III Anwendungen der Ableitungen

1 Monotonie

S. 64

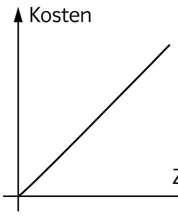
1 a) $f_1'(x) = 0$, d.h. keine Steigung $\Rightarrow$ G_c
$f_2'(x) = x^2 \geqq 0$, d.h. positive Steigung $\Rightarrow$ G_b
$f_3'(x) = -x^2 \leqq 0$, d.h. negative Steigung $\Rightarrow$ G_a

b) $f'(x) < 0$ $\Leftrightarrow$ G_f fällt;
$f'(x) > 0$ $\Leftrightarrow$ G_f steigt;
$f'(x) = 0$ $\Leftrightarrow$ G_f hat keine Steigung.

S. 66

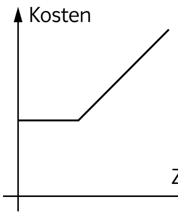
2 a)

z.B.



streng monoton steigend

oder

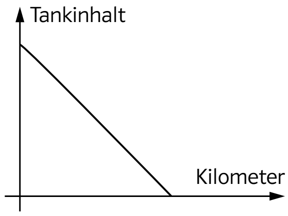


monoton steigend

usw.

b)

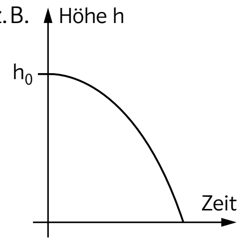
z.B.



streng monoton fallend

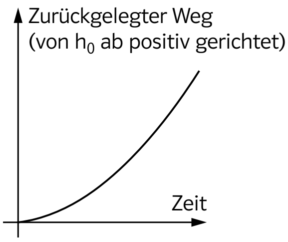
c)

z.B.



streng monoton fallend

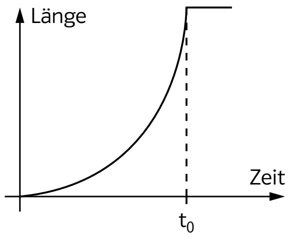
oder



streng monoton steigend

d)

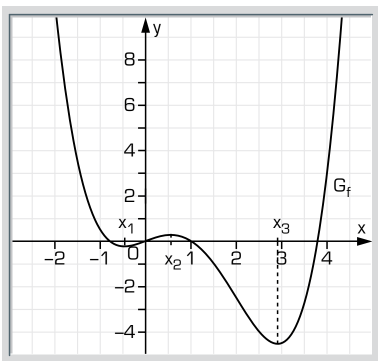
z.B.



bis t_0 streng monoton steigend

3 a) f ist für $x \in [-1; 2]$ streng monoton zunehmend und für $x \in [2; 4]$ streng monoton abnehmend.
b) f ist für $x \in [0; 1]$ streng monoton abnehmend, für $x \in [1; 2]$ streng monoton zunehmend und für $x \in [2; +\infty[$ streng monoton abnehmend.
c) f ist für $x \in]-\infty; 2[$ und für $x \in [2; 5]$ streng monoton abnehmend.

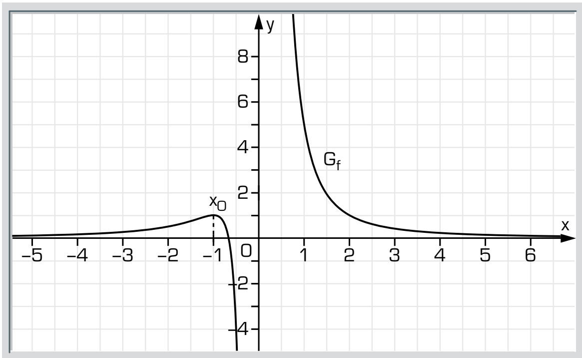
4 a)



G_f ist streng monoton fallend für $x \in]-\infty; -0{,}46]$ und $x \in [0{,}56; 2{,}91]$. Er ist streng monoton steigend für $x \in [0{,}46; 0{,}56]$ und $x \in [2{,}91; +\infty[$.
$f'(x) < 0$ für $x \in]-\infty; -0{,}46[$ und $x \in]0{,}56; 2{,}91[$;
$f'(x) > 0$ für $x \in]-0{,}46; 0{,}56[$ und $x \in]2{,}91; +\infty[$.

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

b)

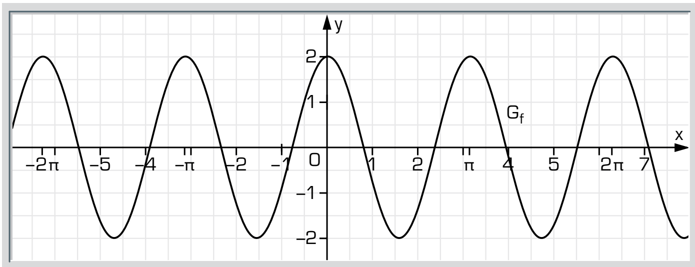


G_f ist streng monoton steigend für $x \in]-\infty; -1]$ und streng monoton fallend für $x \in [-1; 0[$ und $x \in]0; +\infty[$.

$f'(x) < 0$ für $x \in]-1; 0[$ und $x \in]0; +\infty[$;

$f'(x) > 0$ für $x \in]-\infty; -1[$.

c)



G_f entsteht aus der Sinuskurve durch Stauchen mit dem Faktor 2 in x-Richtung $\left(\text{Periode: } \frac{2\pi}{\pi} = \pi\right)$, Verschieben um $+\frac{\pi}{4}$ in x-Richtung (nach links) und Strecken mit dem Faktor 2 in y-Richtung.

G_f ist streng monoton fallend für $x \in \left[k \cdot \pi; (2k+1)\frac{\pi}{2}\right]$ $(k \in \mathbb{Z})$ und streng monoton steigend für $x \in \left[(2k-1)\frac{\pi}{2}; k \cdot \pi\right]$ $(k \in \mathbb{Z})$.

$f'(x) < 0$ für $x \in \left]k \cdot \pi; (2k+1)\frac{\pi}{2}\right[$ $(k \in \mathbb{Z})$;

$f'(x) > 0$ für $\left](2k-1)\frac{\pi}{2}; k \cdot \pi\right[$.

5 a) $f(x) = 4x + x^2 = x(4+x)$

$f'(x) = 4 + 2x = 2(2+x)$

$f'(x) = 0$ für $x_0 = -2$

Monotonieverhalten von f:

f′: $f' < 0$ | -2 | $f' > 0$

f: ↘ $]-\infty; -2]$ streng monoton abnehmend; ↗ $]-2; +\infty[$ streng monoton zunehmend

b) $f'(x) = x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$, $f'(x) = 0$ für $x_1 = -3$, $x_2 = 3$

f ist für $x \in]-\infty; -3]$ und $x \in [3; +\infty[$ streng monoton zunehmend und für $x \in [-3; 3]$ streng monoton abnehmend.

c) $f'(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 4$, $f'(x) = 0$ für $x_0 = 2$

f ist für $x \in]-\infty; 2]$ streng monoton zunehmend und für $x \in [2; +\infty]$ streng monoton abnehmend.

d) $f'(x) = x^4 - x^3 = x^3(x-1)$, $f'(x) = 0$ für $x_1 = 0$, $x_2 = 1$

f ist für $x \in]-\infty; 0]$ und $x \in [1; +\infty[$ streng monoton zunehmend und für $x \in [0; 1]$ streng monoton abnehmend.

e) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$

$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-4)^2} = \frac{-2x}{(x-2)^2(x+2)^2}$; $f'(x) = 0$ für $x_0 = 0$

f ist für $x \in]-\infty; -2[$ und $x \in]-2; 0]$ streng monoton zunehmend und für $x \in [0; 2[$ und $x \in]2; +\infty[$ streng monoton abnehmend.

$\lim\limits_{x \underset{<}{\to} -2} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 2} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 2} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 2} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern, Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

f) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$ für alle $x \in D_f$

f ist für $x \in]-\infty; -1[$ und $x \in]-1; +\infty]$ streng monoton zunehmend.

Nullstelle von f: $x_0 = 0$

$\lim\limits_{x \underset{<}{\to} -1} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} -1} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$

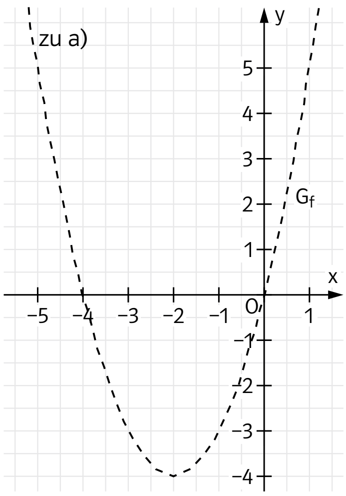
g) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$f'(x) = \frac{-2x-2}{(x-1)^3}$, $f'(x) = 0$ für $x_0 = -1$

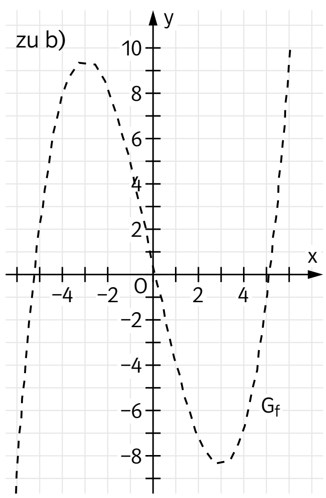
f ist für $x \in]-\infty; -1]$ und $x \in]-1; +\infty[$ streng monoton abnehmend und für $x \in [-1; 1[$ streng monoton zunehmend.

$\lim\limits_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} -1} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

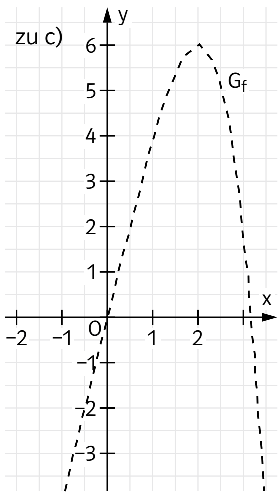
Nullstellen von f: $x_1 = 0$



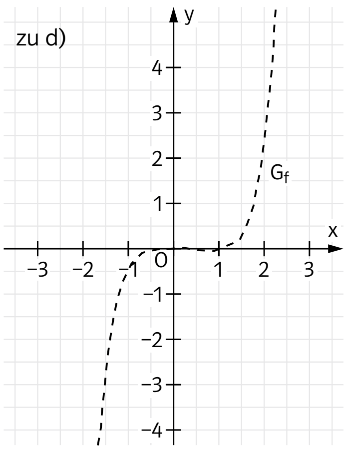
Parabel mit Scheitel S(2|−4)



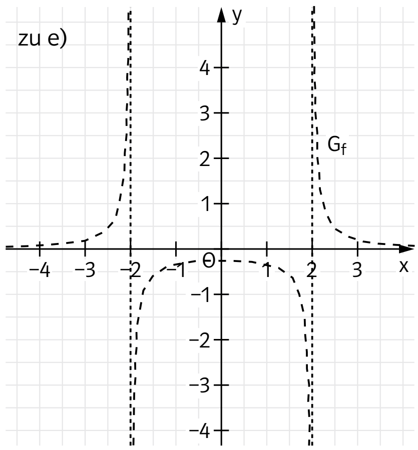
Graphenverlauf von links unten nach rechts oben



Hochpunkt H(2|6)
Nullstellen von f:
$x_1 = 0$, $x_2 = 2\sqrt[3]{4}$
Graphenverlauf von links unten nach rechts oben

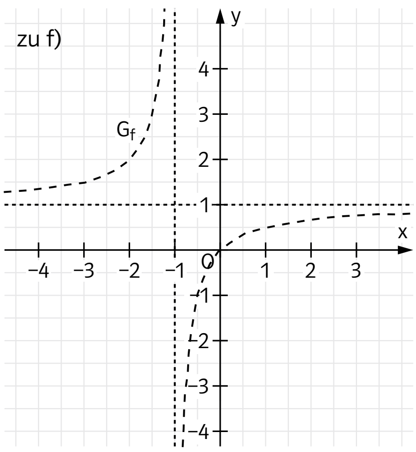


Tiefpunkt T(1|−0,05)
Nullstellen von f:
$x_0 = 0$ (vierfach), $x_2 = 1{,}25$
Graphenverlauf von links unten nach rechts oben

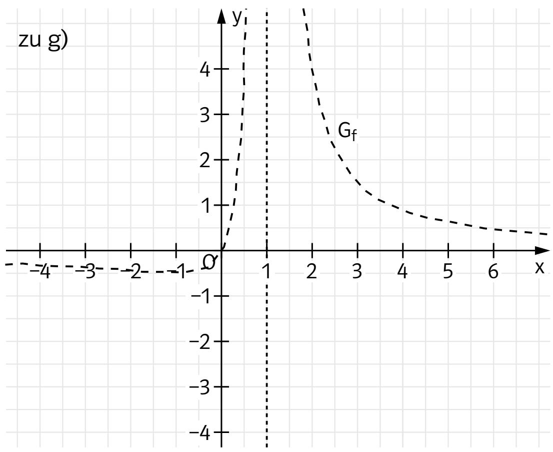


keine Nullstellen; $f(0) = -0{,}25$
(Schnittpunkt mit y-Achse);
waagrechte Asymptote: $y = 0$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2



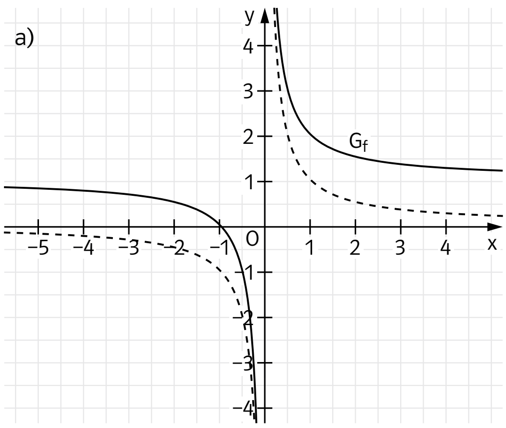
waagrechte Asymptote: y = 1



waagrechte Asymptote: y = 0
Tiefpunkt T(−1|−0,5)

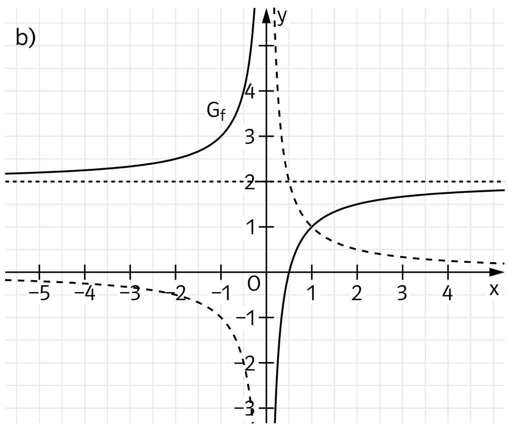
S. 67

6 a)



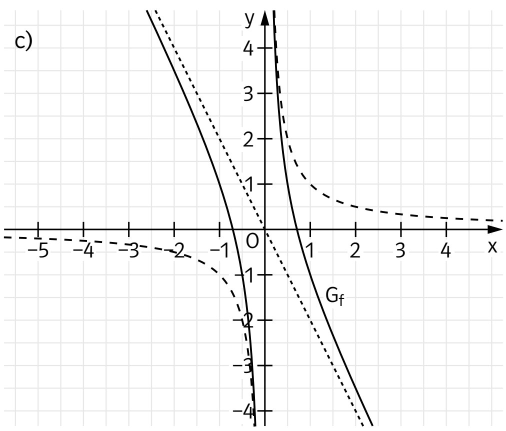
G_f entsteht durch Verschiebung des Graphen der Funktion $x \mapsto \frac{1}{x}$ um eine Einheit in positive y-Richtung.
f ist streng monoton abnehmend für $x \in]-\infty; 0[$ und $x \in]0; +\infty[$.

b)



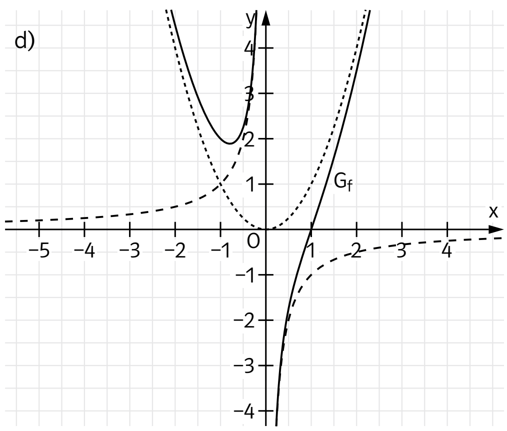
G_f entsteht aus dem Graphen der Funktion $x \mapsto \frac{1}{x}$ durch Spiegelung an der y-Achse und Verschiebung um 2 Einheiten in positive y-Richtung.
f ist streng monoton zunehmend für $x \in]-\infty; 0[$ und $x \in]0; +\infty[$.

c)



G_f entsteht durch Zusammensetzung der Graphen der Funktionen $x \mapsto \frac{1}{x}$ und $x \mapsto -2x$.
f ist streng monoton abnehmend für $x \in]-\infty; 0[$ und $x \in]0; +\infty[$.

d)

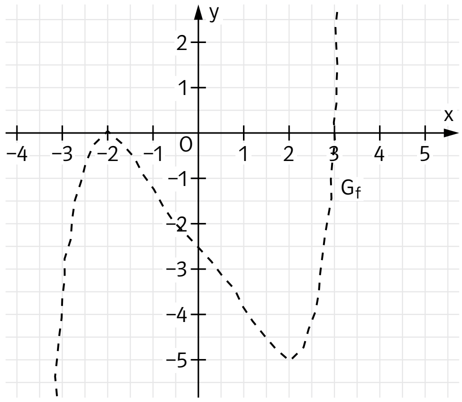


G_f entsteht durch Zusammensetzung der Graphen der Funktionen $x \mapsto x^2$ und $x \mapsto \frac{1}{x}$.
f ist streng monoton abnehmend für $x \in]-\infty; -0{,}8]$ und streng monoton zunehmend für $x \in [-0{,}8; 0[$ und $x \in]0; +\infty[$.

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

7 a) Punkt D liegt auf dem Graphen, da der Graph von f wegen $f'(x) < 0$ für $x \in]-2;2[$ im Intervall $[-2;2]$ ausschließlich fällt.
Da G_f im Intervall $[-2;0]$ genauso weit fällt wie im Intervall $[0;2]$, liegt auch der Punkt $E(0|-2{,}5)$ auf G_f.

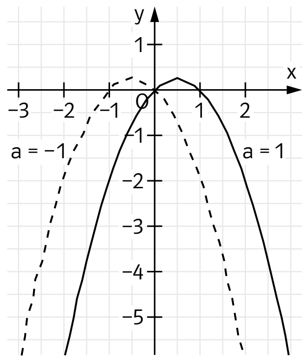
b)



8 a) $f_a(x) = ax - x^2 = x(a-x)$
$f_a'(x) = a - 2x$
$f_a'(x) = 0$ für $x_0 = \frac{a}{2}$ $(a \in \mathbb{R})$
Monotonieverhalten von f_a für $a \in \mathbb{R}$:

f_a': $f_a' > 0$ | $\frac{a}{2}$ | $f_a' < 0$

f_a: $\nearrow$ $\left]-\infty;\frac{a}{2}\right]$ streng monoton zunehmend; $\searrow$ $\left[\frac{a}{2};+\infty\right[$ streng monoton abnehmend

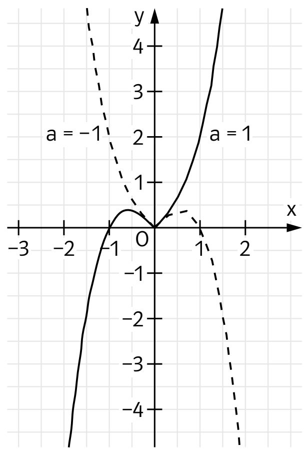


b) $g_a(x) = ax^3 + x^2 = ax^2\left(x + \frac{1}{a}\right)$
$g_a'(x) = 3ax^2 + 2x$ $g_a'(x) = 0$ für $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{2}{3a}$ $(a \neq 0)$
$= 3ax\left(x + \frac{2}{3a}\right)$

a > 0: g_a ist streng monoton zunehmend für $x \in \left]-\infty;-\frac{2}{3a}\right]$ und $x \in [0;+\infty[$ und streng monoton abnehmend für $x \in \left[-\frac{2}{3a};0\right]$.

a = 0: g_a ist streng monoton abnehmend für $x \in]-\infty;0]$ und streng monoton zunehmend für $x \in [0;+\infty[$.

a < 0: g_a ist streng monoton abnehmend für $x \in]-\infty;0]$ und $x \in \left[-\frac{2}{3a};+\infty\right[$ und streng monoton zunehmend für $x \in \left[0;-\frac{2}{3a}\right]$.



Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

c) $h_a(x) = ax^3 + ax^2 = ax^2(x-1)$

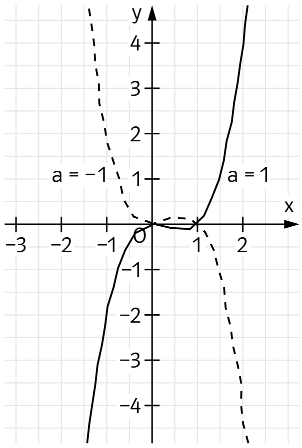
$h_a'(x) = 3ax^2 - ax = 3ax\left(x - \frac{2}{3}\right)$, $\quad h_a'(x) = 0$

für $x_1 = 0,\ x_2 = \frac{2}{3}$ $(a \in \mathbb{R})$

$a > 0$: h_a ist streng monoton zunehmend für $x \in]-\infty; 0]$ und $x \in \left[\frac{2}{3}; +\infty\right[$ und streng monoton abnehmend für $x \in \left[0; \frac{2}{3}\right]$.

$a < 0$: h_a ist streng monoton abnehmend für $x \in]-\infty; 0[$ und $x \in \left[\frac{2}{3}; +\infty\right]$ und streng monoton zunehmend für $x \in \left[0; \frac{2}{3}\right]$.

$a = 0$: $h_a(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad h_a$ ist eine konstante Funktion.



d) $k_a(x) = ax^4 + ax^2 = ax^2\left(x^2 + \frac{1}{a}\right)$

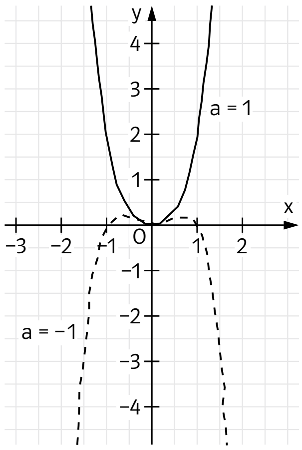
$k_a'(x) = 4ax^3 - 2x = 4ax\left(x^2 + \frac{1}{2a}\right)$,

$a \geqq 0$: $k_a'(x) = 0$ für $x_1 = 0$

$a < 0$: $k_a'(x) = 0$ für $x_1 = 0$; $x_2 = \sqrt{-\frac{1}{2a}}$, $x_3 = \sqrt{-\frac{1}{2a}}$;

$a \geqq 0$: k_a ist streng monoton abnehmend für $x \in]-\infty; 0]$ und streng monoton zunehmend für $x \in [0; +\infty[$.

$a < 0$: k_a ist streng monoton zunehmend für $x \in \left]-\infty; -\sqrt{-\frac{1}{2a}}\right]$ und $x \in \left[0; \sqrt{-\frac{1}{2a}}\right]$ und streng monoton abnehmend für $x \in \left[-\sqrt{-\frac{1}{2a}}; 0\right]$ und $x \in \left[\sqrt{-\frac{1}{2a}}; +\infty\right[$.



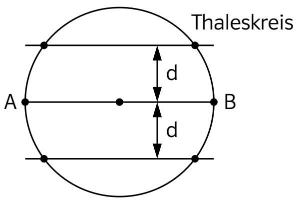
9 $f_a \leftrightarrow f_4$; $\quad f_b \leftrightarrow f_2$; $\quad f_c \leftrightarrow f_4$

10 Der violett gezeichnete Graph gehört zur Stammfunktion F, da
- $f(x) > 0$ für $x \in \mathbb{R}$ und somit F nur streng monoton steigend ist und
- f bei $x_0 = 1$ eine Polstelle gerader Ordnung und somit F bei $x_0 = 1$ eine Polstelle ungerader Ordnung (mit Vorzeichenwechsel) hat.

11

Lineares Wachstum:	$f(t) = a \cdot t + b$
	f(t) wächst pro Zeiteinheit jeweils um den konstanten Wert a.
Exponentielles Wachstum:	$f(t) = b \cdot a^t$
	f(t) wächst pro Zeiteinheit jeweils mit dem konstanten Faktor a.

12



Die Punkte, von denen aus die Strecke [AB] unter einem rechten Winkel erscheint und die von [AB] den abstand d haben, liegen
a) auf dem Thaleskreis [AB] und
b) auf der Parallelen zu AB im Abstand d.

$d < \frac{\overline{AB}}{2}$: 4 Punkte

$d = \frac{\overline{AB}}{2}$: 2 Punkte

$d > \frac{\overline{AB}}{2}$: keine Lösungen

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

2 Extremstellen, Extremwerte

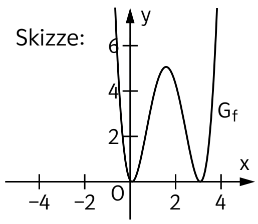
S. 68

1 a) Höchste Temperatur: 13.00 Uhr
Niedrigste Temperatur: 08.00 Uhr
b) Die Temperatur fällt kurzzeitig auf eine relativ niedrige Temperatur ab. Ab 14.00 Uhr ist es vergleichsweise zu den Temperaturen kurz vorher bzw. kurz nachher relativ kalt.

S. 69

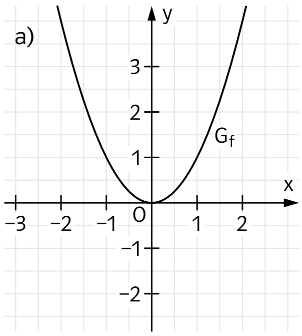
2 a) Extremstellen: $x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = 5,\ x_4 = 8,\ x_5 = 10$
Hochpunkte: $(0|5), (5|3), (10|4)$
Tiefpunkte: $(2|1), (8|0)$
Lokale Maxima: $f(0) = 5$ $\quad$ $f(5) = 3,\ f(10) = 4$
globales Maximum
Lokale Minima: $f(2) = 1,\ f(8) = 0$
globales Maximum
b) Extremstellen: $x_1 = 0,\ x_2 = 3,\ x_3 = 5,\ x_4 = 8,\ x_5 = 11$
Hochpunkte: $(0|3), (8|2)$
Tiefpunkte: $(3|-2), (5|-2), (11|-2)$
Lokale Maxima: $f(0) = 3$ $\quad$ $f(8|2)$
globales Maximum
Lokale Minima: $\underbrace{f(3) = 2,\ f(5) = -2,\ f(5) = -2}_{\text{globales Maximum}}$

3 Nullstellen: $x_1 = 0$ (doppelte Nullstelle), $x_2 = 3$ (doppelte Nullstelle) $\Big\}$ Berührpunkte mit der x-Achse Skizze:



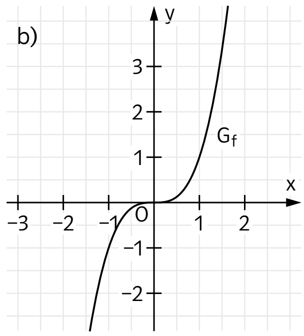
$f(x) \geqq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also auch in der Umgebung von x_1 und x_2.
$\Rightarrow$ $f(0) = 0$ und $f(3) = 0$ sind lokale Minima.
Dazwischen gibt es ein lokales Maximum.

4 a)



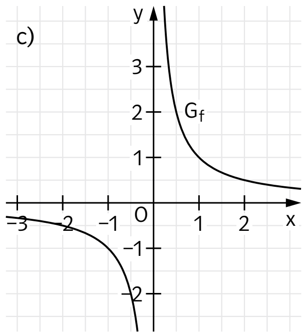
Extremstelle: $x_0 = 0$
Extremwert: $f(0) = 0$
Tiefpunkt: $T(0|0)$

b)



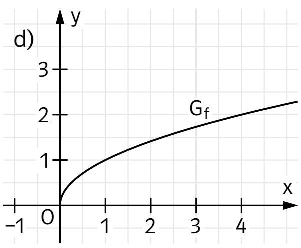
keine Extremstelle

c)



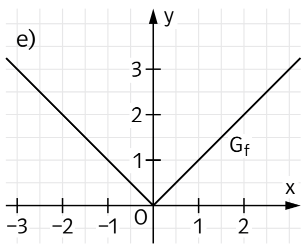
keine Extremstelle

d)



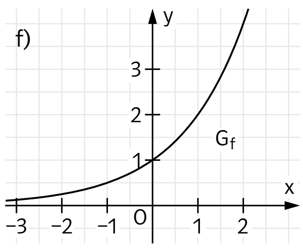
Extremstelle: $x_0 = 0$
Extremwert: $f(0) = 0$
Tiefpunkt: $T(0|0)$

e)



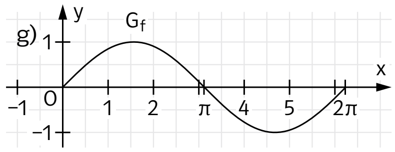
Extremstelle: $x_0 = 0$
Extremwert: $f(0) = 0$
Tiefpunkt: $T(0|0)$

f)

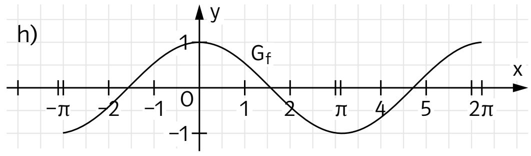


keine Extremstelle

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

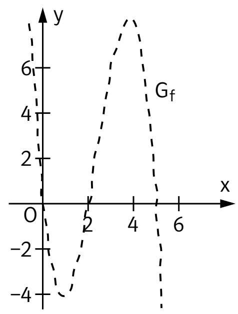
g) 

Extremstellen: $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{3}{2}\pi$
Extremwerte: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1$
Hochpunkt: $\left(\frac{\pi}{2}\middle|-1\right)$
Tiefpunkt: $\left(\frac{3}{2}\pi\middle|-1\right)$

h) 

Extremstellen: $x_1 = -\pi$, $x_2 = 0$, $x_3 = \pi$, $x_4 = 2\pi$
Extremwerte: $f(-\pi) = -1$, $f(0) = 1$,
$f(\pi) = -1$, $f(2\pi) = 1$
Hochpunkte: $(0|1)$, $(2\pi|1)$
Tiefpunkte: $(-\infty|-1)$, $(\pi|-1)$

5 Nullstellen: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 5$
Verhalten im Unendlichen: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
Da zwischen den Nullstellen ein Monotoniewechsel erforderlich ist, gibt es folgende Extremstellen:
Lokales Minimum für $x \in]0;2[$ und lokales Maximum für $x \in]2;5[$.
Da $W = \mathbb{R}$ gilt, gibt es keine globalen Extrema.

Skizze: 

6 $x_1 = -\frac{1}{3}$; $x_2 = 1$

3 Bedingungen für Extrema

S. 70

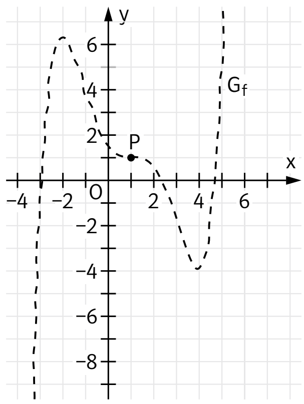
1 a) f ist für $x \in]-\infty;-1]$ und $x \in [1;+\infty]$ streng monoton zunehmend und für $x \in [-1;1]$ streng monoton abnehmend.
b) Extremstellen: $x_1 = -1$; $x_2 = 1$
$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2-1) = 3(x-1)(x+1)$
$f'(x_1) = f'(-1) = 0$; $f'(x_2) = f'(1) = 0$

S. 72

2 a) $f'(x) = 4x^3 - 12x = 4x(x^2-3) = 4x\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)$
$f'(x) = 0$ für $x_1 = 0$, $x_2 = -\sqrt{3}$, $x_3 = \sqrt{3}$
b) $f'(x) = \frac{1}{4}x = -\frac{2}{x^2}$
$f'(x) = 0$ für $x_0 = 2$
c) $f'(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 8$
$f'(x) = 0$ für $x_1 = -2$, $x_2 = 2$
d) $f'(x) = \frac{14x}{(x^2-9)^3}$
$f'(x) = 0$ für $x_0 = 0$
e) $f'(x) = 3x^2 - \frac{27}{x^2}$
$f'(x) = 0$ für $x_1 = -\sqrt[4]{9}$, $x_2 = \sqrt[4]{9}$
f) $f'(x) = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$
$f'(x) = 0$ für $x_1 = 0$, $x_2 = 2$
g) $f'(x) = -\frac{72x}{(x^2+9)^2}$
$f'(x) = 0$ für $x_0 = 0$
h) $f'(x) = 6x^5 - 6x^4 - 12x^3 = 6x^3(x+1)(x-2)$
$f'(x) = 0$ für $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$

S. 73

3 f ist
– streng monoton zunehmend für $x \in]-\infty;-2]$
– streng monoton abnehmend für $x \in [-2;4]$
– streng monoton zunehmend für $x \in]4;+\infty]$
und hat für $x_2 = -2$ ein lokales Maximum und für $x_2 = 4$ ein lokales Minimum.



Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

4 a) $f'(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x = -x(x-1)(x-2)$

$f'(x) = 0$ für $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2$

Monotonieverhalten von f:

		0		1		2	
f'	f' > 0		f' < 0		f' > 0		f' < 0
f	↗		↘		↗		↘

Globale Maxima bei $x_1 = 0,\ x_3 = 2$: $f(x_1) = f(0) = 0,\ f(x_3) = f(2) = 0$

Lokales Minimum bei $x_2 = 1$: $f(x_2) = f(1) = -0{,}25$

b) $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

Lokales Maximum bei $x_1 = 0$: $f(x_1) = f(0) = 1$

Lokales Minimum bei $x_2 = 2$: $f(x_2) = f(2) = -3$

c) $f'(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$

Lokales Minimum bei $x_0 = \sqrt[3]{-0{,}5}$: $f(x_0) = f\left(\sqrt[3]{-0{,}5}\right) = (-0{,}5)^{\frac{2}{3}} - (0{,}5)^{-\frac{1}{3}} \approx 1{,}89$

d) $f'(x) = \frac{16x}{(4-x^2)^2}$

Lokales Minimum bei $x_0 = 0$: $f(x_0) = f(0) = 2$

e) $f'(x) = x^3 - x^2 - 2x = x(x-2)(x+1)$

Lokales Minimum bei $x_1 = -1$: $f(x_1) = f(-1) = -\frac{5}{12}$

Globales Minimum bei $x_3 = 2$: $f(x_3) = f(2) = -\frac{8}{3}$

Lokales Maximum bei $x_2 = 0$: $f(x_2) = f(0) = 0$

f) $f'(x) = 4x(x^2-1) = 4x(x-1)(x+1)$

Globale Minima bei $x_1 = -1,\ x_3 = 1$: $f(x_1) = f(-1) = 0,\ f(x_3) = f(1) = 0$

Lokales Maximum bei $x_2 = 0$: $f(x_2) = f(0) = 1$

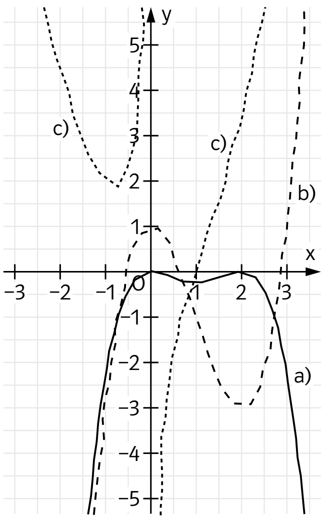
g) $f'(x) = \frac{12x}{(x^2+2)^2}$

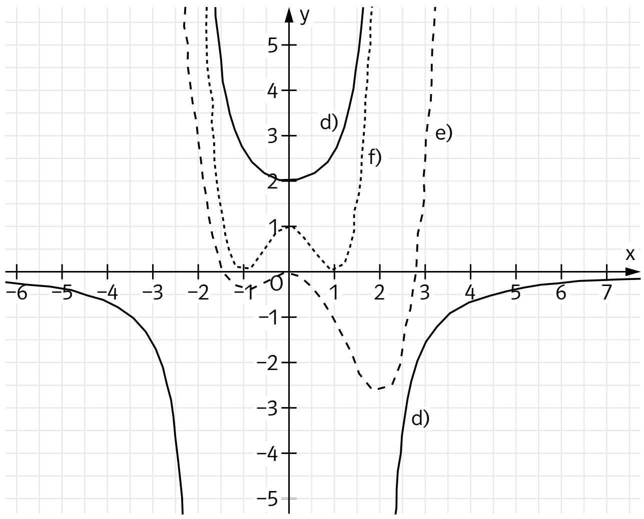
Globales Minimum bei $x_0 = 0$: $f(x_0) = f(0) = -2$

h) $f'(x) = -\frac{x^2-4x+3}{(2-x)^2} = -\frac{(x-1)(x-3)}{(2-x)^2}$

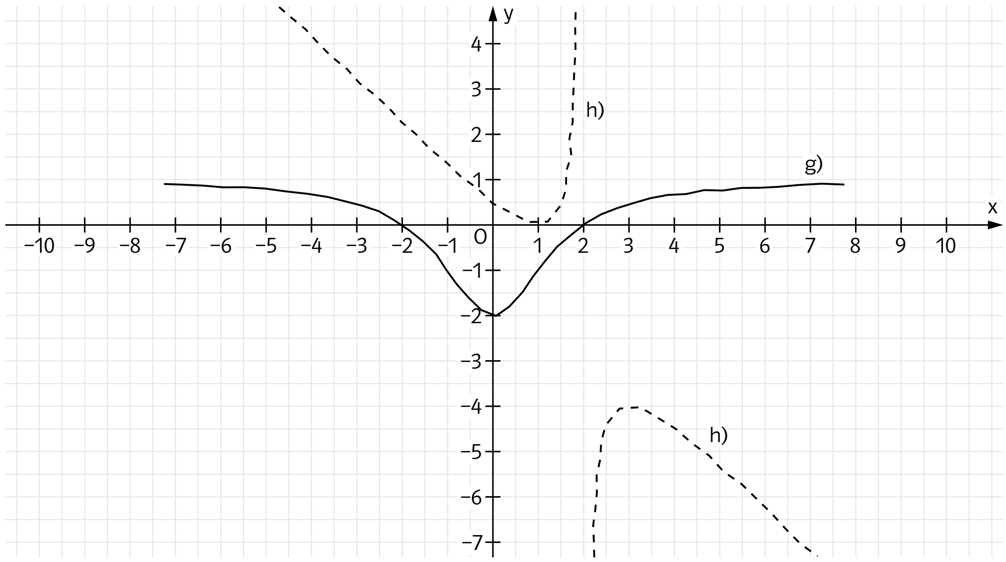
Lokales Minimum bei $x_1 = 1$: $f(x_1) = f(1) = 0$

Lokales Maximum bei $x_2 = 3$: $f(x_2) = f(3) = -4$

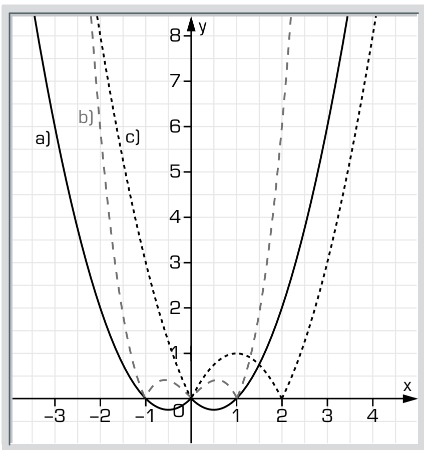


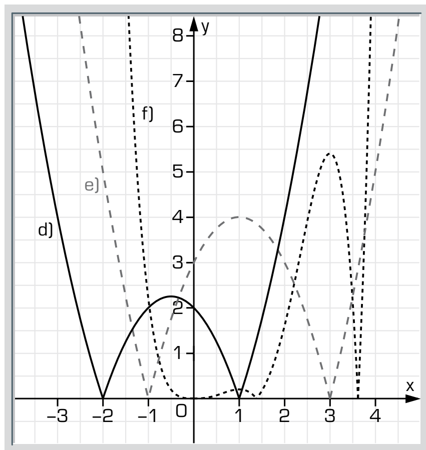


Klett



5





a) Globale Minima für $x_1 = -0{,}5$ und $x_3 = 0{,}5$ mit
$f(x_1) = f(-0{,}5) = -0{,}25$ und $f(x_3) = f(0{,}5) = -0{,}25$
Lokales Maximum für $x_2 = 0$ mit $f(x_2) = f(0) = 0$

b) Globale Minima für $x_1 = -1$, $x_3 = 0$ und $x_5 = 1$ mit
$f(x_1) = f(x_3) = f(x_5) = 0$
Lokale Maxima für $x_2 \approx -0{,}58$ und $x_4 \approx 0{,}58$ mit
$f(x_2) \approx 0{,}38$ und $f(x_4) \approx 0{,}38$

c) Globale Minima für $x_1 = 0$ und $x_3 = 2$ mit
$f(x_1) = f(x_3) = 0$
Lokales Maximum für $x_2 = 1$ mit $f(x_2) = 1$

d) Globale Minima für $x_1 = -2$ und $x_3 = 1$ mit
$f(x_1) = f(x_3) = 0$
Lokales Minimum für $x_2 = -0{,}5$ mit $f(x_2) = 2{,}25$

e) Globale Minima für $x_1 = -1$ und $x_3 = 3$ mit
$f(x_1) = f(x_3) = 0$
Lokales Maximum für $x_2 = 1$ mit $f(x_2) = 4$

f) Globale Minima für $x_1 = 0$, $x_3 \approx 1{,}38$ und $x_5 \approx 3{,}62$ mit
$f(x_1) = f(x_3) = f(x_5) = 0$
Lokale Maxima für $x_2 = 1$ und $x_4 = 3$ mit
$f(x_2) = 0{,}2$ und $f(x_4) = 5{,}4$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

6 a) z.B. $f'(x) = (x+1)\cdot(x-3) = x^2-2x-3$

Monotonieverhalten von f:

f'	f' > 0	−1	f' < 0	3	f' > 0
f	↗	Max	↘	Min	↗

$\Rightarrow \; f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$

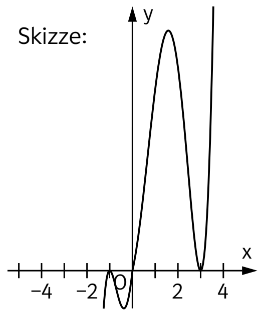
oder $f(x) = (x+1)^2 \cdot x \cdot (x-3)^2$

– Graphenverlauf von links unten nach rechts oben

– $x_1 = -1$ und $x_3 = 3$; Nullstellen ohne Vorzeichenwechsel;

$x_2 = 0$; Nullstelle mit Vorzeichenwechsel

Skizze:



b) z.B. $f'(x) = (x+1)(x-3) = x^3-2x^2-3x$

Monotonieverhalten von f:

f'	f' < 0	−1	f' > 0	0	f' < 0	3	f' > 0
f	↘	Min	↗	Max	↘	Min	↗

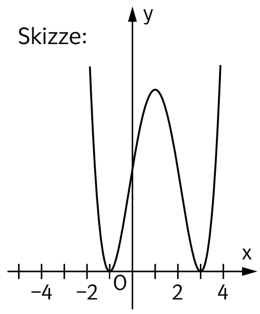
$\Rightarrow \; f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2$

oder $f(x) = (x+1)^2 \cdot (x-3)^2$

– Graphenverlauf von links oben nach rechts oben

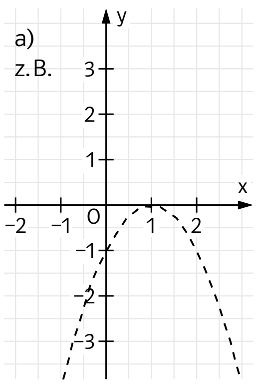
– $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$; Nullstellen ohne Vorzeichenwechsel

Skizze:



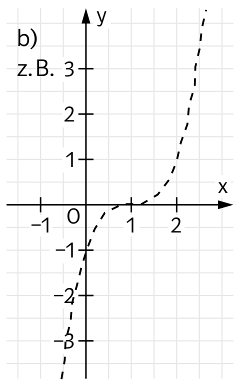
c) Individuelle Lösungen

7 a) z.B.



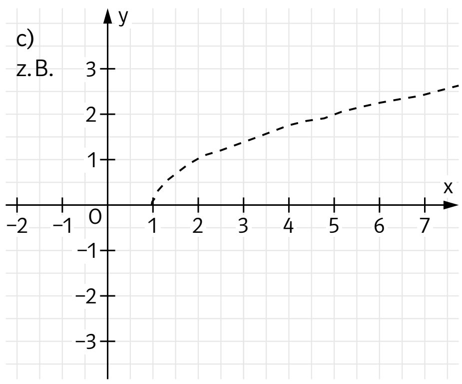
$f(x) = -(x-1)^2$, $D_f = \mathbb{R}$

b) z.B.



$f(x) = -(x-1)^3$, $D_f = \mathbb{R}$

c) z.B.



$f(x) = \sqrt{x-1}$, $D_f = [1; +\infty[$

8 – G_g hat 2 senkrechte Asymptoten $x = -1{,}5$, $x = 1{,}5$ $\Rightarrow$ $G_{g'}$ oder $G_{h'}$

g hat ein lokales Minimum für $x_1 \approx = 0{,}5$ $\Rightarrow$ $G_{g'}$ ist der Graph der Ableitung von g.

– G_f hat eine senkrechte Asymptote $x = 2$ $\Rightarrow$ $G_{f'}$ oder $G_{k'}$

f hat ein lokales Maximum für $x_1 \approx = 0{,}5$ $\Rightarrow$ $f'(0{,}5) = 0$ und

f hat ein lokales Minimum für $x_2 \approx = 3{,}5$ $\Rightarrow$ $f'(3{,}5) = 0$

$\Rightarrow$ $G_{k'}$ ist der Graph der Ableitung von f

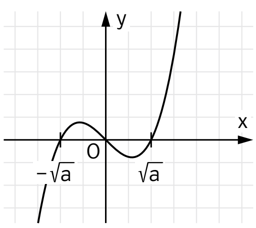
9 a) $f(x) = x^3 - ax = x(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})$

$f'(x) = 3x^2 - a$

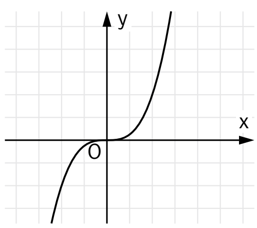
$f'(x) = 0$: $a > 0$: 2 Nullstellen $x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{a}{3}}$ mit Vorzeichenwechsel $\Rightarrow$ 2 Extremstellen

$a = 0$: 1 Nullstelle $x_0 = 0$ ohne Vorzeichenwechsel $\Rightarrow$ keine Extremstelle

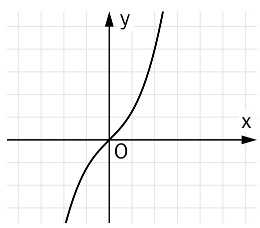
$a < 0$: keine Nullstelle $\Rightarrow$ keine Extremstelle



a > 0



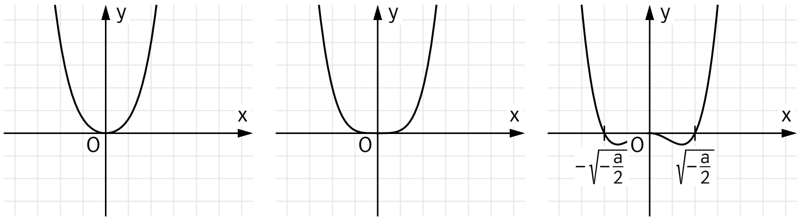
a = 0



a < 0

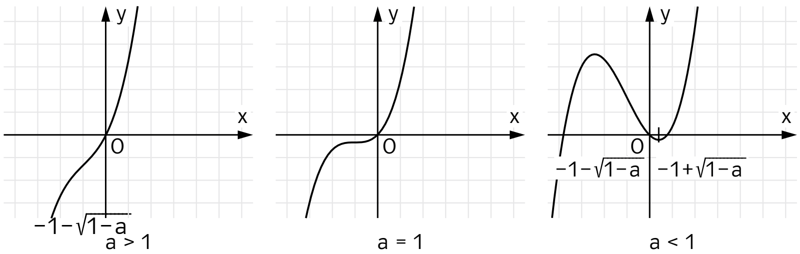
Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

b) $f(x) = x^4 + ax^2 = x^2 + (x^2 + a)$
$f'(x) = 4x^3 + 2ax = 2x(2x^2 + a)$
$f'(x) = 0$: $a > 0$: 1 Nullstelle $x_0 = 0$ mit Vorzeichenwechsel $\Rightarrow$ 1 Extremstelle
$a = 0$: 1 Nullstelle $x_0 = 0$ mit Vorzeichenwechsel $\Rightarrow$ 1 Extremstelle
$a < 0$: drei Nullstellen $x_{1/2} = \pm\sqrt{-\frac{a}{2}}$, $x_3 = 0$ mit Vorzeichenwechsel
$\Rightarrow$ 2 Extremstellen



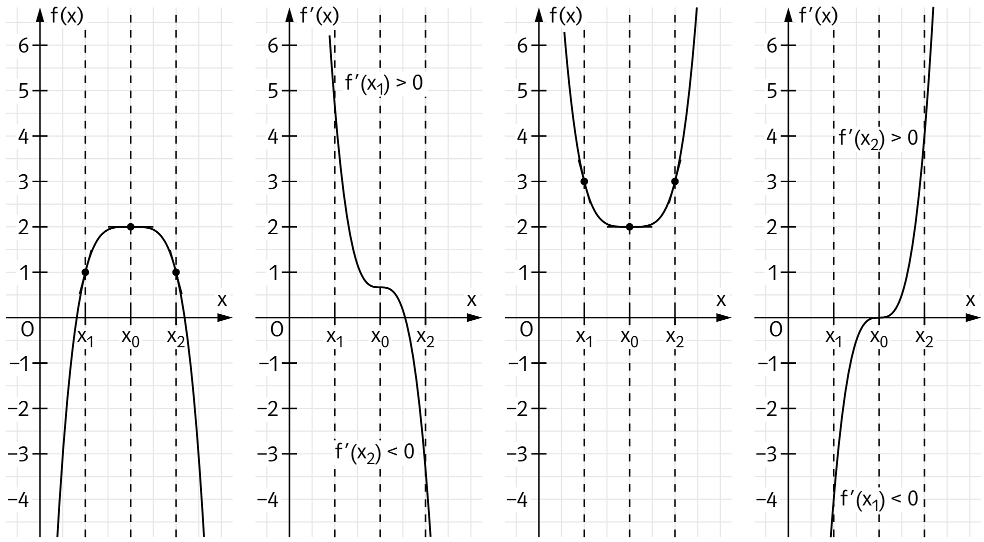
a > 0 a = 0 a < 0

c) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + ax = x\left(\frac{1}{3}x^2 + x + a\right)$
$f'(x) = x^2 + 2x + a$
$f'(x) = 0$: $a > 1$: keine Nullstelle $\Rightarrow$ keine Extremstelle
$a = 1$: 1 Nullstelle $x_0 = -1$ ohne Vorzeichenwechsel $\Rightarrow$ keine Extremstelle
$a < 1$: 2 Nullstellen $x_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1-a}$ mit Vorzeichenwechsel $\Rightarrow$ 2 Extremstellen

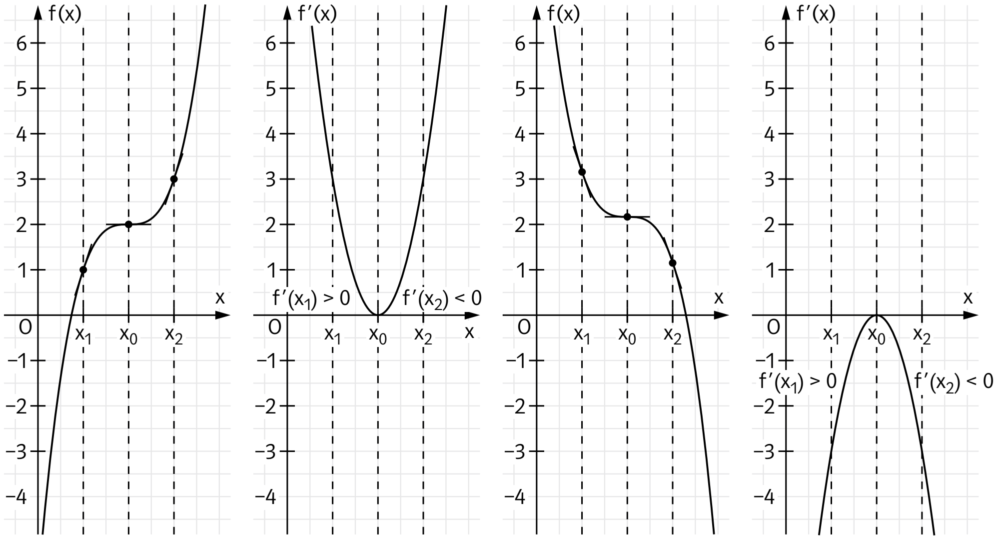


a > 1 a = 1 a < 1

10 a) Hochpunkt: Tiefpunkt:



Terrassenpunkt:



b) Hochpunkt: z. B: $f(x) = -(x-2)^4$ mit $x_0 = 2$
Tiefpunkt: z. B: $f(x) = (x-2)^4 + 2$ mit $x_0 = 2$
Terrassenpunkt: z. B: $f(x) = (x-2)^3 + 2$ mit $x_0 = 2$
oder $f(x) = -(x-2)^3 + 2$ mit $x_0 = 2$

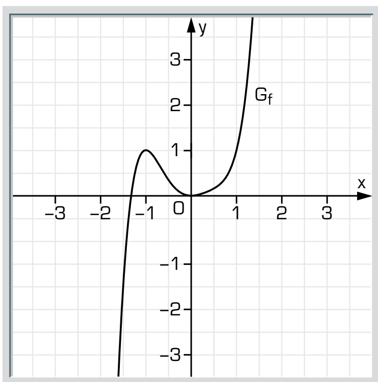
c) Individuelle Lösungen

11 S = „Anzahl der Sechser beim 10-maligen Wurf eines Laplace-Würfels"
$p(S=0) = \left(\frac{5}{6}\right)^{10}$

4 Funktionsuntersuchungen rationaler Funktionen

S. 74 **1** Bisher: Definitionsmenge, Symmetrie, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Verhalten an den Definitionslücken, Verhalten im Unendlichen
Neu: Monotonie, Extremwerte

2 a)



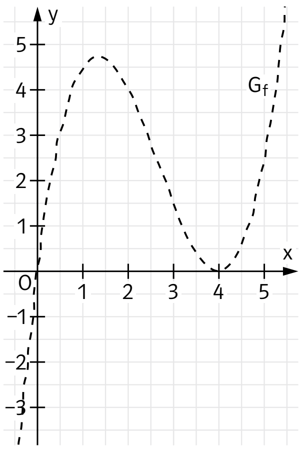
Eigenschaften: $D = \mathbb{R}$; keine Symmetrie;
Nullstellen bei $x_1 \approx -1{,}3$ und $x_2 = 0$;
lokales Maximum bei $x_2 = -1$; $f(-1) = 1$;
lokales Minimum bei $x_2 = 0$; $f(0) = 0$;
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

b) – viele Werte sind nur ungefähre Werte
– es ist nur ein bestimmter Bereich dargestellt
Vorteil: Nicht berechenbare Nullstellen bzw. Extremstellen lassen sich (bis auf kleine Ungenauigkeiten) ablesen.
Wie hier: $f(x) = x^5 - x^3 + x^2 = x^2(x^3 - x + 1)$
Nullstellen: $x_0 = 0$; weitere Nullstellen nicht berechenbar
$f'(x) = 5x^4 - 3x^2 + 2x = x(5x^3 - 3x + 2)$
Extremstellen: $x_1 = 0$; weitere Extremstellen nur durch Probieren und Polynomdivision

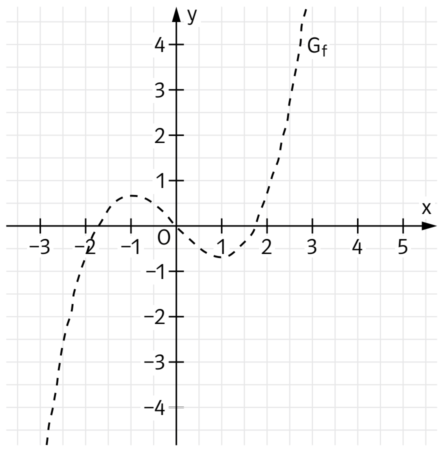
Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

S. 77

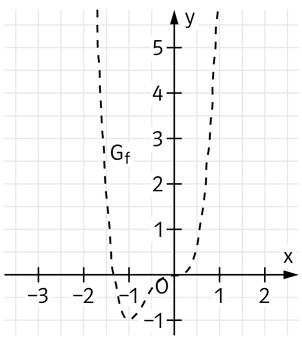
3 a) Symmetrie: keine
Nullstellen: $x_1 = 0$, $x_2 = 4$ (doppelt)
Extrema: $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 8x + 8$;
Tiefpunkt $T(4\,|\,0)$; Hochpunkt: $H\left(1\frac{1}{3}\,\middle|\,4\frac{20}{27}\right)$



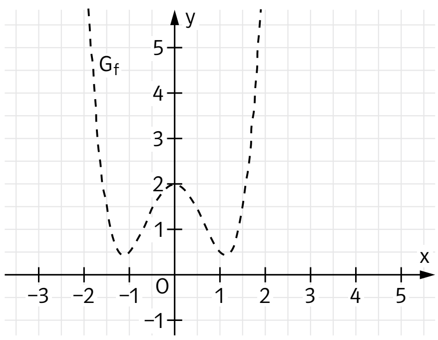
b) Symmetrie: punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung
Nullstellen: $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{3}$
Extrema: $f'(x) = x^2 - 1$;
Tiefpunkt $T\left(1\,\middle|\,-\frac{2}{3}\right)$; Hochpunkt: $H\left(-1\,\middle|\,\frac{2}{3}\right)$



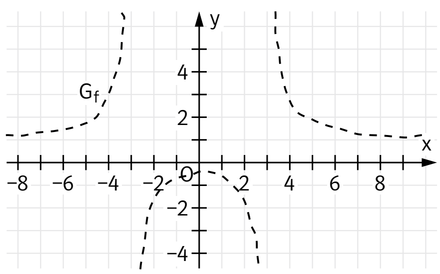
c) Symmetrie: keine
Nullstellen: $x_1 = 0$ (dreifach), $x_2 = -\frac{4}{3}$
Extrema: $f'(x) = 12x^3 + 12x^2 = 12x^2(x+1)$;
Tiefpunkt $T(-1\,|\,-1)$; Terrasssenpunkt: $S(0\,|\,0)$



d) Symmetrie: achsensymmetrisch zur y-Achse
Nullstellen: keine
Extrema: $f'(x) = 4x^3 - 5x = x(4x^2 - 5)$
Tiefpunkte $T_1\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\,\middle|\,\frac{7}{16}\right)$; $T_2\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\,\middle|\,\frac{7}{16}\right)$;
Hochpunkt: $H(0\,|\,2)$

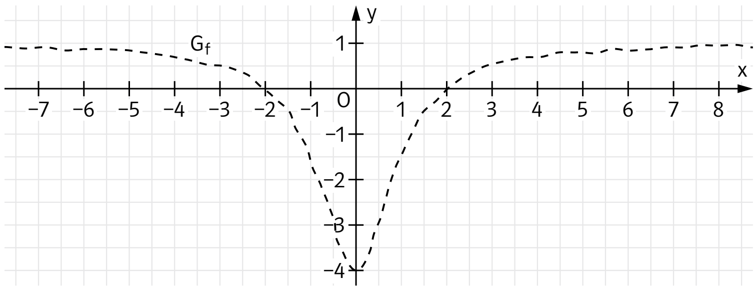


e) Symmetrie: achsensymmetrisch zur y-Achse
Nullstellen: keine
Extrema: $f'(x) = \frac{-26x}{(x^2-9)^2}$;
Hochpunkt: $H\left(0\,\middle|\,\frac{4}{9}\right)$
Verhalten an den Definitionslücken:
$\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ <}} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ >}} f(x) = -\infty$;
$\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} = +\infty$
Verhalten im Unendlichen: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$

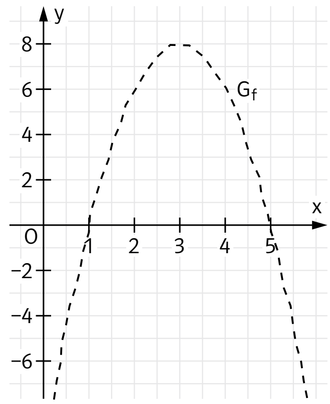


Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

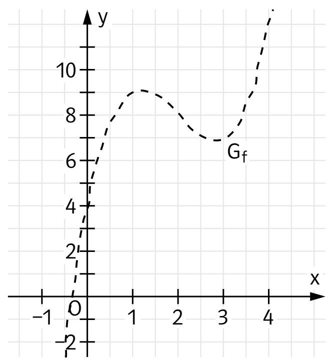
f) Symmetrie: achsensymmetrisch zur y-Achse
Nullstellen: $x_1 = -2$, $x_2 = 2$
Extrema: $f'(x) = \frac{10x}{(x^2+1)^2}$;
Hochpunkt: T(0|4)
Verhalten im Unendlichen: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$



4 a) $D = \mathbb{R}$
Nullstellen: $x_1 = 5$, $x_2 = 5$
Extrema: $f(x) = -4x + 12$;
Hochpunkt: H(3|8)
G_f ist eine nach unten geöffnete Parabel.
$f'(x) = -0{,}5 \quad \Rightarrow \quad -4x + 12 = -4 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 4$
$f(4) = 6$
$\Rightarrow$ t: $y = -4x + 22$



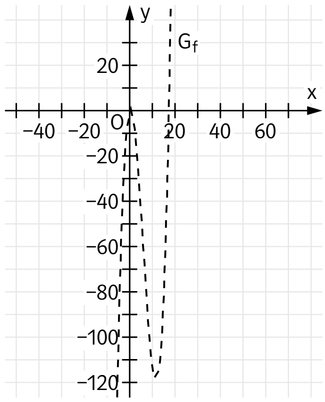
b) $D = \mathbb{R}$
Symmetrie: keine
Extrema: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 10$;
Hochpunkt: $H\left(2 - \frac{\sqrt{6}}{3} \,\middle|\, 8 + \frac{4}{9}\sqrt{6}\right)$
Tiefpunkt: $T\left(2 + \frac{\sqrt{6}}{3} \,\middle|\, 8 - \frac{4}{9}\sqrt{6}\right)$
Schnittpunkt mit der y-Achse: $S_y(0|4)$
Graphenverlauf von links unten nach rechts oben
$f'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 12x + 10 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1,\ x_2 = 3$
$f(1) = 9$, $f(3) = 7$
$\Rightarrow$ t_1: $y = x + 8$
t_2: $y = x + 4$



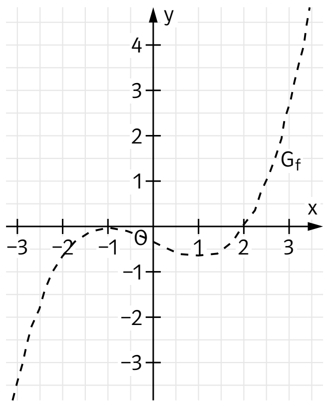
5 $f'(x) = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3} \neq 0$
f hat also keine Extremwerte. Somit gehört der untere Graph zu f.

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

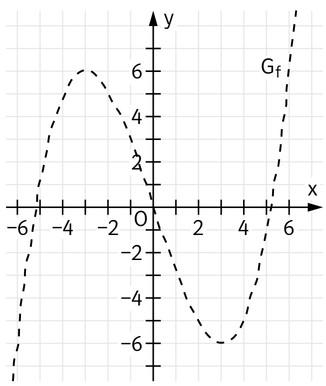
6 a) $D = \mathbb{R}$
Symmetrie: keine
Nullstellen: $x_1 = 0$, $x_2 = 9-3\sqrt{\frac{23}{3}} \approx 0{,}69$
$x_3 = 9+3\sqrt{\frac{23}{3}} \approx 17{,}31$
Extrema: $f'(x) = \frac{1}{2}x^2-6x+2;$
Hochpunkt: $H\left(6-4\sqrt{2}\,\middle|\,-60+\frac{128}{8}\sqrt{2}\right)$
Tiefpunkt: $T\left(6+4\sqrt{2}\,\middle|\,-60-\frac{128}{8}\sqrt{2}\right)$
Graphenverlauf von links unten nach rechts oben



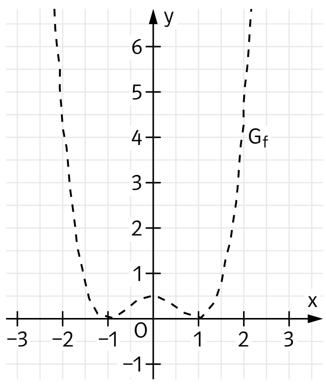
b) $D = \mathbb{R}$
Symmetrie: keine
Nullstellen: $x_1 = -1$ (doppelt), $x_2 = 2$
Extrema: $f'(x) = \frac{1}{6}(3x^3-3) = \frac{1}{2}(x^2-1);$
Hochpunkt: $H(-1\,|\,0)$
Tiefpunkt: $T\left(1\,\middle|\,-\frac{2}{3}\right)$
Graphenverlauf von links unten nach rechts oben



c) $D = \mathbb{R}$
Symmetrie: punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung
Nullstellen: $x_1 = -3\sqrt{3}$, $x_2 = 0;$ $x_3 = 3\sqrt{3}$
Extrema: $f'(x) = \frac{1}{3}x^2-3;$
Hochpunkt: $H(-3\,|\,6)$
Tiefpunkt: $T(3\,|\,-6)$
Graphenverlauf von links unten nach rechts oben

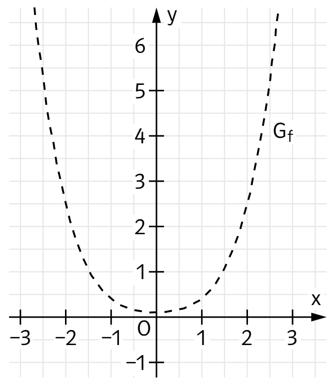


d) $D = \mathbb{R}$
Symmetrie: achsensymmetrisch zur y-Achse
Nullstellen: $x_1 = -1$ (doppelt), $x_2 = 1$ (doppelt)
Extrema: $f'(x) = 2x(x^2-1)$
Hochpunkt: $H(0\,|\,0{,}5)$
Tiefpunkte: $T_1(-1\,|\,0);$ $T2(1\,|\,0)$
Graphenverlauf von links oben nach rechts oben

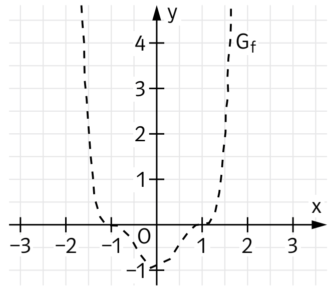


Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

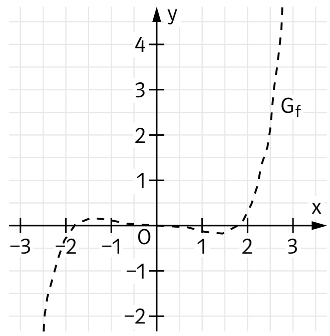
e) $D = \mathbb{R}$
Symmetrie: achsensymmetrisch zur y-Achse
Nullstellen: keine
Extrema: $f'(x) = 0{,}4x(x^2+1)$
Tiefpunkt: $T(0\,|\,0{,}1)$
Graphenverlauf von links oben nach rechts oben



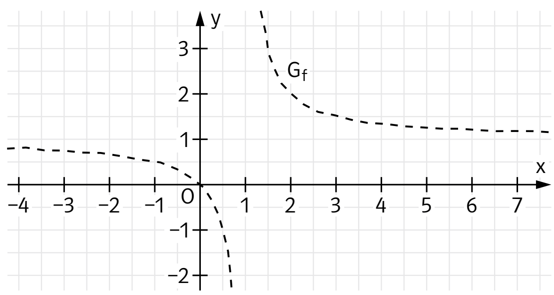
f) $D = \mathbb{R}$
Symmetrie: achsensymmetrisch zur y-Achse
Nullstellen: $x_1 = -1$ (dreifach), $x_2 = 1$ (dreifach)
Extrema: $f'(x) = 6x(x^2-1)^2$
Hochpunkt: $H\left(-\sqrt{2}\,\middle|\,\frac{2}{15}\sqrt{2}\right)$
Tiefpunkt: $T(0\,|\,-1)$
Terrassenpunkte: $T_1(-1\,|\,0)$, $T_2(1\,|\,0)$
Graphenverlauf von links oben nach rechts oben



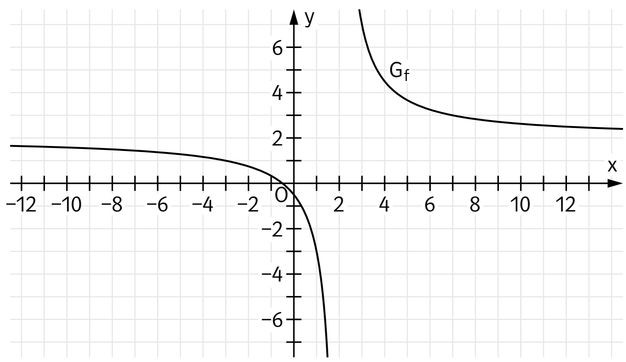
g) $D = \mathbb{R}$
Symmetrie: punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung
Nullstellen: $x_1 = -\sqrt{\frac{10}{3}}$, $x_2 = 0$ (dreifach), $x_3 = \sqrt{\frac{10}{3}}$
Extrema: $f'(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{4}x^2(x^2-2)$
Hochpunkt: $H\left(-\sqrt{2}\,\middle|\,\frac{2}{15}\sqrt{2}\right)$
Tiefpunkt: $T\left(\sqrt{2}\,\middle|\,-\frac{2}{15}\sqrt{2}\right)$
Terrassenpunkt: $T(0\,|\,0)$
Graphenverlauf von links unten nach rechts oben



h) $D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$
Symmetrie: keine
Nullstellen: $x_0 = 0$
Extrema:
$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} \neq 0 \Rightarrow$ keine
Verhalten an der Definitionslücke:
Polstelle mit Vorzeichenwechsel −/+
Verhalten im Unendlichen:
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$

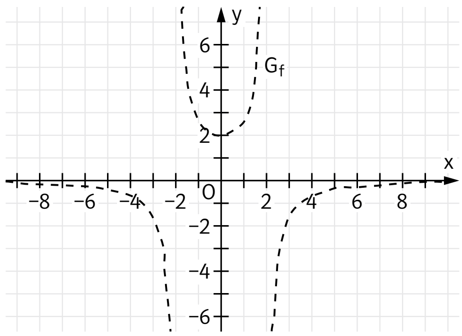


i) $D = \mathbb{R}\setminus\{2\}$
Symmetrie: keine
Nullstellen: $x_1 = -0{,}5$
Extrema:
$f'(x) = \frac{-5}{(x-2)^2} \neq 0 \Rightarrow$ keine
Verhalten an der Definitionslücke:
Polstelle mit Vorzeichenwechsel −/+
Verhalten im Unendlichen:
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 2$



Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

k) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$
Symmetrie: achsensymmetrisch zur y-Achse
Nullstellen: keine
Extrema: $f'(x) = \frac{16x}{(4-x^2)^2}$; Tiefpunkt: $(0|2)$
Verhalten an den Definitionslücken:
$x_1 = -2$ ist Polstelle mit Vorzeichenwechsel $-/+$
$x_2 = 2$ ist Polstelle mit Vorzeichenwechsel $+/-$
Verhalten im Unendlichen:
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$



S. 78

7 Für f_1 gilt: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ > \\ <}} f(x) = -\infty$

$\Rightarrow$ f_1 hat bei $x_0 = 0$ eine Polstelle gerader Ordnung;
$\Rightarrow$ F_1 hat bei $x_0 = 0$ eine Polstelle ungerader Ordnung;
$\Rightarrow$ F_a, F_c, F_d und F_e sind möglich.

$F_a'(x) = \frac{x^3-1}{x^2}$; $F_a'(-1) \neq 0$; $F_c'(x) = \frac{x^3+1}{x^2}$; $F_c'(-1) = 0$

$F_d'(x) = \frac{3x^2+16}{4x^2}$; $F_d'(-1) \neq 0$; $F_e'(x) = \frac{-x^3-1}{x^2}$; $F_e'(-1) = 0$

$\Rightarrow$ F_c und F_e sind möglich.
G_{F_1} ist links und rechts der Definitionslücke streng monoton fallend.
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} F_c(x) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} F_c(x) = -\infty$
$\Rightarrow$ F_e könnte Stammfunktion sein.

Für f_2 gilt: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f_2(x) = \infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f_2(x) = -\infty$

$\Rightarrow$ f_2 hat bei $x_0 = 0$ eine Polstelle ungerader Ordnung;
$\Rightarrow$ F_2 hat bei $x_0 = 0$ eine Polstelle gerader Ordnung;
$\Rightarrow$ F_b und F_f sind möglich.

$F_b'(x) = \frac{-x^4-16}{2x^3}$; $F_b'(2) \neq 0$, $F_b'(-2) \neq 0$; $F_f'(x) = \frac{x^4-16}{2x^3}$; $F_f'(2) = 0$, $F_f'(-2) = 0$

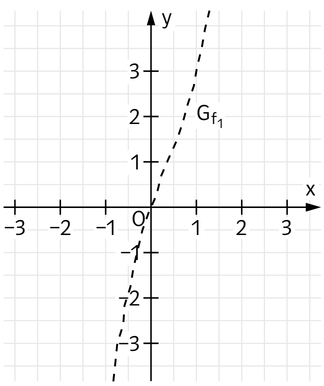
$\Rightarrow$ F_f könnte Stammfunktion sein.

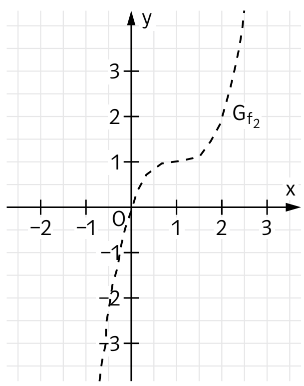
8 Fehler im *Schülerbuch*: Es muss heißen f_1, f_2 und f

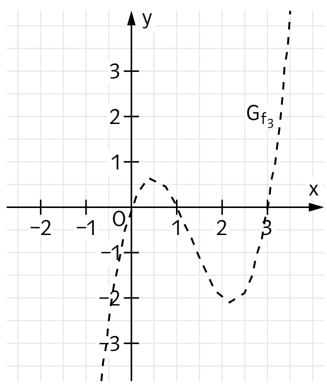
a) f_1:
Nullstellen: $x_0 = 0$
Extrema: $f_1'(x) = 3x^2 - 2x + 3$;
kein Extremum
Verhalten im Unendlichen:
$\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = +\infty$;
$\lim\limits_{x \to -\infty} f_1(x) = -\infty$

f_2:
Nullstellen: $x_0 = 0$
Extrema: $f_2'(x) = 3x^2 - 6x + 3$;
Terrassenpunkt: $T(1|1)$
Verhalten im Unendlichen:
$\lim\limits_{x \to -\infty} f_2(x) = -\infty$;
$\lim\limits_{x \to +\infty} f_2(x) = +\infty$

f_3:
Nullstellen: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$
Extrema: $f_3'(x) = 3x^2 - 8x + 3$;
Hochpunkt: $H\left(\frac{4-\sqrt{7}}{3} \middle| \frac{-20+14\sqrt{7}}{27}\right)$
Tiefpunkt: $T\left(\frac{4+\sqrt{7}}{3} \middle| \frac{-20-14\sqrt{7}}{27}\right)$
Verhalten im Unendlichen:
$\lim\limits_{x \to -\infty} f_3(x) = -\infty$;
$\lim\limits_{x \to +\infty} f_3(x) = +\infty$







Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

b) $f_a(x) = x^3 + ax^2 + 3x$
$f_a'(x) = 3x^2 + 2ax + 3$
$f_a'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1/2} = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 - 36}}{6}$

2 Extrema: $4a^2 - 36 > 0 \quad \Rightarrow \quad a^2 > 9 \quad \Rightarrow \quad a \in \mathbb{R} \setminus [-3; 3]$
kein Extremum: $4a^2 - 36 = 0 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad a \in \{-3; 3\}$
(Terassenpunkt)
kein Extremum: $4a^2 - 36 < 0 \quad \Rightarrow \quad a^2 < 9 \quad \Rightarrow \quad a \in]-3; 3[$

9 a) – gleicher Graphenverlauf
– Graph ist um $+c$ in y-Richtung verschoben $\Rightarrow$ Extremstellen bleiben gleich,
Extremwerte verschieben sich: $(x_E | y_E) \Rightarrow (x_E | y_E + c)$
– Anzahl der Extremstellen bleibt gleich

b) – Graph ist um den Faktor c in y-Richtung gestaucht bzw. gestreckt;
bei $c < 0$ auch noch an der x-Achse gespiegelt $\Rightarrow$ Extremstellen bleiben gleich,
Extremwerte verschieben sich: $(x_E | y_E) \Rightarrow (x_E | c \cdot y_E)$
(für $c < 0$ wird aus dem Maximum ein Minimum und umgekehrt)
– Anzahl der Extremstellen bleibt gleich
– Nullstellen bleiben gleich

c) – gleicher Graphenverlauf
– Graph ist um $-c$ in x-Richtung verschoben
– Extremstellen verschieben sich, Extremwerte bleiben gleich: $(x_E | y_E) \Rightarrow (x_E - c | y_E)$
– Anzahl der Extremstellen bleibt gleich

d) – Graph ist um den Faktor c in x-Richtung gestaucht bzw. gestreckt
– Extremstellen verschieben sich, Extremwerte bleiben gleich: $(x_E | y_E) \Rightarrow \left(\frac{x_E}{c}; y_E\right)$
– Anzahl der Extremstellen bleibt gleich

10 $f'(x) = a \cdot x \cdot (x-2) \cdot (x+2) = a(x^3 - 4x)$, da $f'(0) = f'(-2) = f'(2) = 0$
$f(x) = a\left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right) + c,\ c \in \mathbb{R}$
$f(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad c = 1$
$f(\pm 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot \left(\frac{81}{4} - 2 \cdot 9\right) + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{4}{9}$
$\Rightarrow \quad f(x) = -\frac{4}{9}\left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right) + 1 = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{8}{9}x^2 + 1$

11 1) – Ganzrationale Funktion 3. Grades $\Rightarrow$ f′ ganzrationale Funktion 2. Grades
– lokales Maximum bei $x_1 = -1$ und lokales Minimum bei $x_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = a \cdot (x^2 - 1),\ a > 0$
– Steigung an der Stelle $x_0 = 0$ beträgt etwa -3
$\Rightarrow$ B

2) – Ganzrationale Funktion 5. Grades $\Rightarrow$ f′ ganzrationale Funktion 4. Grades
– lokales Maximum bei $x_1 = -2$ und und $x_2 = 1$; lokales Minimum bei $x_3 = -1$ und $x_4 = 2$
$\Rightarrow \quad f'(x) = a \cdot (x^2 - 1)(x^2 - 4),\ a > 0$
– Steigung an der Stelle $x_0 = 0$ beträgt etwa 2
$\Rightarrow$ L

3) – Gebrochen rationale Funktion $\Rightarrow$ f′ gebrochen rationale Funktion
– Polstellen mit Vorzeichenwechsel bei $x_1 = -3$ und $x_2 = 3$
$\Rightarrow$ f′ hat Polstellen ohne Vorzeichenwechsel bei $x_1 = -3$ und $x_2 = 3$
– lokales Minimum bei $x_0 = 0$
$\Rightarrow$ U

4) – Ganzrationale Funktion 4. Grades $\Rightarrow$ f′ ganzrationale Funktion 3. Grades
– lokales Minimum bei $x_1 = -3$ und Terrassenpunkt bei $x_0 = 2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = ax^2(x+3),\ a > 0$
$\Rightarrow$ M

5) – Gebrochen rationale Funktion $\Rightarrow$ f′ gebrochen rationale Funktion
– Polstelle mit Vorzeichenwechsel bei $x_0 = -1$
$\Rightarrow$ f′ hat bei $x_0 = -1$ eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel
– lokales Minimum bei $x_1 = -3$ und lokales Maximum bei $x_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = a\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2},\ a > 0$
$\Rightarrow$ E

Lösungswort: BLUME

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

S. 79

12 a) $f'(x) = -4x \Rightarrow$ Steigung in $(x_0 | y_0)$: $m = -4x_0$

Tangente durch $(0|0)$: $y = mx \Rightarrow y = -4x_0 \cdot x$

$(x_0 | y_0)$ einsetzen: $y_0 = -2x_0^2 - 2$

$\Rightarrow -2x_0^2 - 2 = -4x_0 \cdot x_0$

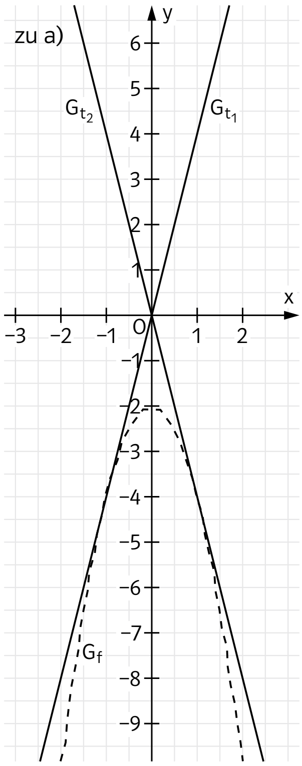
$\Rightarrow x_0 = \pm 1,\ y_0 = -4$

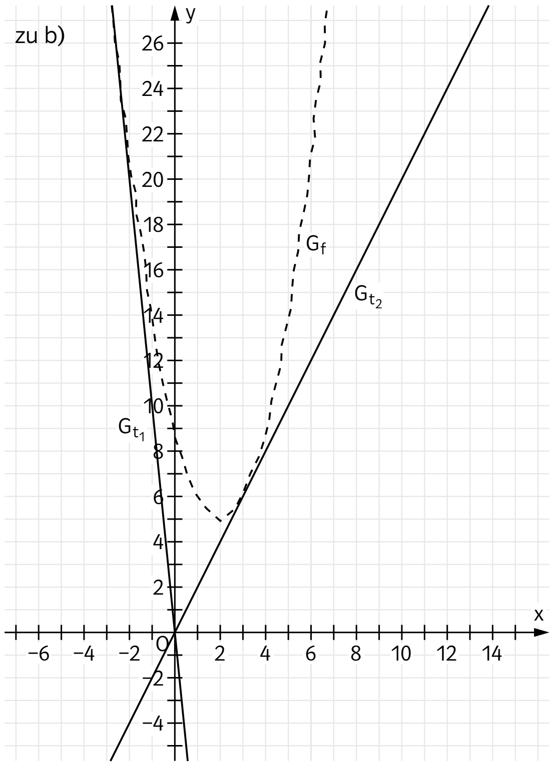
$\Rightarrow$ t_1: $y = 4x$, t_2: $y = -4x$; $P_1(-1|-4)$; $P_2(1|4)$

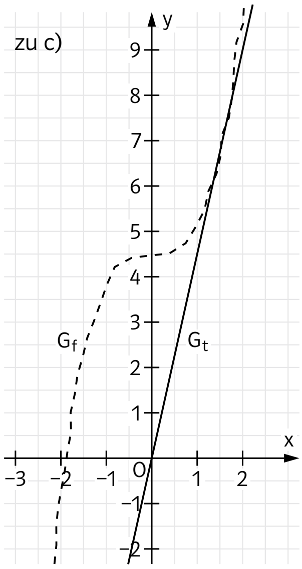
b) t_1: $y = -10x$; t_2: $y = 2x$; $P_1(-3|30)$; $P_2(3|6)$

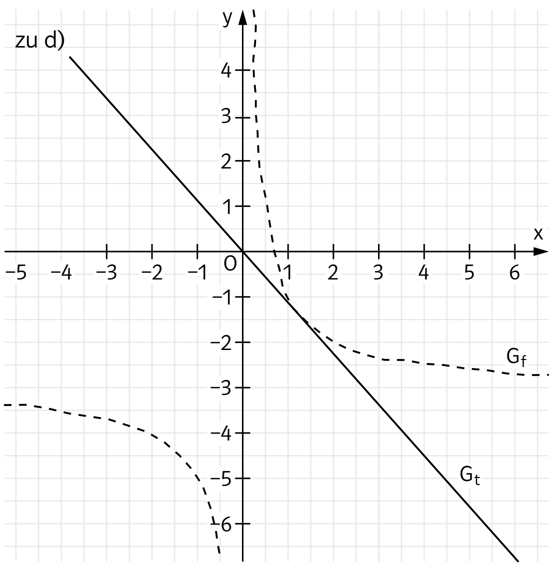
c) t: $y = \frac{9}{2}x$ $\quad P\left(\frac{3}{2}\middle|\frac{27}{4}\right)$

d) t: $y = -\frac{9}{8}x$ $\quad P\left(\frac{4}{3}\middle|-\frac{3}{2}\right)$



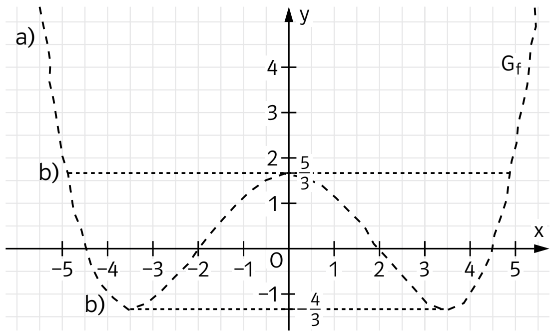






Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

13 a) Symmetrie:
achsensymmetrisch zur y-Achse
Schnittpunkte mit der x-Achse (Nullstellen):
$x_1 = -2\sqrt{2},\ x_2 = -2,\ x_3 = 2,\ x_4 = 2\sqrt{5}$
(über Substitution berechnet)
Schnittpunkt mit der y-Achse: $S_y\left(0\,\middle|\,\frac{5}{3}\right)$
Extrempunkte: $f'(x) = \frac{1}{12}(x^3 - 12x)$;
Hochpunkt: $H\left(0\,\middle|\,\frac{5}{3}\right)$;
Tiefpunkte: $T_1\left(-2\sqrt{3}\,\middle|\,-\frac{4}{3}\right)$, $T_2\left(2\sqrt{3}\,\middle|\,-\frac{4}{3}\right)$



b) $g(x) = \frac{1}{48}(x^4 - 24x^2 + 80) - c = 0$
Gesucht ist die Anzahl möglicher Nullstellen von g.

$c < -\frac{4}{3}$:	keine Lösung	(Verschiebung von G_f um mehr als $+\frac{4}{3}$ in y-Richtung)
$c = -\frac{4}{3}$:	2 Lösungen	(Verschiebung von G_f um $+\frac{4}{3}$ in y-Richtung)
$-\frac{4}{3} < c < \frac{5}{3}$:	4 Lösungen	(Verschiebung von G_f um weniger als $-\frac{5}{3}$ in y-Richtung)
$c = \frac{5}{3}$:	3 Lösungen	(Verschiebung von G_f um $-\frac{5}{3}$ in y-Richtung)
$c > \frac{5}{3}$:	2 Lösungen	(Verschiebung von G_f um mehr als $-\frac{5}{3}$ in y-Richtung)

14 a) $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$; $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$
G_f ist achsensymmetrisch zur y-Achse
$\Rightarrow$ f ist eine gerade Funktion $\Rightarrow$ $b = d = 0$
$f(x) = ax^4 + cx^2 + e$; $f'(x) = 4ax^3 + 2cx$
$A \in G_f \Rightarrow e = 2$
$B \in G_f \Rightarrow 0 = a + c + e \Rightarrow a = -c - 2$ (1)
B ist Tiefpunkt $\Rightarrow f'(1) = 0 \Rightarrow 4a + 2c = 0$ (2)
Aus (1) und (2) folgt: $a = 2,\ c = -4$
Nachweis, dass B ein Tiefpunkt ist:

f'	$f' < 0$	1	$f' > 0$
f	$\searrow$	Min	$\nearrow$

$\Rightarrow f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 2$

b) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
f ist eine ungerade Funktion $\Rightarrow$ $b = d = 0$
$f(x) = ax^3 + cx$; $f'(x) = 3ax^2 + c$
Terrassenpunkt in $(0|0)$: $f'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$
Nachweis, dass $(0|0)$ ein Terrassenpunkt ist:

$a < 0$:

f'	$f' < 0$	0	$f' < 0$
f	$\searrow$		$\searrow$

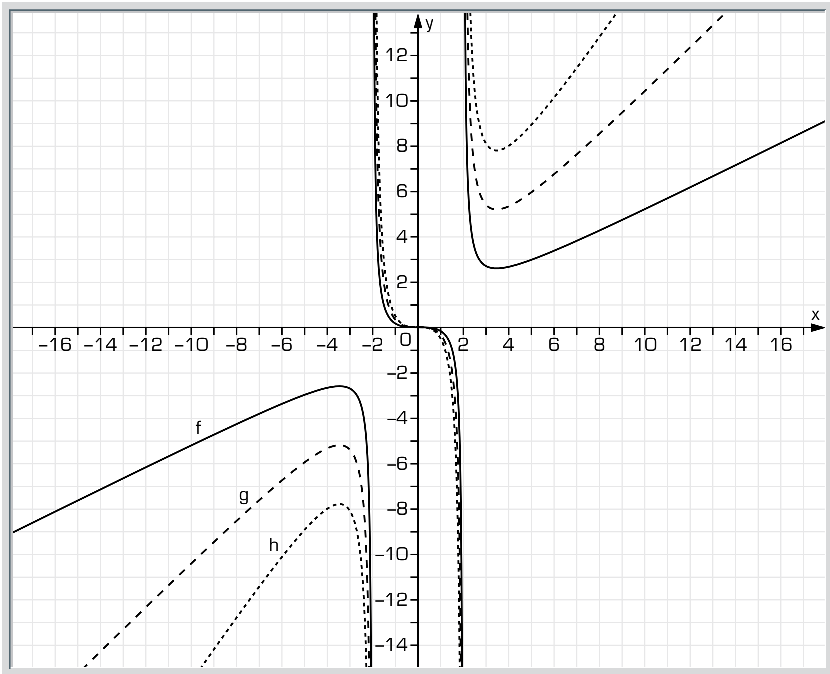
$a > 0$:

f'	$f' > 0$	0	$f' > 0$
f	$\searrow$		$\searrow$

$\Rightarrow f(x) = ax^3$; $a \in \mathbb{R}$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

15 a)



Bei allen drei Funktionen ist folgendes immer gleich:
Definitionslücken, Nullstellen, senkrechte Asymptoten, Verhalten in der Umgebung der Definitionslücken, Verhalten im Unendlichen

b) Für $t \in \mathbb{R},\ t > 0$ bewirkt der Faktor t eine Streckung bzw. Stauchung in y-Richtung. Dabei bleiben die unter Teilaufgabe a) genannten Eigenschaften erhalten.

c) Für $t > 0$ wird der Graph an der x-Achse gespiegelt. Dabei verändert sich das Verhalten in der Umgebung der Definitionslücken sowie das Verhalten im Unendlichen.

16 a)

f: waagrechte Asymptote $y = 1$ keine Symmetrie eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel	D und roter Graph
g: waagrechte Asymptote $y = 1$ achsensymmetrisch bzgl. y-Achse keine Polstelle	B und brauner Graph
h: punktsymmetrisch bzgl. Ursprung 2 Extrema f′ achsensymmetrisch bzgl. y-Achse	C und gelber Graph
k: eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel ein Extremum bei $x_0 = 1$ f′ hat eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel	A und violetter Graph

b) Individuelle Lösungen

17 a) Höhe: $f(0) = 187{,}5$ (m)
Breite: $f(x) = 0 \;\Rightarrow\; x_{1/2} \approx \pm 80{,}75$ (m)
$\Rightarrow$ 161,5 m breit

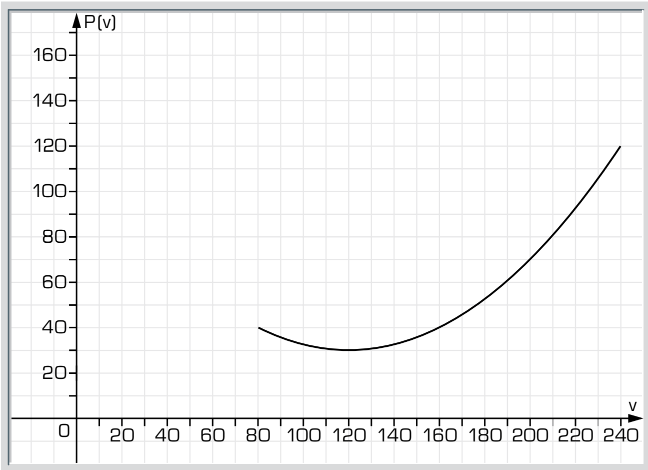
b) $f'(x) = -7{,}952 \cdot 10^{-6}x^3 - 3{,}158 \cdot 10^{-2}x$
$f'(80{,}75) \approx -6{,}7371 = \tan\alpha$
$\Rightarrow \alpha \approx 81{,}56°$

c) (1) $f(9+10) = f(19) \approx 181{,}5$ (m) (Bedingung für den horizontalen Sicherheitsabstand)
(2) $f(9) - 10 \approx 176{,}2$ (m) (Bedingung für den vertikalen Sicherheitsabstand)
Die maximale Flughöhe beträgt etwa 176,2 m.

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

S. 80

18 a)



b) $P(v) = 32{,}5 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{160}v^2 - \frac{3}{2}v + 87{,}5 = 0$

$\Rightarrow \quad v_1 = 100,\ v_2 = 140$

Es können die Geschwindigkeiten $100\,\frac{km}{h}$ und $140\,\frac{km}{h}$ geflogen werden.

c) $P'(v) = \frac{1}{80}v - \frac{3}{2}$

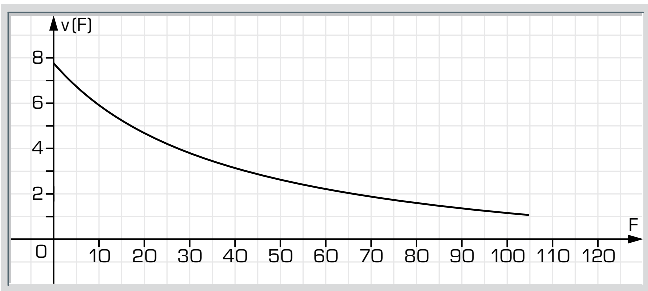
$P'(v) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_0 = 120$

oder: $v_0 = \left(\frac{100+140}{2}\right) = 120$

Die benötigte Leistung ist bei einer Geschwindigkeit von $120\,\frac{km}{h}$ am kleinsten, weil der Energieverbrauch (Benzin) pro Zeiteinheit am kleinsten ist. ((LS BW 11, S. 182, A7))

19 a) $v(F) = \frac{c}{F+a} - b$

b) $v(F) = \frac{370}{F+40} - 1{,}5$



c) $v(50) = 2\frac{11}{18} \approx 2{,}61$

Es ergibt sich eine Kontraktionsgeschwindigkeit von etwa $2{,}61\,\frac{m}{s}$.

20 a) $E'(x) = \frac{5}{9} \cdot \left(-8 + \frac{50}{x^2}\right)$

$E'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = +/(-)\,2{,}5 \quad ?$

Die Wirkung ist bei einer Dosis von $2{,}5\,\frac{\mu l}{kg}$ am größten.

$2{,}5\,\frac{\mu l}{kg} \cdot 85\,kg = 212{,}5\,\mu l$

Die optimale Dosis für eine 85 kg schwere Person beträgt 212,5 µl.

b) Das Präparat ist schädlich, wenn für die Aktiviät E gilt: $E < 0$.

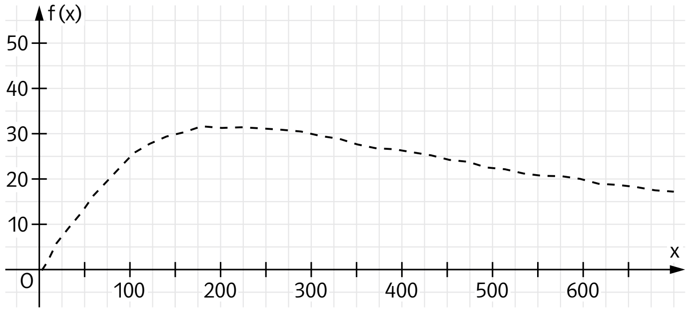
$E(10) = 0$

Ab einer Dosis von $10\,\frac{\mu l}{kg}$ ist das Präparat schädlich.

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

21 a) $a \approx 13\,462$; $b \approx 43\,846$

b) $f(x) = \frac{13\,462 \cdot x}{x^2 + 43\,846}$, $x \geqq 0$



$f'(x) = \frac{590\,254\,852 - 13\,462\,x^2}{(x^2 + 43\,846)^2}$, $x \geqq 0$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x_{1/2} \approx +/(-)\ 209{,}4$

Die optimale Düngerzugabe beträgt etwa $209{,}4\,\frac{\text{kg}}{\text{ha}}$.

22 Falsch.

Gegenbeispiel: Sei $\alpha = 360°$ und $\beta = 30°$.

$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{\cos 360°}{\cos 30°} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \sqrt{3} \cdot \cos\alpha = 2 \cdot \cos\beta$

Aber: $\alpha > \beta$

5 Das Newton-Verfahren

S. 81

1 a) Über den Mittelwert x-Koordinaten lässt sich ein Näherungswert x_0 für die Nullstelle von f ermitteln.

Hier: $x_0 = \frac{x_2 + x_1}{2} = \frac{3+2}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5$.

b) $f'(x) = 3x^2 - 10x + 8$

$m = f'(3) = 5$

$P_2 \in t$: $1 = 5 \cdot 3 + t \Rightarrow t = -14$

Tangente: t: $y = 5x - 14$

Nullstelle der Tangente t: $x_0 = 2{,}8$

$\Rightarrow$ Näherungswert für die Nullstelle von f: $x_0 = 2{,}8$

S. 83

2 a) $f(x) = x^3 + 2x - 1$; $f'(x) = 3x^2 + 2$

$f'(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ keine Extrema

Graphenverlauf von links unten nach rechts oben und $f(0) = -1$.

Die Nullstelle liegt rechts vom Ursprung $\Rightarrow$ Startwert x_0 sollte größer als 0 gewählt werden.

$f(0) = -1$, $f(1) = 2 \Rightarrow$ Startwert: $x_0 = 0{,}5$

Iterationsvorschrift: $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 + 2x_n - 1}{3x_n^2 + 2}$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$f(x_n)/f'(x_n)$	x_{n+1}
0	0,5	0,125	2,75	0,04545455	0,45454545
1	0,45454545	0,00300526	2,61983471	0,00114712	0,45339834
2	0,45339834	1,7929E-06	2,61671016	6,8516E-07	0,45339765
3	0,45339765	6,386E-13	2,61670829	2,4405E-13	0,45339765

$\Rightarrow x^* \approx 0{,}453$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

b) $f(x) = x^3+3x-6$; $f'(x) = 3x^2+3$
$f'(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ keine Extrema
Graphenverlauf von links unten nach rechts oben und $f(0) = -6$.
Die Nullstelle liegt rechts vom Ursprung $\Rightarrow$ Startwert x_0 sollte größer als 0 gewählt werden.
$f(1) = -2$, $f(2) = 8$ $\Rightarrow$ Startwert: $x_0 = 1{,}5$
Iterationsvorschrift: $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3+3x_n-6}{3x_n^2+3}$
$\Rightarrow$ $x^* \approx 1{,}288$

c) $f(x) = x^3+3x^2-8$; $f'(x) = 3x^2+6x$
$f'(x) = 0$ für $x_1 = -2$ und $x_2 = 0$
$G_{f'}$ ist eine nach oben geöffnete Parabel
$\Rightarrow$ lokales Maximum: $f(-2) = -4$; lokales Minimum: $f(0) = -8$
Die Nullstelle liegt rechts vom lokalen Minimum $\Rightarrow$ Startwert x_0 sollte größer als 0 gewählt werden.
$f(1) = -4$; $f(2) = 12$ $\Rightarrow$ Startwert: $x_0 = 1{,}5$
Iterationsvorschrift: $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3+3x_n^2-8}{3x_n^2+6x_n}$
$\Rightarrow$ $x^* \approx 1{,}355$

d) $f(x) = x^5-x^3+1$; $f'(x) = 5x^4-3x^2$
$f'(x) = 0$ für $x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$, $x_2 = 0$ (doppelt), $x_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$
lokales Maximum: $f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \approx 1{,}19$; lokales Minimum: $f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \approx 0{,}81$
Die Nullstelle liegt links vom lokalen Maximum $\Rightarrow$ Startwert x_0 sollte kleiner als -1 gewählt werden.
$f(-1) = 1$; $f(-2) = -23$ $\Rightarrow$ Startwert: $x_0 = -1{,}5$
Iterationsvorschrift: $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^5-x_n^3+1}{5x_n^4-3x_n^2}$
$\Rightarrow$ $x^* \approx -1{,}237$

e) $f(x) = 2x^3-x^2+x-1$; $f'(x) = 6x^2-2x+1$
$f'(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ keine Extrema
Graphenverlauf von links unten nach rechts oben und $f(0) = -1$.
Die Nullstelle liegt rechts vom Ursprung $\Rightarrow$ Startwert x_0 sollte größer als 0 gewählt werden.
$f(0) = -1$; $f(-1) = 1$ $\Rightarrow$ Startwert: $x_0 = 0{,}5$
Iterationsvorschrift: $x_{n+1} = x_n - \frac{2x_n^3-x_n^2+x_n-1}{6x_n^2-2x_n+1}$
$\Rightarrow$ $x^* \approx -0{,}739$

f) $f(x) = \frac{3}{x}-1+x^4$; $f'(x) = -\frac{3}{x^2}+4x^3$
$f'(x) = 0$ für $x_1 = \sqrt[5]{\frac{3}{4}}$; lokales Minimum: $f\left(\sqrt[5]{\frac{3}{4}}\right) \approx 2{,}97$
Die Nullstelle liegt rechts vom lokalen Minimum $\Rightarrow$ Startwert x_0 sollte kleiner als 0 gewählt werden.
$f(-2) = 13{,}5$; $f(-1) = -3$ $\Rightarrow$ Startwert: $x_0 = -1{,}5$
Iterationsvorschrift: $x_{n+1} = x_n - \frac{\frac{3}{x_n}-1+x_n^4}{-\frac{3}{x_n^2}+4x_n^3}$
$\Rightarrow$ $x^* \approx -1{,}341$

g) $f(x) = \frac{1}{x}+x^4-1$; $f'(x) = -\frac{1}{x^2}+4x^3$
$f'(x) = 0$ für $x_1 = \sqrt[5]{\frac{1}{4}}$; lokales Minimum: $f\left(\sqrt[5]{\frac{1}{4}}\right) \approx 0{,}65$
Die Nullstelle liegt rechts vom lokalen Minimum $\Rightarrow$ Startwert x_0 sollte kleiner als 0 gewählt werden.
$f(-2) = 13{,}5$; $f(-1) = -1$ $\Rightarrow$ Startwert: $x_0 = -1{,}5$
Iterationsvorschrift: $x_{n+1} = x_n - \frac{\frac{1}{x_n}+x^4-1}{-\frac{1}{x_n^2}+4x_n^3}$
$\Rightarrow$ $x^* \approx -1{,}167$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

3 a) $f'(x) = 3x^2 + 6x$

1. Nullstelle: Startwert $x_0 = -2{,}5 \Rightarrow x_1 \approx -2{,}532$
2. Nullstelle: Startwert $x_0 = -1{,}5 \Rightarrow x_2 \approx -1{,}347$
3. Nullstelle: Startwert $x_0 = 0{,}5 \Rightarrow x_3 \approx 0{,}879$

b) $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 8x + 1$

1. Nullstelle: Startwert $x_0 = -2{,}5 \Rightarrow x_1 \approx -2{,}635$
2. Nullstelle: Startwert $x_0 = -0{,}5 \Rightarrow x_2 \approx -0{,}246$
3. Nullstelle: Startwert $x_0 = 0{,}5 \Rightarrow x_3 \approx 0{,}603$
4. Nullstelle: Startwert $x_0 = 1{,}5 \Rightarrow x_4 \approx 1{,}278$

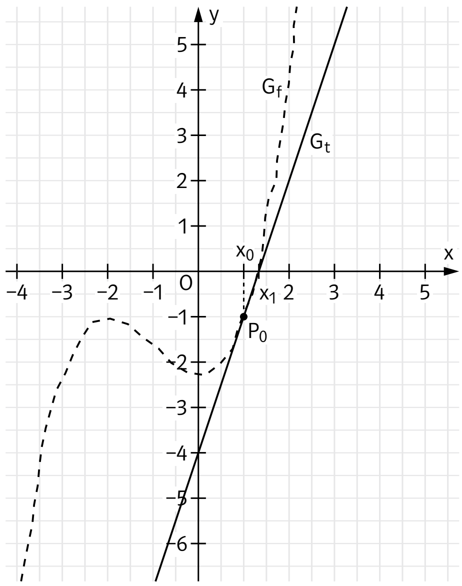
c) $f'(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + 4}{(x-1)^2}$

1. Nullstelle: Startwert $x_0 = -1{,}5 \Rightarrow x_1 \approx -1{,}532$
2. Nullstelle: Startwert $x_0 = -0{,}5 \Rightarrow x_2 \approx -0{,}347$
3. Nullstelle: Startwert $x_0 = 1{,}5 \Rightarrow x_3 \approx 1{,}879$

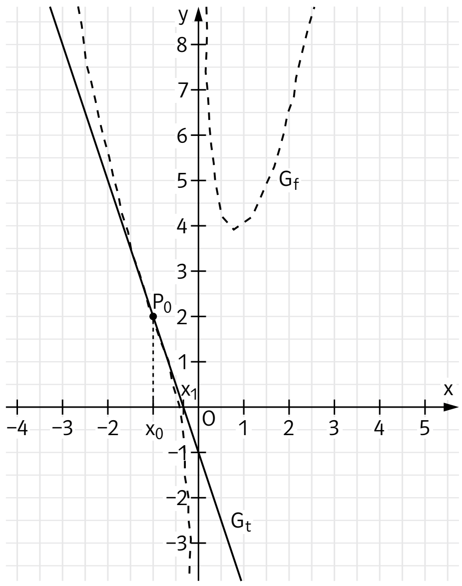
d) $f'(x) = \frac{-3x^4 + 8x^3 - x^2 - 10x + 1}{(1-x)^3}$

1. Nullstelle: Startwert $x_0 = -1{,}5 \Rightarrow x_1 \approx -1{,}332$
2. Nullstelle: Startwert $x_0 = -0{,}5 \Rightarrow x_2 \approx -0{,}521$
3. Nullstelle: Startwert $x_0 = 0{,}5 \Rightarrow x_3 \approx 0{,}420$
4. Nullstelle: Startwert $x_0 = 3{,}5 \Rightarrow x_4 \approx 3{,}432$

4 a) Symmetrie: keine
Extrempunkte: $f'(x) = x^2 + 2x$;
Hochpunkt: $H(-2\,|\,-1)$;
Tiefpunkt: $T\left(0\,|\,-\frac{7}{3}\right)$
Graphenverlauf von links unten nach rechts oben
Die Tangente durch $P_0(1\,|\,-1)$ mit $m = f'(1) = 3$ schneidet die x-Achse bei $x_1 = \frac{4}{3}$.



b) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Polstelle bei $x = 0$ mit Vorzeichenwechsel $-/+$
$\Rightarrow$ senkrechte Tangente $x = 0$
Verhalten im Unendlichen: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$
Extrempunkte: $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 2x$;
Tiefpunkt: $T(0{,}79\,|\,3{,}89)$
Die Tangente durch $P_0(-1\,|\,2)$ mit $m = f'(-1) = -3$ schneidet die x-Achse bei $x_1 = -\frac{1}{3}$.



Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

5 a) $f'(x) = 2x+3+\frac{1}{x^2}$; $f'(x) = 0$ für $2x+3+\frac{1}{x^2} = 0$

Bestimmung der Nullstelle x* der Funktion g mit dem Term $g(x) = 2x+3+\frac{1}{x^2}$:

$g'(x) = 2-\frac{2}{x^3}$

$g'(x) = 0$ für $x_1 = 1$

lokales Minimum von g: $g(1) = 6$

Verhalten von g im Unendlichen: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$

Die Nullstelle liegt links vom lokalen Minimum $\Rightarrow$ Startwert x_0 sollte kleiner als 1 gewählt werden.

$g(-1) = 2$, $g(-2) = -0{,}75$ $\Rightarrow$ Startwert: $x_0 = -1{,}5$

Iterationsvorschrift: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{2x_n+3+\frac{1}{x_n^2}}{2-\frac{2}{x_n^3}}$

$x^* \approx -1{,}68$ $\Rightarrow$ Extremstelle: $x^* \approx -1{,}68$

b) $f'(x) = 4x-1-\frac{1}{x^2} = g(x)$

$g'(x) = 4+\frac{2}{x^3}$; $g'(x) = 0$ für $x_1 = \sqrt[3]{0{,}5}$

Startwert: $x_0 = 0{,}5$

Iterationsvorschrift: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{4x_n-1-\frac{1}{x_n^2}}{4+\frac{2}{x_n^3}}$

Extremstelle: $x^* \approx 0{,}72$

c) $f'(x) = \frac{12x^3-36x^2-48}{(6x-12)^2} = \frac{x^3-3x^2-4}{3(x-2)^2}$; $g(x) = x^3-3x^2-4$

$g'(x) = 3x^2-6x = 3x(x-2)$; $g'(x) = 0$ für $(x_1 = 0)$, $x_2 = 2$

Startwert: $x_0 = 3{,}5$

Iterationsvorschrift: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^3-3x_n^2-4}{3x_n^2-6x_n}$

Extremstelle: $x^* \approx 3{,}36$

d) $f'(x) = \frac{4x^3-6x^2+3}{(x-1)^2}$; $g(x) = 4x^3-6x^2+3$

$g'(x) = 12x^2-12x = 12x(x-1)$; $g'(x) = 0$ für $x_1 = 0$, $(x_2 = 1)$

Startwert: $x_0 = -0{,}5$

Iterationsvorschrift: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{4x_n^3-6x_n^2+3}{12x_n^2-12x_n}$

Extremstelle: $x^* \approx -0{,}60$

6 a) $f'(x) = 2x^3-3x^2$

$f'(x) = m = 12$ $\Rightarrow$ $2x^3-3x^2-12 = 0$

Bestimmung der Nullstelle x* der Funktion g mit dem Term $g(x) = 2x^3-3x^2-12$:

$g'(x) = 6x^2-6x = 6x(x-1)$

$g(2) = -8$; $g(3) = 15$ $\Rightarrow$ Startwert: $x_0 = 2{,}5$

Iterationsvorschrift: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{2x_n^3-3x_n^2-12}{6x_n^2-6x_n}$

$\Rightarrow$ $x^* \approx 2{,}478$

b) $f'(x) = 0{,}4x^3-2x-1$

$g(x) = 0{,}4x^3-2x-2$; $g'(x) = 1{,}2x^2-2$

Startwert: $x_0 = 2{,}5$

Iterationsvorschrift: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{0{,}4x_n^3-2x_n-2}{1{,}2x_n^2-2}$

$\Rightarrow$ $x^* \approx 2{,}627$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

c) $f'(x) = 2x - \frac{2}{x^3}$

$g(x) = 2x - \frac{2}{x^3} - 5;\quad g'(x) = 2 + \frac{6}{x^4}$

Startwert: $x_0 = 2{,}5$

Iterationsvorschrift: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{2x_n - \frac{2}{x_n^3} - 5}{2 + \frac{6}{x_n^4}}$

$\Rightarrow\quad x^* \approx 2{,}560$

d) $f'(x) = \frac{2x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{(x-1)^2}$

$g(x) = \frac{2x^3 - 8x^2 + 10x - 5}{(x-1)^2};\quad g'(x) = \frac{2x^3 - 6x^2 + 6x}{(x-1)^3}$

Startwert: $x_0 = 2{,}5$

Iterationsvorschrift: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{\frac{2x_n^3 - 8x_n^2 + 10x_n - 5}{(x_n-1)^2}}{\frac{2x_n^3 - 6x_n^2 + 6x_n}{(x_n-1)^3}}$

$\Rightarrow\quad x^* \approx 2{,}297$

7 a) $g(x) = h(x) \quad\Rightarrow\quad x^3 - x^2 - 1 = 0$

Bestimmung der Nullstelle x^* der Funktion f mit dem Term $f(x) = x^3 - x^2 - 1$:

$f'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x-2)$

lokales Maximum von f: $f(0) = -1$

lokales Minimum von f: $f\left(\frac{2}{3}\right) = -1\frac{4}{27}$

G_f verläuft von links unten nach rechts oben.

Die Nullstelle liegt rechts vom lokalen Minimum $\Rightarrow$ Startwert x_0 sollte größer als 1 gewählt werden.

$f(1) = -1;\ f(2) = 3 \quad\Rightarrow\quad$ Startwert: $x_0 = 1{,}5$

Iterationsvorschrift: $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - x_n^2 - 1}{3x_n^2 - 2x_n}$

$\Rightarrow\quad x^* \approx 1{,}47$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 2x - 2;\quad f'(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2$

Startwert: $x_0 = 0{,}5$

Iterationsvorschrift: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{\frac{1}{2}x_n^3 + 2x_n - 2}{\frac{3}{2}x_n^2 + 2}$

$\Rightarrow\quad x^* \approx 0{,}85$

c) $f(x) = x^4 - 2x^3 - \frac{1}{x};\quad f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + \frac{1}{x^2}$

Startwert: $x_0 = 2{,}5$

Iterationsvorschrift: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^4 - 2x_n^3 - \frac{1}{x_n}}{4x_n^3 - 6x_n^2 + \frac{1}{x_n^2}}$

$\Rightarrow\quad x^* \approx 2{,}08$

d) $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 2}{x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 2};$

$f'(x) = \frac{-x^6 + 2x^5 + 4x^4 + 10x^3 + 11x^2 + 8x + 2}{(x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 2)^2}$

Startwert: $x_0 = 1{,}5$

Iterationsvorschrift: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$\Rightarrow\quad x^* \approx 1{,}69$

8 Der Preis ist um etwa 11,9 % erhöht worden. Vor der Verteuerung war die Fahrkarte um etwa 10,6 % günstiger.

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2