $k_1 \approx 1{,}47$ oder $k_2 \approx -1{,}47$ ist das Dreieck ABC_k gleichseitig.

c) Wenn das Dreieck ABC_k gleichschenklig ist, muss C_k auf der Mittelsenkrechten zu [AB] liegen.

12



r = Kugelradius; R = Zylinderradius

$\frac{h}{r} = \frac{8}{5} \Rightarrow h = \frac{8}{5}r$

$R^2 + \left(\frac{4}{5}r\right)^2 = r^2 \Rightarrow R^2 = \frac{9}{25}r^2 \Rightarrow R = \frac{3}{5}r$

$V_K = \frac{4}{3}r^3\pi$; $V_Z = \left(\frac{3}{5}r\right)^2 \cdot \frac{8}{5}r = \frac{72}{125}r^3\pi$

$\frac{V_Z}{V_K} = \frac{72 \cdot 3}{125 \cdot 4} = \frac{54}{125} = 0{,}432$

Der Zylinder füllt 43,2 % des Kugelraumes aus.

13 a) $A(0|-3)$; $B(3|0) \Rightarrow g_{AB}: y = x-3$

b) Parabelgleichung: $f(x) = ax^2+bx+c$

$A \in G_f \Rightarrow c = -3$

$B \in G_f \Rightarrow 9a+3b-3 = 0 \Rightarrow b = -3a+1$

Zur Bestimmung der 3. Variablen fehlt noch die Angabe eines Punktes des Graphen.

$f(x) = ax^2+(-3a+1)x-3$

$C(2|1) \in G_f \Rightarrow 4a+(1-3a)\cdot 2-3 = 1 \Rightarrow a = -1$

$f(x) = -x^2+4x-3$

14 $f(x) = \frac{(x^2-3x-1)\cdot(2x+1)}{2x+1} = x^2-3x-1$ für $x \neq -\frac{1}{2}$

G_f ist eine Parabel mit dem Loch $\left(-\frac{1}{2}\middle|\frac{3}{4}\right)$.

$y = x^2-3x-1 = (x-1{,}5)^2-3{,}25$; $S(1{,}5|-3{,}25)$

6 Skalarprodukt von Vektoren, Größe von Winkeln

S. 106

1 a) $\sin 37{,}35° = \frac{h}{3{,}5} \Rightarrow h = 3{,}5 \cdot \sin 37{,}35° \approx 2{,}12$

$\cos 37{,}35° = \frac{x}{3{,}5} \Rightarrow x = 3{,}5 \cdot \cos 37{,}35° \approx 2{,}78$

$a^2 = (c-x)^2 + h^2 \Rightarrow a = \sqrt{(4{,}8-2{,}78)^2 + 2{,}12^2} = 2{,}93$

b) $a = \sqrt{|\vec{b}|^2 \cdot \sin^2\alpha + (|\vec{c}| - |\vec{b}| \cdot \cos\alpha^2)} = \sqrt{|\vec{b}|^2 \cdot \sin^2\alpha + |\vec{c}|^2 - 2\cdot|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cdot\cos\alpha + |\vec{b}|^2\cdot\cos^2\alpha}$

$\sqrt{|\vec{b}|^2 \underbrace{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}_{=1} + |\vec{c}|^2 - 2\cdot|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cdot\cos\alpha} = \sqrt{|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2\cdot|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cdot\cos\alpha}$

S. 108

2 a) −4 b) −12 c) −2 d) 0

3 a) 3 b) 5 c) 0 d) 8 e) −2 f) 12

4 a) $\cos\alpha \approx -0{,}355 \Rightarrow \alpha \approx 110{,}79°$ b) $\cos\alpha \approx 0{,}414 \Rightarrow \alpha \approx 65{,}56°$

5 $\vec{a} \circ \vec{d} = 2\cdot 2\cdot \cos 120° = -2$; $\vec{a} \circ \vec{g} = 2\cdot 4\cdot \cos 60° = 4$; $\vec{d} \circ \vec{g} = 2\cdot 4\cdot \cos 60° = 4$;

$\vec{e} \circ \vec{g} = 2\cdot 4 = 8$; $\vec{b} \circ \vec{e} = 2\cdot 2 = 4$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

6 a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$; $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{13}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$; $|\overrightarrow{AC}| = 2\sqrt{2}$; $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$; $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{17}$

$\alpha = 78{,}7°$; $\beta = 42{,}3°$; $\gamma = 59{,}0°$

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \end{pmatrix}$; $|\overrightarrow{AB}| = 3\sqrt{13}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$; $|\overrightarrow{AC}| = 2\sqrt{17}$; $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -7 \\ 14 \end{pmatrix}$; $|\overrightarrow{BC}| = 7\sqrt{5}$

$\alpha = 109{,}7°$; $\beta = 29{,}7°$; $\gamma = 40{,}6°$

c) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $|\overrightarrow{AB}| = 3$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$; $|\overrightarrow{AC}| = 3$; $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$; $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{26}$

$\alpha = 116{,}4°$; $\beta = 31{,}8°$; $\gamma = 31{,}8°$

S. 109

7 $\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = 2 + \sqrt{6}$; $\quad \vec{a} \circ \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = 2 - 2 = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{c}$;

$\vec{a} \circ \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} = -1 - 2 - \sqrt{6}$; $\quad \vec{b} \circ \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = 2 - \sqrt{6}$;

$\vec{b} \circ \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = -3 + 3 = 0 \Rightarrow b \perp d$; $\quad \vec{c} \circ \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = -1 - 2 - \sqrt{6}$

8 a) $2b_1 - 12 = 0 \Rightarrow b_1 = 6$ $\quad$ b) $3b_1 + 4b_2 = 0$ $\quad \vec{b} = r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

c) $2 + a_2 - 3 = 0 \Rightarrow a_2 = 1$ $\quad$ d) $2 + b_2 + 2b_3 = 0$; $b_3 = r \Rightarrow b_2 = -2 - 2r$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2-2r \\ r \end{pmatrix}$

9 $a \bullet b = 0$, wenn mindestens ein Faktor gleich null ist.

$\vec{a} \circ \vec{b} = 0$, wenn $a \perp b$ oder mindestens ein Vektor gleich dem Nullvektor ist.

10 Dreieck ABC: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$|\overrightarrow{AB}| = 2\sqrt{5}$; $|\overrightarrow{AC}| = 4\sqrt{2}$; $|\overrightarrow{BC}| = 2\sqrt{5}$

$\cos\alpha = \frac{16}{8\sqrt{10}} \Rightarrow \alpha \approx 50{,}8°$; $\quad \cos\beta = \frac{4}{20} \Rightarrow \beta \approx 78{,}4°$

$\cos\gamma = \frac{16}{8\sqrt{10}} \Rightarrow \gamma \approx 50{,}8°$

Dreieck DEF: $\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{DF} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{FE} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$|\overrightarrow{DE}| = 2\sqrt{5}$; $|\overrightarrow{DF}| = 2\sqrt{2}$; $|\overrightarrow{FE}| = 2\sqrt{5}$

$\cos\sphericalangle\, EDF = \frac{4}{4\sqrt{10}} \Rightarrow \sphericalangle\, EDF \approx 71{,}6°$; $\quad \sphericalangle\, DFE \approx 71{,}6°$

$\cos\sphericalangle\, DEF = \frac{-16}{20} \Rightarrow \sphericalangle\, DEF \approx 36{,}8°$;

11 $\left.\begin{array}{l} (1)\ \ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ (2)\ 2x_1 + \phantom{2x_2 +{}} 3x_3 = 0 \end{array}\right\}$ $x_3 = 1 \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = -1{,}5 \\ x_2 = -0{,}75 \end{array}$; $\vec{n} = r \cdot \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ -0{,}75 \\ 1 \end{pmatrix} = \bar{r} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) analoge Vorgehensweise wie in a) $\quad \vec{n} = r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 13 \end{pmatrix}$

12 a) falsch; $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$ und $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

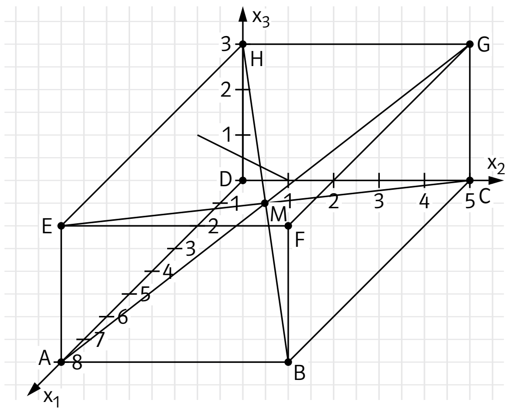
b) richtig, denn $\vec{a} \perp \vec{b}$ ist nur definiert für $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$

c) falsch; $\vec{b}$ kann auch senkrecht zu $\vec{c}$ für $\vec{b} \neq \vec{0}$ sein.

d) richtig; Satz des Pythagoras in vektorieller Form

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern, Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

13 a)



b) $M(4\,|\,2{,}5\,|\,1{,}5)$

$\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$; $\left|\overrightarrow{AM}\right| = \sqrt{24{,}5}$

$\overrightarrow{BM} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$; $\left|\overrightarrow{BM}\right| = \sqrt{24{,}5}$

$\overrightarrow{CM} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$; $\left|\overrightarrow{CM}\right| = \sqrt{24{,}5}$

$\cos\alpha\ \sphericalangle AMB = \frac{12}{24{,}5} \quad\Rightarrow\quad \sphericalangle AMB \approx 60{,}6°$

$\cos\alpha\ \sphericalangle BMC = \frac{-7{,}5}{24{,}5} \quad\Rightarrow\quad \sphericalangle BMC \approx 107{,}8°$

c) $d = 7\sqrt{2}$

d) Wegen der Symmetrie im Quader kann man eine beliebige Raumdiagonale herausgreifen, z. B. [AG]

$\sphericalangle\left(\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AC}\right) \approx 17{,}6°$ $\quad\sphericalangle\left(\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AF}\right) \approx 53{,}9°$ $\quad\sphericalangle\left(\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AH}\right) \approx 30{,}3°$

14 $\vec c = \vec a + \vec b$ $\qquad \left(\vec a + \vec b\right)^2 = \vec a^{\,2} + 2\cdot\vec a\circ\vec b + \vec b^{\,2} = \vec a^{\,2} + \vec b^{\,2}$, da $\vec a\circ\vec b = 0$, $\vec a \perp \vec b$

$\left|\vec c\right|^2 = \left|\vec a\right|^2 + \left|\vec b\right|^2$

15 (1) $\vec a\circ\vec b = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3 = \vec b\circ\vec a$

(2) $\left(r\cdot\vec a\right)\circ\vec b = ra_1\cdot b_1 + ra_2\cdot b_2 + ra_3\cdot b_3 = r\cdot(a_1b_1) + r\cdot(a_2b_2) + r\cdot(a_3b_3) = r\cdot(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)$

$= r\cdot\left(\vec a\circ\vec b\right)$

(3) $\left(\vec a + \vec b\right)\circ\vec c = (a_1+b_1)\cdot c_1 + (a_2+b_2)\cdot c_2 + (a_3+b_3)\cdot c_3 = (a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3) + (b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3)$

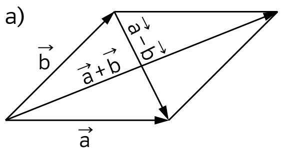
$= \vec a\circ\vec c + \vec b\circ\vec c$

16 $\left|\overrightarrow{b_a}\right| = \left|\vec b\right|\cdot\cos\alpha = \left|\vec b\right|\cdot\frac{\vec a\circ\vec b}{\left|\vec a\right|\cdot\left|\vec b\right|} = \frac{\left|\vec a\circ\vec b\right|}{\left|\vec a\right|} = \left|\frac{\vec a}{\left|\vec a\right|}\circ\vec b\right| = \left|\overrightarrow{a_0}\circ\vec b\right|$

$\overrightarrow{b_a} = \left(\overrightarrow{a_0}\circ\vec b\right)\cdot\overrightarrow{a_0}$, weil für $\alpha < 90°$ $\quad\overrightarrow{a_0}\circ\vec b > 0$, d. h. $\overrightarrow{b_a}$ und $\overrightarrow{a_0}$ sind gleichgerichtet.

für $90° < \alpha \leq 180°$ $\quad\overrightarrow{a_0}\circ\vec b < 0$, d. h. $\overrightarrow{b_a}$ und $\overrightarrow{a_0}$ sind entgegengesetzt gerichtet.

17 a)



$\left(\vec a + \vec b\right)\circ\left(\vec a - \vec b\right) = \vec a^{\,2} - \vec b^{\,2} = 0$ für $\left|\vec a\right| = \left|\vec b\right|$

S. 110

18 a) $\left|\vec v\right| = 3\cdot\left|\vec w\right|$

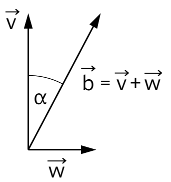
$\tan\alpha = \frac{1}{3} \quad\Rightarrow\quad \alpha \approx 18{,}4°$

b) $t = \frac{100}{1{,}5\frac{m}{s}} \approx 66{,}7\,s$

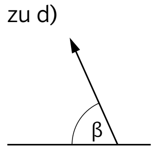
c) $s = 0{,}5\frac{m}{s}\cdot\frac{200}{3}s \approx 33{,}3\,m$

d) $\beta = 90° - \alpha \approx 71{,}6°$

zu a)

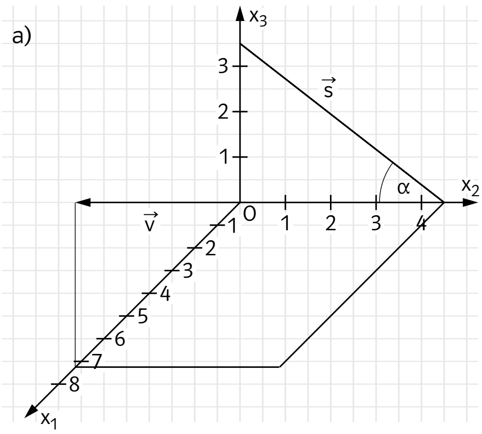


zu d)



Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

19 a)



Sparren: $\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4{,}5 \\ 3{,}5 \end{pmatrix}$ Windrispe: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 7{,}25 \\ -4{,}5 \\ 3{,}5 \end{pmatrix}$

b) $|\vec{v}| = \sqrt{85{,}0625} \approx 9{,}22\,[\text{m}]$

$\cos\alpha = \frac{32{,}5}{52{,}58} \Rightarrow \alpha \approx 51{,}8°$

20 a) $\overrightarrow{AC_k} = \begin{pmatrix} 2+k \\ 1+2k \\ -2+2k \end{pmatrix}$ $\left|\overrightarrow{AC_k}\right| = \sqrt{(2+k)^2 + (1+2k)^2 + (-2+2k)^2} = \sqrt{9+9k^2} = 3\cdot\sqrt{1+k^2}$

$\overrightarrow{BC_k} = \begin{pmatrix} -2+k \\ -1+2k \\ 2+2k \end{pmatrix}$ $\left|\overrightarrow{BC_k}\right| = 3\cdot\sqrt{1+k^2}$;

} alle Dreiecke ABC_k sind gleichschenklig

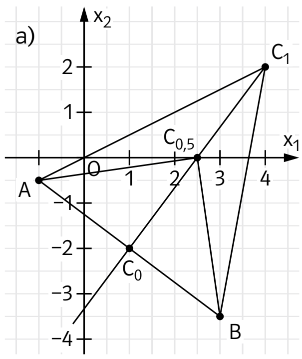
b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$; $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 6$; $\left|\overrightarrow{AC_k}\right| = 6$ wenn $3\cdot\sqrt{1+k^2} = 6 \Rightarrow k = \pm\sqrt{3}$

Für $k = \sqrt{3}$ oder $k = -\sqrt{3}$ ist das Dreieck gleichseitig.

c) $M_{AB}(1|2|1)$

d) $\overrightarrow{MC_k} = \begin{pmatrix} k \\ 2k \\ 2k \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{MC_k} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} k \\ 2k \\ 2k \end{pmatrix} = 4k + 4k - 8k = 0 \Rightarrow \overrightarrow{MC_k} \perp \overrightarrow{AB}$

21 a)



Vermutung: die Dreiecke ABC_k sind gleichschenklig.

$\overrightarrow{AC_k} = \begin{pmatrix} 2+3k \\ -1{,}5+4k \end{pmatrix}$; $\left|\overrightarrow{AC_k}\right| = \sqrt{(2+3k)^2 + (-1{,}5+4k)^2} = \sqrt{6{,}25+25k^2}$

$\overrightarrow{BC_k} = \begin{pmatrix} -2+3k \\ 1{,}5+4k \end{pmatrix}$; $\left|\overrightarrow{BC_k}\right| = \sqrt{6{,}25+25k^2} = \overrightarrow{AC_k}$

$C_1(4|2)$; $C_0(1|-2)$; $C_{0,5}(2{,}5|0)$

b) rechtwinklig: $\overrightarrow{AC_k} \circ \overrightarrow{BC_k} = 0 \Rightarrow (2+3k)\cdot(-2+3k) + (-1{,}5+4k)(1{,}5+4k) = 0 \Rightarrow k = \pm 0{,}5$

$\Rightarrow$ das Dreieck ABC_k ist für $k = 0{,}5$ oder $k = -0{,}5$ rechtwinklig.

gleichseitig: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 5$; $\left|\overrightarrow{AC_k}\right| = 5$ wenn $\sqrt{6{,}25+25k^2} = 5 \Rightarrow k = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\Rightarrow$ das Dreieck ABC_k ist für $k = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ oder $k = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ gleichseitig.

c) $\overrightarrow{C_0C_k} = \begin{pmatrix} 3k \\ 4k \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{C_0C_k} \circ \overrightarrow{AB} = 12k - 12k = 0$;

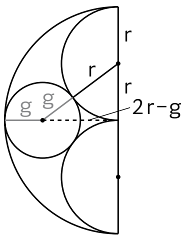
Da $C_0(1|-2)$ Mittelpunkt von [AB] ist, liegen alle Punkte C_k auf der Mittelsenkrechten zu [AB].

22 a) $\left(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}\right) \circ \left(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA}\right) = \overrightarrow{MC}^2 - \overrightarrow{MA}^2 = 0$, weil $\left|\overrightarrow{MC}\right| = \left|\overrightarrow{MA}\right| = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ also gilt $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC}$.

b) $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC} \Rightarrow \left(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}\right) \circ \left(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA}\right) = \overrightarrow{MC}^2 - \overrightarrow{MA}^2 = 0 \Rightarrow \left|\overrightarrow{MC}\right| = \left|\overrightarrow{MA}\right|$, d.h. C liegt auf einem Kreis mit dem Durchmesser [AB].

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern, Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

23



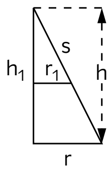
$(r+g)^2 = r^2 + (2r-g)^2 \quad\Rightarrow\quad g = \frac{2}{3}r$

weiße Fläche: $r^2\cdot\pi + \left(\frac{2}{3}r\right)^2\pi = \frac{13}{9}r^2\pi$

blaue Fläche: $\frac{1}{2}\cdot(2r)^2\cdot\pi - \frac{13}{9}r^2\pi = \frac{5}{9}r^2\pi$

Anteil der blauen Fläche: $\dfrac{\frac{5}{9}r^2\pi}{2r^2\pi} = \frac{5}{18} \approx 27{,}8\,\%$

24



a) $h = r\cdot\sqrt{3} \quad\Rightarrow\quad s = \sqrt{3r^2 + r^2} = 2r \quad\Rightarrow\quad M = 2r^2\cdot\pi$

$h_1 = \frac{1}{2}\sqrt{6}\,r;\quad r_1 = \frac{h_1}{h}\cdot r = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,r;\quad s_1 = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}\,r\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,r\right)^2} = \sqrt{2}\,r$

$\Rightarrow\quad M_1 = \sqrt{2}\,r\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot r\cdot\pi = r^2\pi$

Mantel des Kegelstumpfs: $2r^2\pi - r^2\pi = r^2\pi$

b) $V_k = \frac{1}{3}\cdot r^2\cdot\pi\cdot r\cdot\sqrt{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3}\cdot r^3\pi$

$V_1 = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot r\right)^2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{6}\cdot r\cdot\pi = \frac{1}{12}\sqrt{6}\cdot r^3\pi$

$V_{Rest} = V_k - V_1 = \frac{1}{3}\sqrt{3}\cdot r^3\pi - \frac{1}{12}\sqrt{6}\cdot r^3\pi = \left(\frac{1}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{12}\sqrt{6}\right)\cdot r^3\pi$

Verhältnis der beiden Teilkörper: $\dfrac{\frac{1}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{12}\sqrt{6}}{\frac{1}{12}\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{12}{\sqrt{6}} - 1 = \frac{4}{\sqrt{2}} - 1 = 2\sqrt{2} - 1 \approx 1{,}83$

Der Kegelstumpf ist ca. 1,82 mal so groß wie der abgeschnittene Kegel.

7 Das Vektorprodukt

S. 111

1 a) $\vec{a}\circ\vec{b} = 4\cdot1 + 2\cdot2 - 4\cdot2 = 0$, also $a \perp b \quad\Rightarrow\quad A = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}| = 6\cdot3 = 18$

b) geometrisch: jeder Pfeil senkrecht zur Parallelogrammebene repräsentiert einen der gesuchten Vektoren $\vec{n}$; es gibt also unendlich viele Vektoren $\vec{n}$.

rechnerisch: $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$

$\vec{n}\perp\vec{a}$: (1) $4n_1 + 2n_2 + 4n_3 = 0$

$\vec{n}\perp\vec{b}$: (2) $n_1 + 2n_2 - 2n_3 = 0$

$\frac{1}{2}$(1) + (2): $3n_1 + 3n_2 = 0$

z.B. $n_1 = r \quad\Rightarrow\quad n_2 = -r$; in (2): $r - 2r - 2n_3 = 0 \quad\Rightarrow\quad n_3 = -\frac{1}{2}r$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} r \\ -r \\ -\frac{1}{2}r \end{pmatrix}$; z.B. $r = -2 \quad\Rightarrow\quad \vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

S. 113

2 a) $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} -9 \\ 13 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{b}\times\vec{a} = \begin{pmatrix} 9 \\ -13 \\ -1 \end{pmatrix}$; b) $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$;

$\vec{b}\times\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{c}\times\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 13 \end{pmatrix}$

3 a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$; b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$; c) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$;

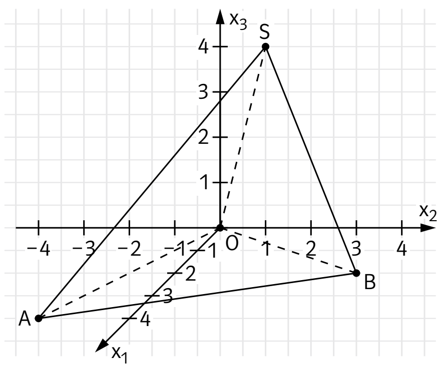
$A = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}\right| = 6$ $A = \frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = 3\sqrt{2}$ $A = \frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix}\right| = 1{,}5\sqrt{13}$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

4 a) $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\vec{c} = \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$; $V = \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{pmatrix} 37 \\ 2 \\ -17 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{6} \cdot 54 = 9$

b) $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$; $\vec{c} = \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}$; $V = \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{pmatrix} 29 \\ 26 \\ 60 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{6} \cdot 198 = 33$

5 a)



b) $\overrightarrow{OA} \circ \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 8 - 8 = 0$;

ΔOAB ist rechtwinklig.

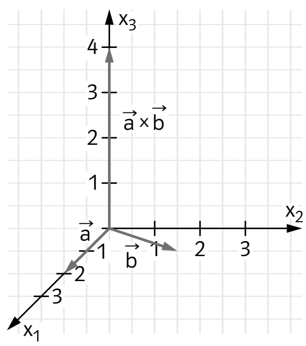
c) Die Grundfläche der Pyramide liegt in der x_1x_2-Ebene; da $S(2|2|5)$, beträgt $h = 5$ (x_3-Koordinate).

d) $|\overrightarrow{OA}| = 2\sqrt{5}$; $|\overrightarrow{OB}| = 2\sqrt{5}$

$V = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}\right) \cdot 5 = \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 5 = \frac{50}{3}$

alternativ: $V = \frac{1}{6} \cdot \left| \left(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\right) \circ \overrightarrow{OS} \right| = \frac{50}{3}$

6



$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$;

zeigt $\vec{a}$ in Richtung Daumen und $\vec{b}$ in Richtung Zeigefinger, so zeigt $\vec{a} \times \vec{b}$ in Richtung Mittelfinger.

7 Individuelle Lösungen. Vgl. auch Aufgabe 2 a). Wenn nicht $\vec{a} = \vec{b} = \vec{c}$ gewählt wird, zeigt jedes Beispiel: $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$.

S. 114

8 a) $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 11 \end{pmatrix}$

b) $\vec{c_r} \circ \vec{a} = r \cdot \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = r \cdot (a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1 - a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2 - a_2a_3b_1) = r \cdot 0 = 0$

analog: $\vec{c_r} \circ \vec{b} = 0$

9 a) $\vec{b} \times \vec{a} = \begin{pmatrix} b_2a_3 - b_3a_2 \\ b_3a_1 - b_1a_3 \\ b_1a_2 - b_2a_1 \end{pmatrix}$; $-\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} (-a_2)b_3 - (-a_3)b_2 \\ (-a_3)b_1 - (-a_1)b_3 \\ (-a_1)b_2 - (-a_2)b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3b_2 - a_2b_3 \\ a_1b_3 - a_3b_1 \\ a_2b_1 - a_1b_2 \end{pmatrix} = \vec{b} \times \vec{a}$

b) $\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \begin{pmatrix} a_2(b_3 + c_3) - a_3(b_2 + c_2) \\ a_3(b_1 + c_1) - a_1(b_3 + c_3) \\ a_1(b_2 + c_2) - a_2(b_1 + c_1) \end{pmatrix}$

$\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2c_3 - a_3c_2 \\ a_3c_1 - a_1c_3 \\ a_1c_2 - a_2c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2(b_3 + c_3) - a_3(b_2 + c_2) \\ a_3(b_1 + c_1) - a_1(b_3 + c_3) \\ a_1(b_2 + c_2) - a_2(b_1 + c_1) \end{pmatrix} = \vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$

c) $\vec{a} \times r\vec{b} = \begin{pmatrix} a_2(rb_3) - a_3(rb_2) \\ a_3(rb_1) - a_1(rb_3) \\ a_1(rb_2) - a_2(rb_1) \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} = r\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

10 $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix}3\\2\\-4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-4{,}5\\-3\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ liefert keine Lösung.

$\left.\begin{array}{lll} \vec{c} \perp \vec{a}: & \text{(I)} & 3c_1 + 2c_2 - 4c_3 = 0 \\ \vec{c} \perp \vec{b}: & \text{(II)} & -4{,}5c_1 - 3c_2 + 6c_3 = 0 \end{array}\right\}$ $1{,}5 \cdot \text{(I)} + \text{(II)}:\ 0 = 0$

Die Gleichungen sind äquivalent. Es können zwei der drei Variablen frei gewählt werden.

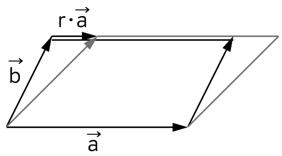
$\vec{c} = \begin{pmatrix}r\\-1{,}5r + 2s\\s\end{pmatrix};$

z.B. $\vec{c_1} = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix};\ \vec{c_2} = \begin{pmatrix}-2\\5\\1\end{pmatrix}$ sind Lösungen, die in verschiedene Richtungen weisen.

Geometrische Begründung: $\vec{b} = -1{,}5 \cdot \vec{a};$

Zu einer Richtung im Raum gibt es unendlich viele verschiedene senkrechte Richtungen.

11



$\vec{a} \times (\vec{b} + r\vec{a}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times r\vec{a} = \vec{a} \times \vec{b} + r \cdot (\vec{a} \times \vec{a}) =$
$\vec{a} \times \vec{b} + r \cdot \vec{0} = \vec{a} \times \vec{b}$

Das schwarze und das graue Parallelogramm haben den gleichen Flächeninhalt.

12 $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix}-4\\-10\\8\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}3\\x\\y\end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix}-4\\-10\\8\end{pmatrix} \Rightarrow r = -\frac{3}{4};$ somit $x = 7{,}5,\ y = -6 \quad \vec{c} = \begin{pmatrix}3\\7{,}5\\-6\end{pmatrix}$

13 a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix};\ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix};\ \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix};\ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC};\ \ \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD};\ \ |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{DC}| = 3; \\ \overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} = 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 0 \ \Rightarrow\ AB \perp BC \end{array}\right\} \Rightarrow$ ABCD ist ein Quadrat.

b) $\overrightarrow{AS_k} = \begin{pmatrix}k\\1{,}5+2k\\1{,}5-2k\end{pmatrix};\ \overrightarrow{BS_k} = \begin{pmatrix}-2+k\\0{,}5+2k\\-0{,}5-2k\end{pmatrix};\ \overrightarrow{CS_k} = \begin{pmatrix}k\\-1{,}5+2k\\-1{,}5-2k\end{pmatrix};\ \overrightarrow{DS_k} = \begin{pmatrix}2+k\\-0{,}5+2k\\0{,}5-2k\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AS_k} = \overrightarrow{BS_k} = \overrightarrow{CS_k} = \overrightarrow{DS_k} = \sqrt{4{,}5 + 9k^2}$

c) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}-3\\-6\\6\end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$

d) $\vec{M} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{A} + \vec{C}) = \begin{pmatrix}-1\\3{,}5\\0{,}5\end{pmatrix};\quad M(-1\,|\,3{,}5\,|\,0{,}5)$

$\overrightarrow{MS_k}$ und $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$ werden durch parallele Pfeile repräsentiert. $|\overrightarrow{MS_k}|$ gibt die Höhe der Pyramide an.

e) $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot |\overrightarrow{MS_k}| = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot |k| \cdot 3 = 9 \cdot k \quad \overrightarrow{MS_k} = \begin{pmatrix}k\\2k\\-2k\end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$

oder: $V = \frac{1}{3} \cdot \left| \left(\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix}k\\1{,}5+2k\\1{,}5-2k\end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix}-3\\-6\\6\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}k\\1{,}5+2k\\1{,}5-2k\end{pmatrix} \right| = \frac{1}{3} \cdot |-3k - 9 - 12k + 9 - 12k| = 9k$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

14 a) falsch;

Gegenbeispiel: A(0|0|0); B(2|1|3); C(4|2|5); D(2|1|2); $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $A_{ABCD} = \sqrt{12+22} = \sqrt{5}$

b) richtig;

V ist als Summe von Produkten ganzer Zahlen eine ganze Zahl.

$V = \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2) \cdot c_1 + (a_3b_1 - a_1b_3) \cdot c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1) \cdot c_3.$

c) $a \circ (\vec{b} \times \vec{c}) = a_1 \cdot (b_2c_3 - b_3c_2) + a_2 \cdot (b_3c_1 - b_1c_3) + a_3 \cdot (b_1c_2 - b_2c_1)$

$= (a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2) - (a_1b_3c_2 + a_2b_1c_3 + a_3b_2c_1)$

$\vec{a} \times \vec{b} \circ \vec{c} = (a_2b_3 - a_3b_2) \cdot c_1 + (a_3b_1 - a_1b_3) \cdot c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1) \cdot c_3$

$= (a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 + a_1b_2c_3) - (a_3b_2c_1 + a_1b_3c_2 + a_2b_1c_3)$

Also gilt sogar: $a \circ (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}$

15 a) falsch; $\vec{a} \times (r \cdot \vec{a}) = \vec{0}$ b) richtig; $\vec{a} \times (r \cdot \vec{a}) = r \cdot (\vec{a} \circ \vec{a}) = r \cdot |\vec{a}|^2$

c) richtig; siehe Teilaufgabe 14 c) d) richtig; $\vec{b} \circ \vec{a} = \vec{a} \circ \vec{b}$ und $\vec{a} \cdot r = r \cdot \vec{a}$

16 a) $\frac{D(1)}{D(0)} = 0{,}9$; $\frac{D(2)}{D(1)} \approx 0{,}9$; $\frac{D(3)}{D(2)} \approx 0{,}9$; $\frac{D(4)}{D(3)} \approx 0{,}9$; D nimmt also exponentiell ab.

$D(t) = 70 \cdot 0{,}9^t$; $D(t) = T(t) - 20 \Rightarrow T(t) = 20 + 70 \cdot 0{,}9^t$

b) $40 = 20 + 70 \cdot 0{,}9^t \Rightarrow \frac{2}{7} = 0{,}9^t \Rightarrow t = \frac{\lg\frac{2}{7}}{\lg 0{,}9} \approx 11{,}9$

Nach 12 Minuten hat der Tee eine Temperatur von 40 °C.

17 a) falsch; f: $x \mapsto x^{2k}$, $k \in \mathbb{Z}$; G_f ist achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse.

f: $x \mapsto x^{2k+1}$, $k \in \mathbb{Z}$; G_f ist punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs.

b) falsch; eine ganzrationale Funktion 5. Grades hat höchstens 5 Nullstellen;

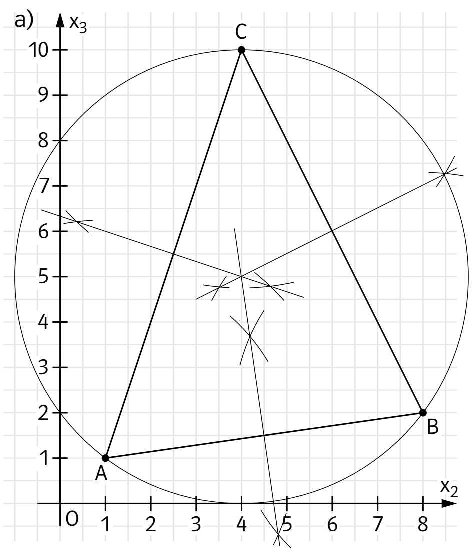
Gegenbeispiel: f: $x \mapsto x \cdot (x^2+2)(x-1) \cdot (x+2)$; f hat nur 3 Nullstellen.

c) richtig; eine ganzrationale Funktion 3. Grades hat für sehr große x-Werte ($x \to +\infty$) und sehr kleine x-Werte ($x \to -\infty$) unterschiedliche Vorzeichen für die Funktionswerte. Also muss der Graph mindestens einmal die x-Achse schneiden.

8 Kreise und Kugeln im Koordinatensystem

S. 115

1 a)



b) Alle Punkte des Kreises haben von M den gleichen Abstand. M ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten.

c) Alle Punkte des Raumes, die von zwei festen Punkten den gleichen Abstand haben, liegen in der Symmetrieebene dieser Punkte. Diese Ebene geht durch den Mittelpunkt der Verbindungsstrecke und ist senkrecht zu dieser Strecke.

d) Zur Festlegung eines Kreises gehören drei Punkte (siehe Konstruktion). M erhält man als Schnittpunkt zweier Mittelsenkrechten. Zwei Symmetrieebenen schneiden sich in einer Geraden. Zur eindeutigen Festlegung des Mittelpunktes braucht man eine 3. Symmetrieebene. Man braucht also vier Punkte zur Festlegung einer Kugel.

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

S. 116

2 a) $\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}\right]^2 = 9$; $(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 2)^2 = 9$

b) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^2 = 4$; $x_1^2 + x_2^2 = 4$

c) $\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right]^2 = 2{,}25$; $(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 + (x_3 + 1)^2 = 2{,}25$

d) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^2 = 16$; $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 16$

e) $\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}\right]^2 = 25$; $(x_1 + 2)^2 + (x_2 + 3)^2 = 25$

f) $\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]^2 = 9$; $(x_1 - 2)^2 + (x_2 + 2)^2 + (x_3 - 1)^2 = 9$

3 a) K: $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 7)^2 = 25$

A: $(4 - 1)^2 + (1 - 1)^2 + (3 - 7)^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow$ A liegt auf der Kugel;

analog: $\overline{MB}^2 = 14 < 25 \Rightarrow$ B liegt innerhalb der Kugel;

$\overline{MC}^2 = 40 > 25 \Rightarrow$ C liegt außerhalb der Kugel.

b) K: $(x_1 + 2)^2 + (x_2 + 2)^2 + (x_3 - 3)^2 = 64$

$\overline{MA}^2 = 110 > 64 \Rightarrow$ A liegt außerhalb der Kugel;

$\overline{MB}^2 = 86 > 64 \Rightarrow$ B liegt außerhalb der Kugel;

$\overline{MC}^2 = 26 < 64 \Rightarrow$ C liegt innerhalb der Kugel.

4 K: $(x1 - 2)2 + (x2 + 3)2 + (x3 - 1)2 = 50$

a) $(3 - 2)^2 + (4 + 3)^2 + (c - 1)^2 = 50 \Rightarrow (c - 1)^2 = 0 \Rightarrow c = 1$

b) $(2 - 2)^2 + (c + 3)^2 + (6 - 1)^2 = 50 \Rightarrow (c + 3)^2 = 25 \Rightarrow c_1 + 3 = 5$ oder

$c_2 + 3 = 5 \Rightarrow c_1 = 2$ oder $c_2 = -8$

c) $(c - 2)^2 + (c + 3)^2 + (6 - 1)^2 = 50 \Rightarrow c + c - 6 = 0 \Rightarrow c_1 = -3,\ c_2 = 2$

5 K: $(x_1 - m)^2 + (x_2 - m)^2 = 32$

a) $m^2 + m^2 = 32 \Rightarrow m^2 = 16;\ m_1 = 4;\ m_2 = -4;$ K: $(x_1 - 4)^2 + (x_1 - 4)^2 = 32$ oder

K: $(x_1 + 4)^2 + (x_1 + 4)^2 = 32$

b) $(-7 - m)^2 + (1 - m)^2 = 32 \Rightarrow m^2 + 6m + 9 = 0$

$\Rightarrow (m + 3)^2 = 0 \Rightarrow m = -3$ K: $(x_1 + 3)^2 + (x_2 + 3)^2 = 32$

6 $2r = d = \overline{AB} = \sqrt{(5 + 3)^2 + (5 + 1)^2} = \sqrt{100} = 10 \Rightarrow r = 5$

$\vec{M} = \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{B}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

K: $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 = 25$

S. 117

7 K_1: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}^2\right] = 6^2$ Kreis mit M(5|3) und r = 6

K_2: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = 6^2$ Kugel mit M(5|3|0) und r = 6

K_1 ist die Gleichung des Schnittkreises der Kugel K_2 mit der x_1x_2-Ebene.

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

8 a) Der Mittelpunkt muss auf der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten liegen, also $M(m|m)$, der Radius ist m.

$K: (x_1-m)^2+(x_2-m)^2 = m^2$

$P(1|2) \in K: (1-m)^2+(2-m)^2 = m^2 \Rightarrow m^2-6m+5 = 0 \Rightarrow m_1 = 1,\ m_2 = 5$

$K_1: (x_1-1)^2+(x_2-1)^2 = 1 \qquad K_2: (x_1-5)^2+(x_2-5)^2 = 25$

b) $K: (x_1-m)^2+(x_2-r)^2 = r^2$

$P(1|2) \in K$: (I): $(1-m)^2+(2-r)^2 = r^2$

$G(-3|2) \in K$: (II): $(-3-m)^2+(2-r)^2 = r^2$

(I) − (II): $(1-m)^2-(-3-m)^2 = 0 \Rightarrow m = -1$

in (I): $2^2+(2-r)^2 = r^2 \Rightarrow r = 2$

$K: (x_1+1)^2+(x_2-2)^2 = 4$

9 $\overline{M_1M_2} = \sqrt{12^2+4^2+6^2} = 14; \qquad \overline{M_1M_2}-(r_1+r_2) = 14-10 = 4$

Der Abstand der Kugeln ist 4.

10 $K: (\vec{x}-\vec{m})^2 = 25$

$\vec{m_1} = \begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix};\ \vec{m_2} = \begin{pmatrix}-5\\0\\0\end{pmatrix};\ \vec{m_3} = \begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix};\ \vec{m_4} = \begin{pmatrix}0\\-5\\0\end{pmatrix};\ \vec{m_5} = \begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix};\ \vec{m_6} = \begin{pmatrix}0\\0\\-5\end{pmatrix}$

11 Ansatz: $(x_1-m)^2+(x_2-13)^2+(x_3-13)^2 = 169$

$P(5|1|9) \in K: (5-m)^2+(1-13)^2+(9-13)^2 = 169 \Rightarrow (5-m)^2 = 9 \Rightarrow m = 2$ (oder $m = -8$)

$M(2|13|13)$

12 a) $r = \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}\overline{PQ} = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+8^2+(16)^2} = \frac{1}{2}\cdot 18 = 9$

$M = \frac{1}{2}(\vec{P}+\vec{Q}) = \begin{pmatrix}4\\2\\4\end{pmatrix}$

$K: (x_1-4)^2+(x_2-2)^2+(x_3-4)^2 = 81$

$K: \left[\vec{x}-\begin{pmatrix}4\\2\\4\end{pmatrix}\right]^2 = 81$

b) analoge Vorgehensweise; $K: \left[\vec{x}-\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}\right]^2 = 49$

$K: (x_1+2)^2+x_2^2+(x_3-2)^2 = 49$

13 Im Raum ist die x_3-Koordinate frei wählbar. Deshalb beschreibt die Gleichung $x_1^2 + x_2^2 = 100$ einen nach oben und unten unendlich langen Zylinder mit der x_3-Achse als Zylinderachse und dem Radius $r = 10$.

14 Radius der einbeschriebenen Kugel $r = 2{,}5$; Bsp.: $(x_1+2{,}5)^2+(x_2-2{,}5)^2+(x_3-2{,}5)^2 = 2{,}5^2$

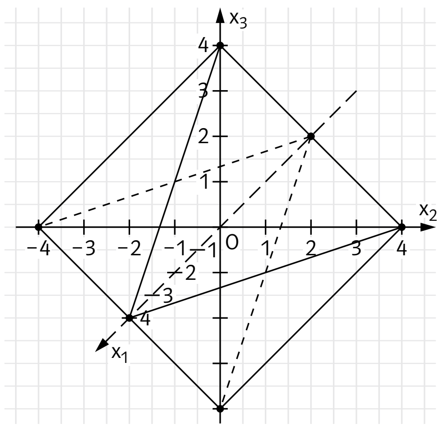
Radius der unbeschriebenen Kugel $r = 2{,}5\cdot\sqrt{3}$; Bsp.: $(x_1+2{,}5)^2+(x_2-2{,}5)^2+(x_3-2{,}5)^2 = 18{,}75$

15 Im Weltall dehnt sich die Flamme wegen der fehlenden Schwerkraft nach allen Richtungen gleich stark aus.

In der Erdatmosphäre sind die erwärmten Teile der Flamme leichter und steigen nach oben.

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

16 a)



Hier lohnt eine Darstellung des Oktaeders mit Vektoris, bei dem man das Bild drehen kann.

b) $V = \frac{2}{3}\cdot\left(4\sqrt{2}\right)^2\cdot 4 = \frac{256}{3}$

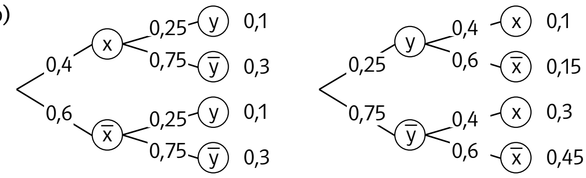
$O = 8\cdot\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\4\\-4\end{pmatrix} = 4\cdot\left|\begin{pmatrix}16\\16\\16\end{pmatrix}\right| = 64\sqrt{3}$

c) K: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 16$

17 a)

	X	$\overline{X}$	
Y	**0,1**	**0,15**	0,25
$\overline{Y}$	0,3	**0,45**	**0,75**
	0,4	0,6	1

b)



c) $\left.\begin{array}{l} P(x \cap y) = 0{,}1 \\ P(x)\cdot P(y) = 0{,}4\cdot 0{,}25 = 0{,}1 \end{array}\right\}$ x und y sind (stochastisch) unabhängig.
Die Multiplikationstafel stimmt mit obiger Additionstafel überein.

18 a) $-0{,}5x^2 - x + 2xz = x(-0{,}5x - 1 + 2z) \neq x(-0{,}5x + 2z)$ falsch
b) $x(4 + 3a\cdot 2b) = 4x + 6abx \neq 4x + 3ax2xb$ falsch
c) $4v - 2(t - 2x) = 4v - 2t + 4x$ richtig
d) $2x^2 + 4x - 16 = 2\cdot(x-2)(x+4) = -2(2-x)(4+x)$ richtig
e) $5{,}1 + 4{,}9t + 0{,}5t = 5{,}1 + 5{,}4t \neq 10{,}5t$ falsch

19 $3\beta + 30° = 180° \;\Rightarrow\; \beta = 50°$ $\quad \delta = \beta = 50°,\; \varepsilon = 180° - 50° = 130°$

Thema: Vektoren in der Physik

S. 119

1 a) $\overrightarrow{M} = \begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-3k\\-4k\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-8k\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12-8k\\0\\0\end{pmatrix}$

b) Im Gleichgewichtsfall gilt $\overrightarrow{M} = \overrightarrow{0}$

$12 - 8k = 0 \;\Rightarrow\; k = 1{,}5$ $\quad \left|\overrightarrow{F_3}\right| = \left|\begin{pmatrix}0\\-4{,}5\\-6\end{pmatrix}\right| = 7{,}5$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2