II Lokales und globales Differenzieren

1 Differenzenquotient und mittlere Änderungsrate

S. 28

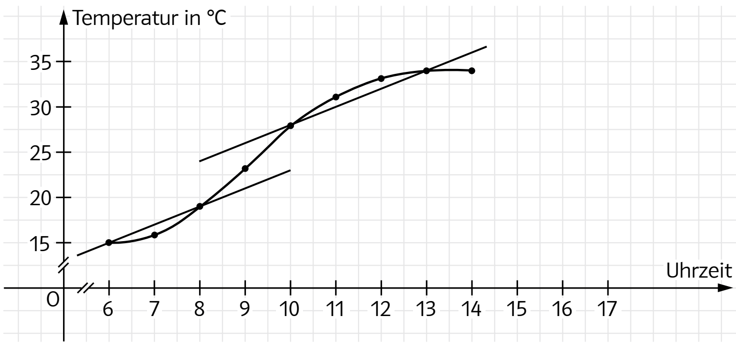
1 a) Da der dargestellte Graph keine Gerade ist, verläuft die Temperaturzunahme nicht gleichmäßig. Temperaturzunahme zwischen 6 Uhr und 7 Uhr 1 °C, zwischen 7 Uhr und 8 Uhr aber 3 °C.

b) Zwischen 6 Uhr und 8 Uhr: $\frac{19\,°C - 15\,°C}{2\,h} = 2\frac{°C}{h}$

Zwischen 7 Uhr und 10 Uhr: $\frac{28\,°C - 16\,°C}{3\,h} = 4\frac{°C}{h}$

Zwischen 9 Uhr und 13 Uhr: $\frac{34\,°C - 23\,°C}{4\,h} = 2{,}75\frac{°C}{h}$

c)



Es fällt auf, dass die beiden Geraden parallel verlaufen. Die Temperaturzunahme ist im Mittel gleich.

S. 29

2 a) $D_f = \mathbb{R}$; $m_1 = \frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} = \frac{-2+1}{1} = -1$; $m_2 = 1$; $m_3 = 4$; $m_4 = 3$

b) $D_f = \mathbb{R}$; $m_1 = -9$; $m_2 = -7$; $m_3 = -4$; $m_4 = -5$

c) $D_f = [-2; +\infty[$ $m_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2} \approx 0{,}21$; $m_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2} \approx 0{,}16$; $m_3 = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right) \approx 0{,}13$;

$m_4 = \frac{1}{6}\left(\sqrt{5} - \sqrt{2}\right) \approx 0{,}14$

d) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ $m_1 = -6$; $m_2 = -2$; $m_3 = -0{,}8$; $m_4 = -1{,}2$

e) $D_f = \mathbb{R}$; $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 5$

f) $D_f = \mathbb{R}$; $m_1 = \frac{1}{2}$; $m_2 = 1$; $m_3 = 3$; $m_4 = \frac{7}{3} \approx 2{,}33$

3 a) Steigung durch $P_1(0|0)$ und $Q_1(3|-0{,}3)$: $m_1 = -0{,}1$
Steigung durch $P_2(0|0)$ und $Q_2(4|2{,}4)$: $m_2 = 0{,}6$
Steigung durch $P_3(0|0)$ und $Q_3(5|7{,}5)$: $m_3 = 1{,}5$
Steigung durch $P_4(1|-0{,}9)$ und $Q_4(5|7{,}5)$: $m_4 = 2{,}1$
Steigung durch $P_5(1|-0{,}9)$ und $Q_5(4|2{,}4)$: $m_5 = 0{,}3$

größte Steigung:
Sekante durch P_4 und Q_4
kleinste Steigung:
Sekante durch P_1 und Q_1

b) 1. Möglichkeit: Berechnung
2. Möglichkeit: Skizze des Graphen $y = 0{,}1x^3 - x = 0{,}1x \cdot (x - \sqrt{10}) \cdot (x + \sqrt{10})$ erstellen und die Punkte P_1, P_4, P_5 und Q_1, Q_2, Q_3, Q_5 markieren.
Es wird deutlich, dass nur die Steigung der Sekante durch P_1 und Q_1 negativ ist und somit die kleinste Steigung ist.
Die Sekante durch P_4 und Q_4 hat die größte Steigung.

c) Sekante 1: $y = -0{,}1x$; Sekante 2: $y = 0{,}6x$; Sekante 3: $y = 1{,}5x$;
Sekante 4: $y = 2{,}1x - 3$; Sekante 5: $y = 0{,}3x + 1{,}2$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

S. 30

4 a) Der Zeitraum umfasst 39 Monate.

$m_S = \frac{95\,254 - 53\,823}{39} \approx 1062$, die Anzahl der offenen Stellen nimmt im Mittel monatlich um 1062 zu.

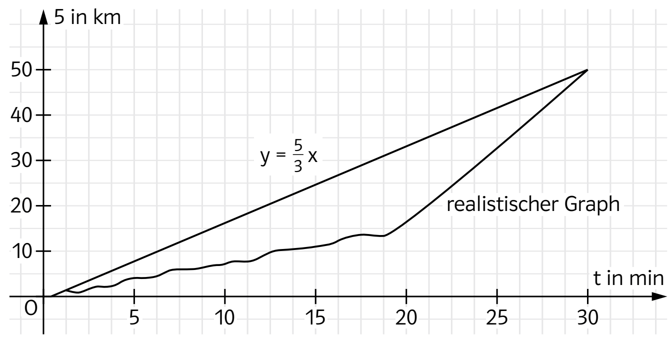
$m_A = \frac{22\,879 - 63\,901}{39} \approx -1052$, die Anzahl der Arbeitslosen nimmt im Mittel monatlich um 1052 ab.

b) Der Unterschied verändert sich im Mittel um $1062 + 1052 = 2114$ pro Monat.

c) Mögliche Zeiträume: Januar 2006 – März 2006; Januar 2007 – Februar 2007;
Januar 2005 bis zu beliebigem Monat vor November 2007

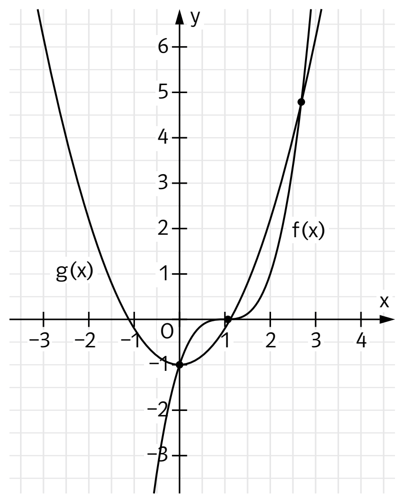
d) Mögliche Zeiträume: Juni 2006 – Dezember 2006; Januar 2007 – Juli 2007,
Mai 2006 – November 2007

5



Der Wagen fährt durchschnittlich mit $\frac{5}{3}\,\frac{\text{km}}{\text{min}}$, so sind $100\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
Während der ersten 20 km ist die Steigung des realistischen Graphen nie größer als $\frac{5}{3}\,\frac{\text{km}}{\text{min}}$, danach eigentlich immer.

6



Die beiden Graphen schneiden sich in 3 Punkten.
Zwischen je zwei x-Werten der Schnittpunkte haben f und g dieselbe Änderungsrate.

$$(x-1)^3 = 0{,}8x^2 - 1 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0{,}8x^2 - 1$$
$$\Rightarrow x^3 - 3{,}8x^2 + 3x = 0$$
$$x(x^2 - 3{,}8x + 3) = 0$$
$$x_1 = 0;$$
$$x_{2/3} = 3{,}8 \pm \frac{\sqrt{14{,}44 - 12}}{2} = \frac{3{,}8 \pm \sqrt{2{,}44}}{2}$$
$$x_2 \approx 2{,}68; \quad x_3 \approx 1{,}12$$
$$\Rightarrow \quad I_1 = [0;1{,}12]; \quad I_2 = [1{,}12;2{,}68]; \quad I_3 = [0;2{,}68]$$

7 a) $0 \leqq t < 6\,s$: der Fahrstuhl beschleunigt aus dem Stillstand. (aufwärts)
$6 \leqq t < 13\,s$: der Fahrstuhl fährt mit konstanter Geschwindigkeit.
$13 \leqq t < 16\,s$: der Fahrstuhl bremst bis zum Stillstand.
$16 \leqq t < 26\,s$: der Fahrstuhl steht still.
$26 \leqq t < 29\,s$: der Fahrstuhl beschleunigt. (abwärts)
$29 \leqq t < 32\,s$: der Fahrstuhl fährt mit konstanter Geschwindigkeit.
$32 \leqq t < 36\,s$: der Fahrstuhl bremst bis zum Stillstand.

b) $[0;16]$: $\frac{(10-0)\,m}{(16-0)\,s} = 0{,}625\,\frac{m}{s}$; $[16;26]$: $\frac{(10-10)\,m}{(26-16)\,s} = 0\,\frac{m}{s}$; $[26;36]$: $\frac{(5-10)\,m}{(36-26)\,s} = -0{,}5\,\frac{m}{s}$

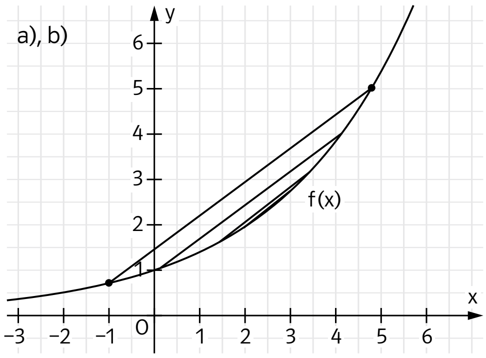
Die Werte geben jeweils die durchschnittliche Geschwindigkeit des Fahrstuhls im angegebenen Intervall an.
Der negative Wert drückt aus, dass sich der Fahrstuhl nach unten bewegt.

c) Der Fahrstuhl braucht weniger als 80 s, da er nur einmal beschleunigt und einmal bremst. Ines berücksichtigt bei ihren Überlegungen je fünf Beschleunigungs- und Bremsphasen. In diesen Phasen ist die durchschnittliche Geschwindigkeit jeweils geringer als mit konstanter Geschwindigkeit.

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

d) 20. Stock: $2{,}5\,m \cdot 20 = 50\,m$ Strecke
Der Fahrstuhl beschleunigt 6 s (≙ 2,5 m) und bremst 3 s (≙ 1,5 m), also fährt er $50\,m - (2{,}5 + 1{,}5)\,m = 46\,m$ mit konstanter Geschwindigkeit $v = \frac{6}{7}\frac{m}{s}$.
Für die 46 m braucht er $\frac{46\,m}{\frac{6}{7}\frac{m}{s}} = 54\,s$.
Insgesamt braucht er $54\,s + 6\,s + 3\,s = 63\,s$.

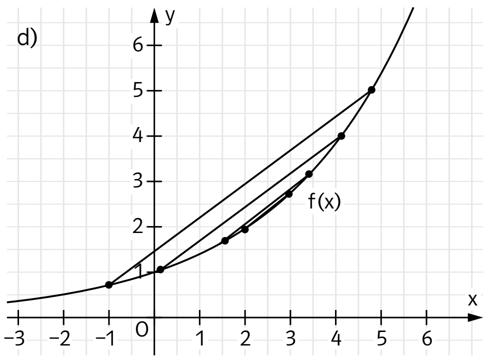
8 a), b)



$r_I = \frac{(1{,}4^5 - 1{,}4^{-1})}{(5-(-1))} \approx 0{,}78$

c) Individuelle Lösungen.

d)



Länge 4: [≈ 0,3; ≈ 4,3]
Länge 2: [≈ 1,4; ≈ 3,4]
Länge 1: [≈ 2; ≈3]

9 Steigung der Strecke [AB]: $m = \frac{3-1}{4+2} = \frac{1}{3}$
Steigung der Senkrechten: $m_2 = -3$
Mittelpunkt der Strecke [AB]: $M(1|2)$
Gerade durch M mit Steigung m_2: $2 = -3 \cdot 1 + t \Rightarrow t = 5$
Gleichung der Mittelsenkrechten: $y = -3x + 5$

2 Differentialquotient und lokale Änderungsrate

S. 31

1 a) Da der Graph von B eine Gerade ist, legt B in gleich langen Zeitintervallen immer die gleich lange Strecke zurück und fährt somit mit konstanter Geschwindigkeit.
$V_B = \frac{1100\,m}{30\,s} = 36{,}\overline{6}\,\frac{m}{s} = 132\,\frac{km}{h}$
Da der Graph von A immer flacher wird, legt A in gleich langen Zeiten immer geringere Strecken zurück, somit wird die Geschwindigkeit von A immer geringer.
b) Der Graph von A ist beim ersten Treffen steiler. A überholt B und ist somit schneller.
c) Bei etwa 20 s.
d) Man könnte eine Tangente an den Graphen von A in dem Punkt legen, in dem sich A und B „treffen". Die Steigung dieser Tangente ist dann ein Maß für die Geschwindigkeit von A.

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

S. 33

2

	x	2,5	2,9	2,99	2,999	… $x_0 = 3$ …	3,001	3,01	3,1	3,5
a)	$\frac{0{,}25x^2-2-0{,}25}{x-3}$	1,375	1,475	1,4975	1,49975	1,5	1,50025	1,5025	1,525	1,625
b)	$\frac{x-0{,}1x^3-0{,}3}{x-3}$	−1,275	−1,611	−1,69101	−1,699	−1,7	−1,7009	−1,70901	−1,791	−2,175
c)	$\frac{2x+2-8}{x-3}$	2	2	2	2	2	2	2	2	2
d)	$\frac{0{,}5-2^x-4}{x-3}$	2,343	2,6787	2,763	2,7716	2,773	2,774	2,7822	2,871	3,3137
e)	$\frac{-2-(-2)}{x-3}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
f)	$\frac{\sin x-0{,}141}{x-3}$	−0,915	−0,98	−0,989	−0,990	−0,99	−0,990	−0,991	−0,995	−0,984

3 $s(1) = 2$; $s(2) = 8$; $s(3) = 18$

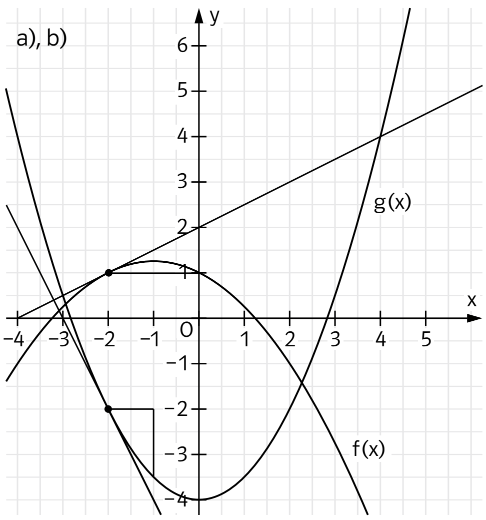
t	0	0,5	0,9	0,99	0,999	… …	1,001	1,01	1,1	1,5	2
$\frac{2t^2-2}{t-1}$	2	3	3,8	3,98	3,998	4	4,002	4,02	4,2	5	6

t	1	1,5	1,9	1,99	1,999	… …	2,001	2,01	2,2	2,5	3
$\frac{2t^2-8}{t-2}$	6	7	7,8	7,98	7,998	8	8,002	8,02	8,4	9	10

t	2	2,5	2,9	2,99	2,999	… …	3,001	3,01	3,3	3,5	4
$\frac{2t^2-18}{t-3}$	10	11	11,8	11,98	11,998	12	12,002	12,02	12,6	13	14

S. 34

4 a), b)



c) Steigung der Tangente an G_f: 0,5
Steigung der Tangente an G_g: −2
Individuelle Lösungen für die Steigungsdreiecke.
Die Steigungen beschreiben die lokale Änderungsrate von f bzw. von g an der Stelle $x = -2$

d) Die beiden Tangenten sind zueinander senkrecht.
Der Wert des Produkts ihrer Steigungen ist −1:
$f'(-2) \cdot g'(-2) = 0{,}5 \cdot (-2) = -1$

5

$x_1 = -2$	−3,9	G
$x_2 = -1$	1,2	I
$x_3 = 0$	2,0	T
$x_4 = 1$	0,6	H
$x_5 = 2$	−1,2	C
$x_6 = 3$	−1,5	I
$x_7 = 4$	1,6	R

Lösungswort (von hinten gelesen): RICHTIG

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

6 a) Wassermenge $W(t)$ eines Auflaufbeckens G hat Einheit m^3 O; Volumenänderung N hat Einheit $\frac{m^3}{s}$ G; GONG

Länge einer Pflanze D hat Einheit m I; Wachstumsgeschwindigkeit E hat Einheit $\frac{m^3}{s}$ B; DIEB

Konzentration $K(t)$ eines Medikaments F hat Einheit $\frac{mg}{l}$ E; Konzentrationsänderung L hat Einheit $\frac{mg}{l \cdot h}$ D; FELD

Höhe $h(x)$ H hat Einheit m A; Steigung bzw. Gefälle U hat keine Einheit S; HAUS

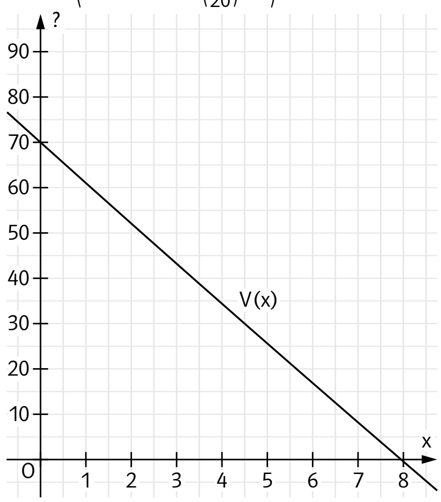
Geschwindigkeit $v(t)$ T hat Einheit $\frac{m}{s}$ E; Beschleunigung S hat Einheit $\frac{m}{s^2}$ T; TEST

b) Die ideale Änderungsrate hat die Einheit $\frac{e_1}{e_2}$.

7 Individuelle Lösungen.
Lösungsidee mit Hilfe der Temperatur einer Wassermenge. Diese kühlt z.B. von 90° auf 25° ab.
Mittlere Änderungsrate m: Sie gibt an, um wieviel °C sich das Wasser im Mittel pro Zeiteinheit (z.B. Sekunde) innerhalb der Zeit $t_1 - t_0$ abgekühlt hat.
Lokale (oder im Falle der Zeit momentane) Änderungsrate m_{t_0}: sie gibt an, wie stark die Änderung der Wassertemperatur zum festen Zeitpunkt t_0 ist.
Die mittlere Änderungsrate beschreibt die Änderung der Temperatur zwischen zwei unterschiedlichen Zeitpunkten.
Die ideale Änderungsrate beschreibt die Änderung der Temperatur zu einem festen Zeitpunkt.
Zusammenhang: Die ideale Änderungsrate m_{t_0} ergibt sich anschaulich mit Hilfe der mittleren Änderungsrate m durch „Heranrücken" von t_1 an t_0.
Mathematisch geschieht dies durch Grenzwertbildung: $m_{t_0} = \lim\limits_{t \to t_0} m$

8 a) $V(0) = \left(90 - 20 \cdot \cos\left(\frac{0}{20}\right) - 0\right)^{l} = (90-20)^{l} = 70\,l$

b)



$V(x) = 0$ wenn $x = 7{,}95$, also kann der PKW 795 km weit fahren.

c) Vorgehensweise wie im Beispiel 1 (*Schülerbuchseite S. 32*).

100 km: $x_0 = 1$: $V(1) \approx 61{,}025$ $\quad m_1 = \frac{V(x)-V(1)}{x-1} = -8{,}95$ $\left(\text{in } \frac{\text{Liter}}{\text{km}}\right)$

500 km: $x_0 = 5$: $V(5) \approx 25{,}622$ $\quad m_5 = \frac{V(x)-V(5)}{x-5} = -8{,}75$ $\left(\text{in } \frac{\text{Liter}}{\text{km}}\right)$

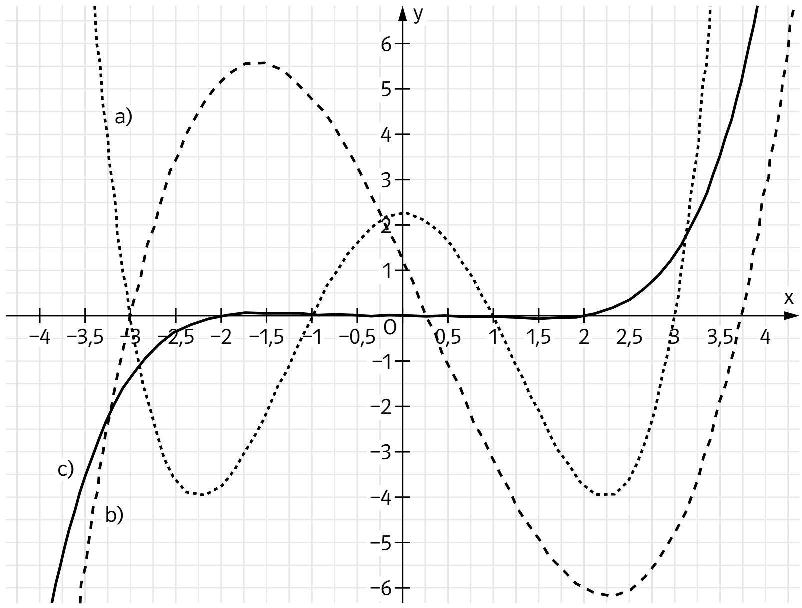
Interpretation: der ideale Spritverbrauch beträgt bei 100 km 8,95 Liter pro Kilometer, und bei 500 km 8,75 Liter pro Kilometer.

9 a) $g_{-4}(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 1$
$g_{-4}(-2) = 9$; a mit Hilfe einer Tabelle kann der Wert 0 ermittelt werden.

b) Die zugehörige Funktion hat für Werte für $a \leq \frac{4}{3}$ Stellen, an denen die ideale Änderungsrate den Wert Null hat.

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

10



a) Nullstellen für $x_1 = -3$; $x_2 = -1$; $x_3 = 1$; $x_4 = 3$;
3 Stellen, für die die ideale Änderungsrate den Wert Null hat.
b) Nullstellen für $x_1 = -3$; $x_2 = 2-\sqrt{3}$; $x_3 = 2+\sqrt{3}$;
2 Stellen, für die die ideale Änderungsrate den Wert Null annimmt.
c) Nullstellen für $x_1 = -2$; $x_2 = 0$ (dreifach); $x_3 = 2$;
3 Stellen, für die die ideale Änderungsrate den Wert Null annimmt.

S. 35

11 a) $h(t) = -\frac{19}{4} \cdot t \cdot (t-4) = -4{,}75t^2 + 19t$
Mit Hilfe einer Tabelle kann die Geschwindigkeit zu den verschiedenen Zeitpunkten mit
$\frac{h(t)-h(t_0)}{t-t_0}$ bestimmt werden.
Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ ist 19, für $t_1 = 1$ ist 9,5, für $t_2 = 2$ ist 0 und für $t_3 = 3$ ist −9,5. Das negative Vorzeichen drückt aus, dass der Körper nach unten fällt.

12 Lokale Änderungsrate wird mit $\frac{A(a)-A(4)}{a-4} = \frac{a^2-16}{a-4}$ bestimmt. Ergebnis: 8.

13 a) (1) $V(a) = a^3$
(2) Im Tetraeder teilt der Fußpunkt der Tetraederhöhe h_T die Höhe h_G der Dreiecksgrundfläche im Verhältnis 1 : 2.
Somit gilt für $h_T = \frac{a}{3}\sqrt{6}$; $G = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$ (gleichseitiges Dreieck).
$V_T(a) = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h_T = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{3}\sqrt{6} \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \frac{1}{12}a^3 \cdot \sqrt{2}$

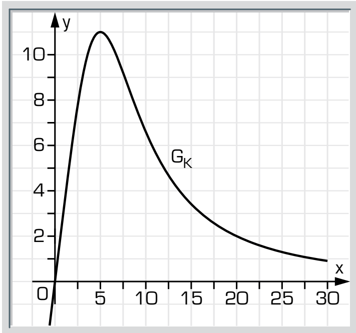
b) Lokale Änderungsrate an der Stelle $a_0 = 3$

für (1): $\frac{a^3-27}{a-3}$; mit Hilfe einer Tabelle: 27

für (2): $\frac{\frac{1}{12}a^3 \cdot \sqrt{2} - \frac{9}{4}\sqrt{2}}{a-3}$; mit Hilfe einer Tabelle: $\frac{9}{4}\sqrt{2} \approx 3{,}182$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

14 a)

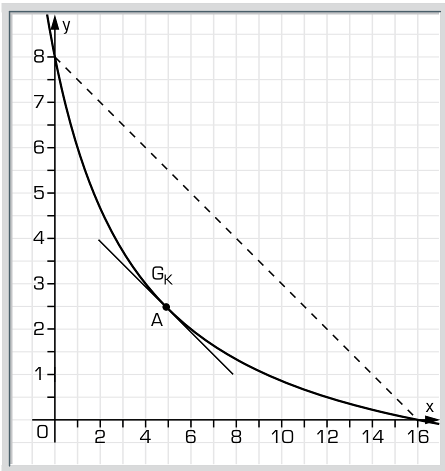


b) Konzentration ist für $t_0 = 5$ am größten; $k(5) = 11$;
Die momentane Änderungsrate $m_5 = 0$.
c) $m_6 \approx -0{,}7$; $m_8 \approx -1{,}1$; $m_{11} \approx -0{,}8$
d) Etwa für $t = 8$ wird das Medikament am stärksten abgebaut. (genauer Wert: $t = 7{,}937$)
e) Zum Beispiel für $t_1 \approx 6{,}0$ und $t_2 \approx 11{,}8$;
die momentane Änderungsrate beträgt dann etwa $-0{,}7$.

15 a) $k(0) = \frac{2}{9^2} - 2 = 8\,\text{cm}$; die Kerze war zu Beginn 8 cm hoch.
$k(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{0{,}05t+0{,}2} - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2(0{,}05t+0{,}2) = 2 \quad \Rightarrow \quad 0{,}1t+0{,}4 = 2 \quad \Rightarrow \quad t = 16$

b) $m = \frac{k(16)-k(0)}{16-0} = \frac{-8\,\text{cm}}{16\,\text{h}} = -0{,}5\,\frac{\text{cm}}{\text{h}}$; das negative Vorzeichen drückt das Herabbrennen aus.

c)



Etwa bei $t = 5$; (genau $t = 4{,}944\ldots$)

d) Der Graph von k wird mit zunehmenden t-Werten immer flacher, also ist zum Zeitpunkt $t = 0$ der maximale Wert der Abbrenngeschwindigkeit vorhanden und zum Zeitpunkt $t = 16$ der minimale Wert der Abbrenngeschwindigkeit.
Beide Werte können mit Hilfe einer Tabelle ermittelt werden.
Alternativ könnte man die Tangenten an den Graphen von k zu den Zeitpunkten $t = 0$ und $t = 16$ einzeichnen und jeweils deren Steigung bestimmen.

Randspalte Die gelbe Kerze hat am ehesten das beschriebene Abbrennverhalten, da sie kegelförmig ist. Somit nimmt die abzubrennende Wachsmenge mit steigender Brenndauer immer mehr zu. Die Abbrenngeschwindigkeit wird immer geringer. Dies entspricht der Tatsache, dass der Graph von k mit zunehmender Zeit immer flacher wird.

16 a) $5 \cdot 1{,}6^x - 12 \cdot 0{,}8^x = 0 \quad \Rightarrow \quad 5 \cdot 1{,}6^x = 12 \cdot 0{,}8^x \quad \Rightarrow \quad 2^x = 2{,}4 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\lg 2{,}4}{\lg 2} \approx 1{,}26$
b) $1{,}2^x - 15 \cdot 1{,}2^{-x} = 2$; Substition $1{,}2^x = u$
$u - 15 \cdot u^{-1} = 2 \quad \Rightarrow \quad u^2 - 15 = 2u \quad \Rightarrow \quad u^2 - 2u - 15 = 0$; $u_1 = 5$; $u_2 = -3$
$1{,}2^x = 5 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\lg 5}{\lg 1{,}2} \approx 8{,}83$
$1{,}2^x = -3$ ist nicht definiert.

3 Differenzierbarkeit

S. 36

1 Bei $x_1 = 1$: keine Änderung, da der Graph eine waagrechte Tangente besitzt.
Bei $x_2 = 3$: die lokale Änderungsrate von f ist negativ, da die Tangente an den Graphen eine negative Steigung aufweist.
Bei $x_3 = 6$: hier ist keine Aussage möglich, da man an den Graphen im Punkt $P(6\,|\,f(6))$ keine (eindeutige) Tangente anlegen kann.
Bei $x_4 = 7$: die lokale Änderungsrate von f ist positiv, da die Tangente an den Graphen eine positive Steigung aufweist.

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern, Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

2 $m_4 = \lim\limits_{x\to 4} \frac{2x^2-32}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4} \frac{2(x^2-16)}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4} \frac{2(x+4)(x-4)}{(x-4)} = \lim\limits_{x\to 4} 2(x+4) = 16$

S. 38

3 a) $f(3) = 9$; b) $f(0{,}5) = -1$; c) $f(-1{,}5) = 9$; d) $f(a) = 2a^2-3a$

e) $f(r+2) = 2r^2+5r+2$ f) $f(x_0+h) = 2x_0^2-3x_0+4x_0h+2h^2-3h$ $f(2+h) = 2h^2+5h+2$

g) $f(x)-f(x_0) = 2x^2-3x-2x_0^2+3x_0$ $f(x)-f(2) = 2x^2-3x-2$

h) $f(x_0+h)-f(x_0) = 2x_0^2-3x_0+4x_0h+2h^2-3h-2x_0^2+3x_0 = 4x_0h+2h^2-3h$

$f(2+h)-f(2) = 8h+2h^2-3h = 2h^2+5h$

i) $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{2x^2-3x-2x_0^2+3x_0}{x-x_0} = (2x^2-3x-2x_0^2+3x_0):(x-x_0) = 2x+2x_0-3$ (Polynomdivision)

$\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{2x^2-3x-2}{x-2} = (2x^2-3x-2):(x-2) = 2x+1$

k) $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{4x_0h+2h^2-3h}{h} = 4x_0+2h-3$ $\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 2h+5$

l) $f(3) = 2$; $f(0{,}5) = 12$; $f(-1{,}5) = -4$; $f(a) = \frac{6}{a}$; $f(r+2) = \frac{6}{r+2}$;

$f(x_0+h) = \frac{6}{x_0+h}$ somit $f(-1+h) = \frac{6}{-1+h}$

$f(x)-f(x_0) = \frac{6}{x}-\frac{6}{x_0} = \frac{6x_0-6x}{xx_0}$ somit $f(x)-f(-1) = \frac{6}{x}+6 = \frac{6+6x}{x}$

$f(x_0+h)-f(x_0) = \frac{6}{(x_0+h)}-\frac{6}{x_0} = \frac{-6h}{x_0(x_0+h)}$ somit $f(-1+h)-f(-1) = \frac{6h}{h-1}$

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\frac{6x_0-6x}{xx_0}}{x-x_0} = \frac{-6}{xx_0}$ somit $\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \frac{6}{x}$

$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\frac{-6h}{x_0(x_0+h)}}{h} = \frac{-6}{x_0(x_0+h)}$ somit $\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \frac{6}{h-1}$

4 a) Der Graph von f hat für $x = -3$ und für $2{,}5 < x \leqq 3{,}5$ eine waagrechte Tangente.

b) Die Funktion f ist für folgende Punkte nicht differenzierbar:

$x_1 = -4$: es existiert offensichtlich keine (eindeutige) Tangente an den Graphen im Punkt $P_1(4|0)$.
Alternativ: Linksseitiger Grenzwert $(-6) \neq$ rechtsseitiger Grenzwert (6).

$x_2 = -2$: Begründung wie x_1; linksseitiger Grenzwert $(-6) \neq$ rechtsseitiger Grenzwert (1,5).

$x_3 = -1$: Begründung wie x_1; linksseitiger Grenzwert $(1{,}5) \neq$ rechtsseitiger Grenzwert (-2).

$x_4 = 1$: Begründung wie x_1; linksseitiger Grenzwert $(-2) \neq$ rechtsseitiger Grenzwert (0).

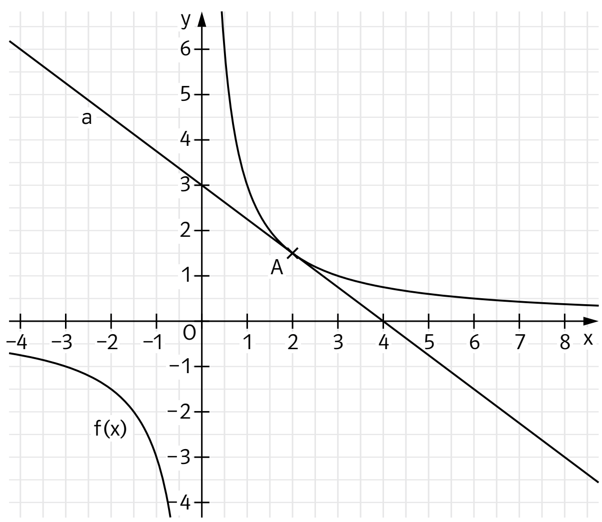
$x_5 = 2{,}5$: Begründung wie x_1; linksseitiger Grenzwert $(6) \neq$ rechtsseitiger Grenzwert (0).

5 1. Möglichkeit: $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 2. Möglichkeit: $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

a) $f'(4) = 16$ b) $f'(-2) = -1{,}5$ c) $f'(2) = 10$ d) $f'\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{5}{3}$ e) $f'(1) = -1$

6 a) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\frac{3}{h+2}-\frac{3}{2}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{3-\frac{3}{2}(h+2)}{h(h+2)} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{-\frac{3}{2}h}{h(h+2)} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{-\frac{3}{2}}{h+2} = -\frac{3}{4}$

b)



Die Tangente im Punkt $A(2|1{,}5)$ hat die Gleichung $y = -0{,}75x+3$.

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

7 a) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{0{,}5x}{x} = 0{,}5$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{-0{,}5x}{x} = -0{,}5$

f ist für $x = 0$ nicht differenzierbar, da die Grenzwerte unterschiedlich sind.

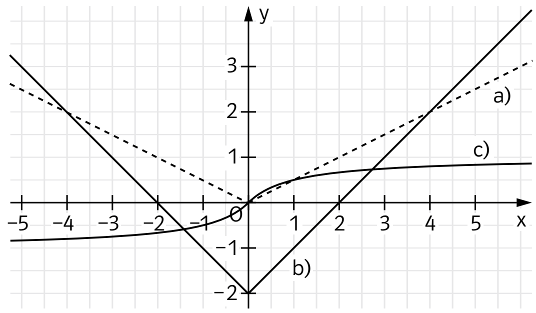
b) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{x-2}{x-2} = 1$; $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{-(x-2)}{x-2} = -1$

f ist für $x = 2$ nicht differenzierbar, da die Grenzwerte unterschiedlich sind.

c) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\frac{x}{x+1}}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x+1} = 1$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{\frac{x}{-x+1}}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1}{-x+1} = 1$

f ist für $x = 0$ differenzierbar, da die Grenzwerte gleich sind.

d) z.B. $f\colon x \mapsto |x-4| = \begin{cases} -(x-4), & \text{falls } x < 4 \\ x-4, & \text{falls } x \geq 4 \end{cases}$



S. 39

8 a) $m_T = \lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = \lim\limits_{x \to 2} (x+2) = 4$; $4 = 4 \cdot 2 + t \Rightarrow t = -4$

Tangente t: $y = 4x - 4$

$m_n = \frac{1}{4}$; $4 = -\frac{1}{4} \cdot 2 + t \Rightarrow t = 4{,}5$; Normale n: $y = \frac{1}{4}x + 4{,}5$

Schnittwinkel Tangente mit x-Achse: $\alpha = 76{,}0°$

Schnittwinkel Normale mit x-Achse: $\alpha = 14{,}0°$

b) Fehler im *Schülerbuch*: Es muss heißen: $P_0(-2 \mid -0{,}5)$

Tangente t: $y = 0{,}5x + 0{,}5$; Schnittwinkel mit x-Achse: $\alpha = 26{,}6°$

Normale n: $y = -2x - 4{,}5$; Schnittwinkel mit x-Achse: $\alpha = 63{,}4°$.

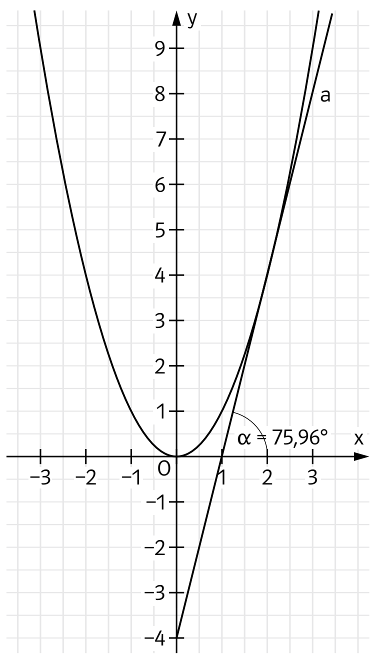
c) Tangente t: $y = -5x$; Schnittwinkel mit x-Achse: $\alpha = 78{,}7°$.

Normale n: $y = \frac{1}{5}x$; Schnittwinkel mit x-Achse: $\alpha = 11{,}3°$.

d) Tangente t: $y = -\frac{1}{6}x + 1{,}5$; Schnittwinkel mit x-Achse: $\alpha = 9{,}5°$.

Normale n: $y = 6x - 17$; Schnittwinkel mit x-Achse: $\alpha = 80{,}5°$.

9 a)



b) $\tan\alpha = 4 \Rightarrow \alpha = 75{,}96°$

c) $\overline{QR}^2 = 4^2 + 1^2 \Rightarrow \overline{QR} = \sqrt{17} \approx 4{,}12$

d) a ist die Höhe im Dreieck RQO;

somit gilt: $\frac{1}{2} \cdot \overline{QR} \cdot a = A_{RQO}$

$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{17} \cdot a = 2$

$a = \frac{4}{\sqrt{17}}$

e) $m_n = -\frac{1}{4}$; $4 = -\frac{1}{4} \cdot 2 + t \Rightarrow t = 4{,}5$

n: $y = -0{,}25x + 4{,}5$

f) $-0{,}25x + 4{,}5 = x^2 \Rightarrow x^2 + 0{,}25x - 4{,}5 = 0$

mit Lösungsformel ergibt sich $x_1 = 2$; $x_2 = -2{,}25$

und somit $S_2(-2{,}25 \mid 5{,}0625)$.

g) $A = (+4 + 4{,}5) \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 8{,}5$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

10 Das Fahrzeug bewegt sich entlang der Tangente t mit der Gleichung t: $y = 2x + 6$;
es verlässt die Fahrbahn im Punkt $P(-2|2)$.
Mögliche Strategien: 1) Gleichsetzen von Tangenten- und Parabelgleichung: $mx+6 = -0{,}5x^2+4$

$\Rightarrow \quad +0{,}5x^2+mx+2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \frac{-m \pm \sqrt{m^2-4}}{1}$;
$m^2-4 = 0$ für $m_1 = 2$; $m_2 = -2$
-2 ist hier nicht möglich, also $y = 2x+6$
somit ergibt sich für den Schnittpunkt $P(-2|2)$.

2) Lösen durch Probieren, evtl. auch mit dem Computer.

11 a) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} -(x-1)^2+4 = 3$ $\qquad$ $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} (x-3)^2+1 = 2$

b) g ist für $x_0 = 2$ nicht differenzierbar, da die Funktion an der Stelle x_0 eine Sprungstelle besitzt.

12 Tangente: $y = f'(x_0)\cdot(x-x_0) + f(x_0)$

$y = m\cdot(x-x_0)+y_0$

$y = mx\underbrace{-mx_0+y_0}_{=t}$

$y = mx+t$

Normale: $y = -\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x-x_0) + f(x_0)$

$y = -\frac{1}{m}(x-x_0)+y_0$

$y = m_n(x-x_0)+y_0$; $\quad m_n = -\frac{1}{m}$

$y = m_n x+t$

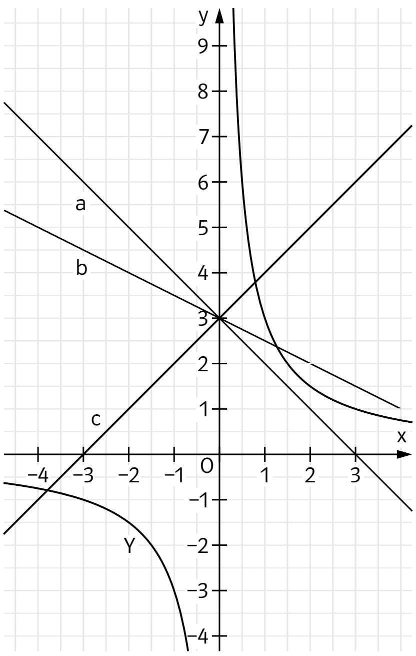
13 a) Ansatz: $0{,}5x^2 = 2x+r \quad \Rightarrow \quad 0{,}5x^2-2x-r = 0$
die quadratische Gleichung hat genau eine Lösung, wenn Diskriminante $D = 0$,
also $4+2r = 0 \quad \Rightarrow \quad r = -2$
Berührpunkt: für $x = 2$, also $B(2|2)$; g: $y = 2x-2$

b) Gesucht ist die Steigung m_2 im Punkt $(2|2)$ an den Graphen von $y = 0{,}5x^2$.

$m_2 = \lim\limits_{x\to 2} \frac{0{,}5x^2-2}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{0{,}5\cdot(x+2)(x-2)}{(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2} 0{,}5(x+2) = 2$; $\quad 2 = 2\cdot 2+t \quad \Rightarrow \quad t = -2$

somit t: $y = 2x-2$; dies ist G_f.

14 a)



b) $\frac{3}{x} = mx+3 \quad \Rightarrow \quad 0 = mx^2+3x-3$;
die quadratische Gleichung hat zwei Lösungen (und damit zwei Schnittpunkte), wenn $D > 0$;
$D = 9+12m$; $\quad D > 0$ wenn $m > -\frac{3}{4}$

c) $\frac{3}{x+k} = -x+3 \quad \Rightarrow \quad 0 = x^2+x(k-3)+3-3k = 0$
die quadratische Gleichung hat genau eine Lösung, wenn $D = 0$, also $(k-3)^2-4\cdot(3-3k) = 0$
$k_1 = -3+\sqrt{12}$; $\quad k_2 = -3-\sqrt{12}$
$f(k_1) = \frac{3}{x-3-\sqrt{12}}$; $\quad f(k_2) = \frac{3}{x-3+\sqrt{12}}$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

15 a) $\sqrt[6]{c^3}\cdot c^2\cdot\sqrt[6]{\frac{1}{c^4}} = c^{\frac{1}{2}}\cdot c^2\cdot c^{-\frac{2}{3}} = c^{\frac{11}{6}}$

b) $\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt[3]{\frac{b^2}{a}} = \frac{a^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{3}}} = (a\cdot b)^{\frac{1}{6}}$

c) $\sqrt[3]{\frac{1}{x}}\cdot x^4\cdot x^{-\frac{1}{3}} = x^{-\frac{1}{3}}\cdot x^4\cdot x^{-\frac{1}{3}} = x^{3\frac{1}{3}}$

d) $z^{-\frac{7}{4}}\cdot z\cdot\sqrt[4]{z^3} = z^{-\frac{7}{4}}\cdot z\cdot z^{\frac{3}{4}} = 1$

4 Ableitungsfunktion

S. 40

1 a) Steigung für einen allgemeinen Wert x_0: $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{500}x^2-\frac{1}{500}x_0^2}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{500}\frac{(x+x_0)(x-x_0)}{x-x_0}$

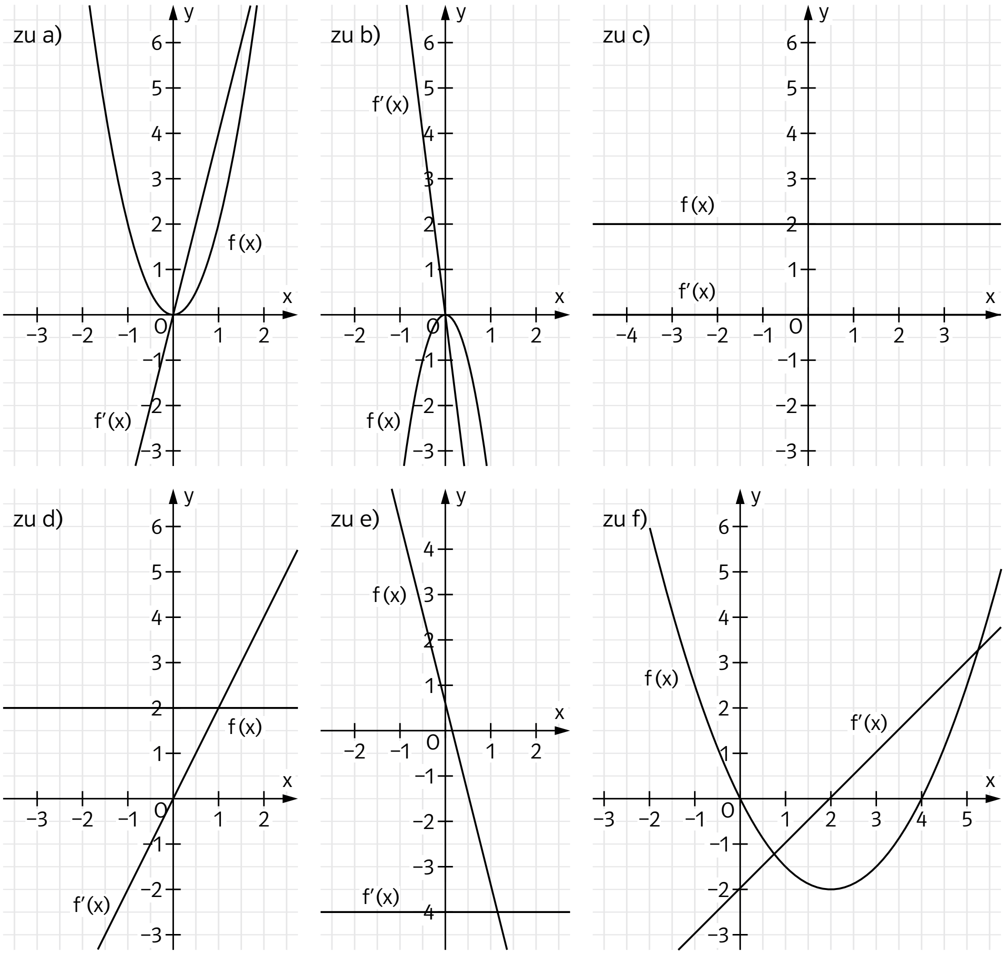
$= \lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{500}(x+x_0) = \frac{1}{250}x_0$;

$\frac{1}{250}x_0 > 1$ wenn $x_0 > 250$

b) $f'(x_0) = 1$ für $x_0 = 250$; $f(250) = 125$; das Fahrzeug erreicht eine Höhe von 125 m.

S. 42

2 a) $f'(x) = 4x$; $4x = 2$ für $x = 0{,}5$; Steigung 2 im Punkt $P(0{,}5\,|\,0{,}5)$
b) $f'(x) = -8x$; $-8x = 2$ für $x = -0{,}25$; Steigung 2 im Punkt $P(-0{,}25\,|\,-0{,}25)$
c) $f'(x) = 0$; kein Punkt P hat die Steigung 2
d) $f'(x) = 2$; alle Punkte haben die Steigung 2 ($x\in\mathbb{R}$)
e) $f'(x) = -4$; kein Punkt P hat die Steigung 2
f) $f'(x) = x-2$; $x-2 = 2$ für $x = 4$; Steigung 2 im Punkt $(4\,|\,0)$.



Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

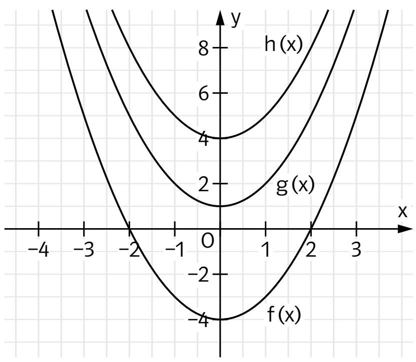
3 a) $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} x + x_0 = 2x_0$; $2x_0 = -5 \Leftrightarrow x_0 = -2{,}5$; $B(-2{,}5 \mid 6{,}25)$

Tangentengleichung: $6{,}25 = -5 \cdot (-2{,}5) + t \Rightarrow t = -6{,}25$; t: $y = -5x - 6{,}25$

b) Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse: $-5x - 6{,}25 = 0 \Rightarrow x = -1{,}25$

$A = \frac{1}{2} \cdot 1{,}25 \cdot 6{,}25 = 3{,}90625$

4 a)



$f'(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{x^2 - 4 - (x_0^2 - 4)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{(x + x_0)(x - x_0)}{x - x_0}$

$= \lim\limits_{x \to x_0} x + x_0 = 2x_0$

analog: $g'(x) = h'(x) = 2x$

b) $f_0'(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{x^2 - c - (x_0^2 - c)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} x + x_0 = 2x_0$

5 (1) falsch; es existieren bereits 4 Nullstellen (eine doppelte Nullstelle bei $(0 \mid 0)$. Mehr Nullstellen kann eine ganzrationale Funktion vierten Grades nicht besitzen und somit kann der Graph die x-Achse nicht mehr kreuzen.

(2) richtig; der Graph der Funktion hat an der Stelle $x_0 = 0$ eine waagrechte Tangente, somit $f'(c) = 0$

(3) richtig; der Grad von $f'(x)$ ist 3 und somit kann $f'(x)$ maximal 3 Nullstellen haben, f' hat genau drei Nullstellen, weil f an drei Stellen waagerechte Tangenten besitzt.

(4) richtig; $f'(x)$ hat eine weitere Nullstelle für $x \in]0; 4[$, also gibt es in diesem Intervall auch einen negativen Bereich für f.

(5) falsch; der Graph von $f'(x)$ verläuft bis −2 unterhalb der x-Achse. Die beiden Graphen schneiden sich im III. Quadranten.

S. 43

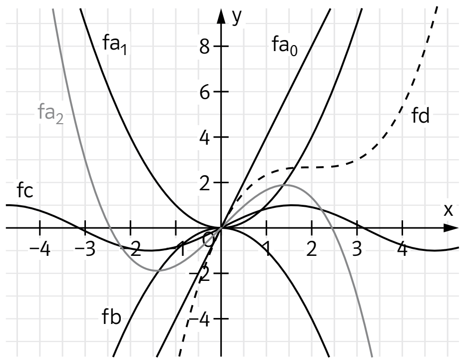
6 Individuelle Lösungen

a) keine Nullstelle:
z.B. $f(x) = 4x$ $\quad (f'(x) = 4)$
eine Nullstelle:
z.B. $f(x) = x^2$ $\quad (f'(x) = 2x)$
zwei Nullstellen:
z.B. $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x$ $\quad (f'(x) = -x^2 + 2)$

b) z.B. $f(x) = -x^2$ $\quad (f'(x) = -2x)$

c) z.B. $f(x) = \sin x$ $\quad (f'(x) = \cos x)$

d) z.B. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x$ $\quad (f'(x) = x^2 - 4x + 4)$

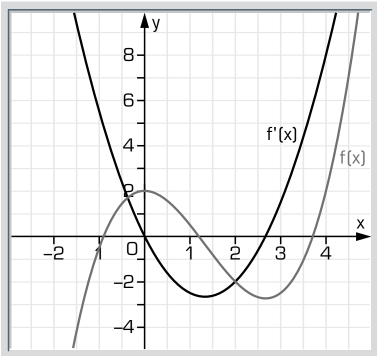


7 Der hellblaue Graph scheidet aus, da der Wasserstand erst abnimmt (~ t = 1), dann bis ungefähr t = 4,5 ansteigt und anschließend bis ungefähr t = 8 wieder abnimmt.
Der Anstieg von p ist an der Stelle 2,5 etwa 0,7.
Der orangefarbene Graph spiegelt die Pegelstandsänderung am genauesten wieder.

8 Individuelle Lösungen

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

9 a)



b) $1{,}5x^2 - 4x = 2 \iff 1{,}5x^2 - 4x - 2 = 0$

$x_1 = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{7} \approx 3{,}1;\quad x_2 = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{7} \approx -0{,}43$

(mit Lösungsformel)

$y_1 \approx -2{,}31 \qquad y_2 \approx 1{,}59$

c) $A\left(\frac{4}{3}\middle|-\frac{10}{27}\right)$ $A((1{,}3\,|-0{,}4))$

d) $f'(x) > 0$ wenn $1{,}5x^2 - 4x > 0 \Rightarrow x\cdot(1{,}5x - 4) > 0$

Der Graph der Funktion steigt für $x < 0$ oder $x > \frac{8}{3}$.

e) $f'(x) > 3$ wenn $1{,}5x^2 - 4x - 3 > 0$

Die Steigung der Graphen ist für $x < \frac{4}{3} - \frac{\sqrt{34}}{3}$ oder $x > \frac{4}{3} + \frac{\sqrt{34}}{3}$ größer als 3.

10 a) Gleichung der Rampe: $m_R = \tan 14° \approx 0{,}25$; R: $y = 0{,}25x + 1$

Die Rampe endet im Gelände bei $x = -4$. $(R(-4) = 0)$

Die Rampe trifft auf die Böschung, wenn beide die gleiche Steigung haben:

$\frac{1}{2\sqrt{x}} = 0{,}25 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = 0{,}5 \Rightarrow x = 4$

b) $L^2 = 8^2 + 2^2 \Rightarrow l = 8{,}25$ also ungefähr 41 m lang.

11 A – 4: Ableitung hat Nullstelle bei $x = 2$; sie ist negativ für $x < 2$ und positiv für $x > 2$.

B – 3: Ableitung hat keine Nullstelle; sie steigt stetig an;

C – 5: Ableitung hat Nullstelle bei $x = 2$;

D – 2: Ableitung hat zwei Nullstellen;

E – 1: Polstelle bei $x = 2$; keine Nullstellen;

12 Individuelle Lösungen

a) z. B. $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ b) $f(x) = x^2 - 4$ c) $f(x) = x^3 - 4x + 2$

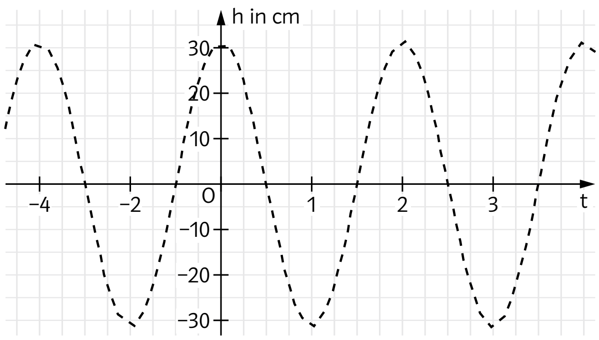
S. 44

13 a) $h(t) = 10\sin(\pi t)$;

$h'(t) = 10\pi(\cos \pi t)$

b) $h'(t)$ beschreibt die Geschwindigkeit des Körpers in Abhängigkeit von der Zeit.

c) Z. B. die Schwingung eines Gewichtstückes an einem Federpendel.



14 a) $f'_a(x) > 0 \quad x \in \mathbb{R}$; $f'_a(x) = 0{,}4$

b) $f'_b(x) = 0$ für $x = -2$ und $x = 2$

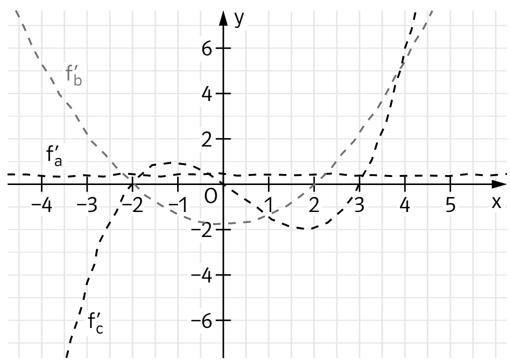
$f'_b(x) > 0$ für $x \in \mathbb{R} \setminus [-2;2]$

$f'_b(x) < 0$ für $x \in]-2;2[$

c) $f'_c(x) = 0$ für $x = -2$; $x = 0$ und $x = 3$

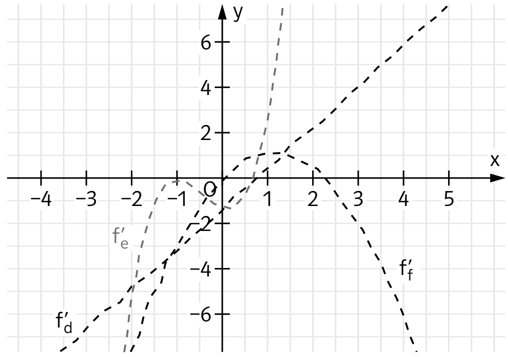
$f'_c(x) > 0$ für $x \in]-2;0[\cup]3;+\infty[$

$f'_c(x) < 0$ für $x \in]-\infty;-2[\cup]0;3[$

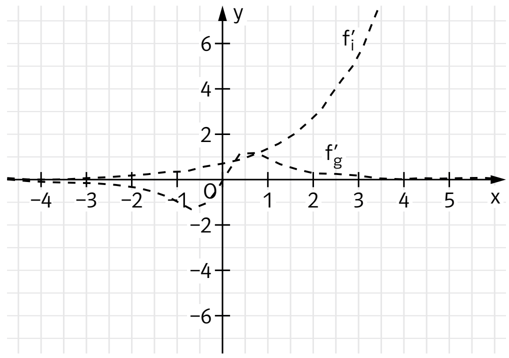


Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

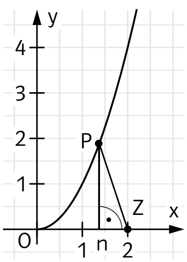
d) $f'_d(x) = 0$ für $x = 0{,}75$
$f'_d(x) > 0$ für $x > 0{,}75$
$f'_d(x) < 0$ für $x < 0{,}75$
e) $f'_e(x) = 0$ für $x = 0$ und $x = 2{,}25$
$f'_e(x) > 0$ für $x \in]0; 2{,}25[$
$f'_e(x) < 0$ für $x \in \mathbb{R} \setminus [0; 2{,}25]$
f) $f'_f(x) = 0$ für $x = -1$ und $x = 0{,}67$
$f'_f(x) > 0$ für $x > 0{,}67$
$f'_f(x) < 0$ für $x \in]-\infty; 0{,}67[\setminus \{-1\}$



g) $f'_g(x) = 0$ für $x = 0$
$f'_g(x) > 0$ für $x > 0$
$f'_g(x) < 0$ für $x < 0$
h) $f'_h(x) = 0$ für $x = -0{,}5$ und $x = 0{,}75$
$f'_h(x) > 0$ für $x \in]-\infty; -0{,}5[\cup]0{,}75; +\infty[$
$f'_h(x) < 0$ für $x \in]-0{,}5; 0{,}75[$
i) $f'_i(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

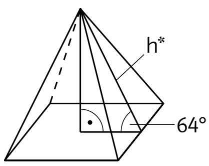


15



$\overline{ZP}^2 = (2-u)^2 + u^4 \quad \Rightarrow \quad l(u) = \sqrt{u^4 + u^2 - 4u + 4}$
Minimaler Abstand: $l_{min} = 1{,}3577 \approx 1{,}36$
Mögliche Strategie: Computereinsatz

16



$\tan 64° = \frac{h}{2{,}5} \quad \Rightarrow \quad h = 2{,}5 \cdot \tan 64° = 5{,}13\,\text{cm}$
$\cos 64° = \frac{2{,}5}{h^*} \quad \Rightarrow \quad h^* = \frac{2{,}5}{\cos 64°} = 5{,}7\,\text{cm}$
$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 25\,\text{cm}^2 \cdot 5{,}13\,\text{cm} = 42{,}7\,\text{cm}^3$
$O = G + 4 \text{ Seitendreiecke} = 25\,\text{cm}^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 5\,\text{cm} \cdot 5{,}7\,\text{cm}\right)$
$= 25\,\text{cm}^2 + 57\,\text{cm}^2 = 82\,\text{cm}^2$

17 $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \geqq 0{,}99$
$\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqq 0{,}01$
$n \geqq \frac{\lg 0{,}01}{\lg 0{,}5} = 6{,}64$
Die Laplace-Münze muss mindestens 7 Mal geworfen werden.

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

5 Stammfunktionen

S. 45

1 Der Graph von f′ hat seine Nullstellen bei −1 und 3, für $x \in]-1;3[$ sind die Funktionswerte negativ, d.h. der Graph von f muss bei −1 und 3 waagrechte Tangenten haben und für $x \in]-1;3[$ monoton fallen. Deswegen kann nur der blaue oder orange Graph zur Funktion f gehören.

S. 46

2 a) $F'(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{0{,}5x^2 - 0{,}5x_0^2}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} 0{,}5(x + x_0) = x_0 = f(x)$ F ist Stammfunktion.

b) $F'(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{2x - 2 - 2x_0 + 2}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} 2 = 2 \neq f(x)$ F ist keine Stammfunktion.

c) $F'(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{3x^2 + 1 - 3x_0^2 - 1}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} 3(x + x_0) = 6x_0 = f(x)$ F ist Stammfunktion.

d) $F'(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{x^2 - 2x - 2x_0^2 + 2x_0}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} (x + x_0) - 2 = 2x_0 - 2 = f(x)$ F ist Stammfunktion.

e) $F'(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{-x^3 + 3 + x_0^3 - 3}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{-x^3 + x_0^3}{x - x_0}$

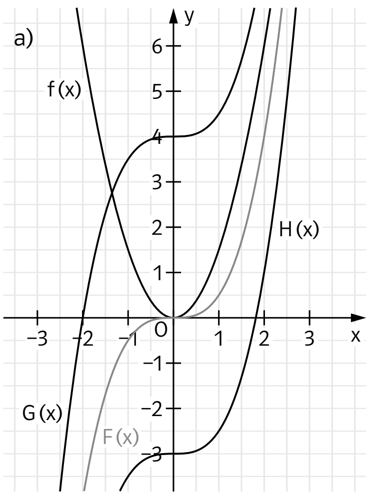
$= \lim\limits_{x \to x_0} -x^2 - x_0 x - x_0^2 = 3x_0^2 \neq f(x)$ F ist keine Stammfunktion.

3 a) F: roter Graph (Parabel); f: blauer Graph (Gerade)
b) F: orangefarbener Graph; f: brauner Graph

4 $f(1) = 0$; $f(x) < 0$ für $x > 1$ $\Rightarrow$ F hat an der Stelle $x = 1$ eine waagrechte Tangente, F ist monoton fallend für $x > 1$
$\Rightarrow$ nur Graph C möglich

$g(1) = g(3) = 0$; $g(x) > 0$ für $x \in]1;3[$ $\Rightarrow$ G hat an den Stellen $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$ waagrechte Tangenten und ist monoton steigend.
$\Rightarrow$ A und G möglich.

5 a)



b) $f(0{,}8) = 1{,}5 \cdot 0{,}8^2 = 0{,}96$
Die Steigung im Punkt $F(0{,}8 \mid 0{,}256)$ beträgt 0,96.
$0{,}96 = 1{,}5 \cdot x^2 \Rightarrow x_1 = 0{,}8,\ x_2 = -0{,}8$

c) Individuelle Lösungen
z.B. $G: x \mapsto 0{,}5x^3 + 4$
$H: x \mapsto 0{,}5x^3 - 3$

d) Je zwei der drei Graphen können durch Verschiebung in y-Richtung ineinander übergeführt werden.

e) $K(x) = 0{,}5x^3 + C$
$K(2) = 11 \Rightarrow 0{,}5 \cdot 2^3 + C = 11 \Rightarrow C = 7$
somit $K(x) = 0{,}5 \cdot x^3 + 7$

6 Individuelle Lösungen

a) z.B. $f(x) = (x-1)^2 \cdot (x+2)$

b) z.B. $f(x) = -\frac{3}{5}x + 3$ (Graph schneidet x-Achse im Punkt $(5 \mid 0)$ und y -Achse im Punkt $(0 \mid 3)$).

c) z.B. $f(x) = (x-1)^2 \cdot (x+2)(x+1)$

d) z.B. $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x-2}$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

6 Die Ableitung der Funktion $x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{Z})$

S. 47

1 a)

n	3	2	1	−1
$f(x) = x^n$	x^3	x^2	x	$\frac{1}{x}$
$f'(x)$	$3x^2$	$2x$	1	$-\frac{1}{x^2}$

b) Vermutung für f: $x \mapsto x^n$: $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

c) Individuelle Lösungen

S. 48

2 a) $f'(x) = 4x^3$ b) $f'(x) = 6x^5$ c) $f'(x) = 9x^8$ d) $f'(x) = -2x^{-3}$

e) $f'(x) = -5x^{-6}$ f) $f'(x) = 35x^{34}$ g) $f'(x) = -8x^{-9}$ h) $f'(x) = 100 \cdot x^{99}$

3 a) $f'(x) = k \cdot x^{k-1}$ b) $f'(x) = 2n \cdot x^{2n-1}$ c) $f'(x) = (2k+1)x^{2k}$ d) $f'(x) = (3-m) \cdot x^{2-m}$

e) $f'(x) = (-n+5)x^{-n+4}$ f) $f'(x) = (1-3n) \cdot x^{-3n}$ g) $f'(x) = -m \cdot x^{-m-1}$ h) $f'(x) = (n+1) \cdot x^n$

4 a) $f(x) = (x^2)^3 = x^6$; $f'(x) = 6x^5$ (Potenzgesetz)

b) $f(x) = (x^{-3})^2 = x^{-6}$; $f'(x) = -6x^{-7}$ (Potenzgesetz)

c) Ableitung nicht möglich, da $\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$.

d) $f(x) = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^9 = x^3$; $f'(x) = 3x^2$ (Potenzgesetz)

e) Ableitung nicht möglich, da $2\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$.

f) Ableitung nicht möglich, da $3{,}5 \notin \mathbb{Z}$.

g) $g(r) = (r^4)^{2,5} = r^{10}$; $g'(r) = 10r^9$ (Potenzgesetz)

h) Ableitung nicht möglich, da $0{,}5 \notin \mathbb{Z}$.

5 $f(x) = x^3$; $f'(x) = 3x^2$ $\Rightarrow$ Graph h_3

$g(x) = x^4$; $g'(x) = 4x^3$ $\Rightarrow$ Graph h_2

6 a) $f'(x) = 4x^3$; $f'(x) = -4$ $\Leftrightarrow$ $4x^3 = -4$ $\Rightarrow$ $x = -1$;

$f(-1) = 1$; Tangente t: $1 = -1 \cdot (-4) + t$ $\Rightarrow$ $t = -3$; t: $y = -4x - 3$

Vorgehensweise bei den anderen Teilaufgaben analog!

b) t_1: $y = 12x + 16$ oder t_2: $y = 12x - 16$

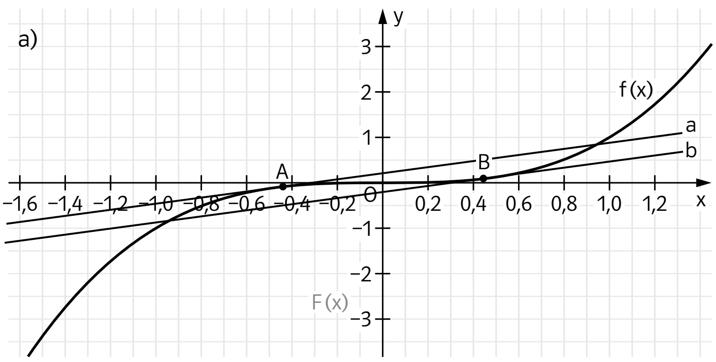
c) t_1: $y = -\frac{3}{4}x - \sqrt{3}$ oder t_2: $y = -\frac{3}{4}x + \sqrt{3}$

d) t: $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$

e) t: $y = 6x + 7$

f) t: $y = 0$

7 a)



$f'(x) = 3x^2$;

$m = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}58$

$3x^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow$ $x_1 = -\sqrt{\frac{1}{3\sqrt{3}}} \approx -0{,}44$;

$x_2 = \sqrt{\frac{1}{3\sqrt{3}}} \approx 0{,}44$

Vorgehensweise für Teilaufgaben b), c), d) analog.

b) $x = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \approx 0{,}63$

c) $x_1 = -\sqrt[4]{\frac{\sqrt{3}}{5}} \approx -0{,}77$; $x_2 = \sqrt[4]{\frac{\sqrt{3}}{5}} \approx 0{,}77$

d) $x = -\sqrt[5]{\frac{4}{\tan 21°}} \approx -1{,}6$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

8 a) $m = 10\,\frac{m}{s}$; m gibt die Durchschnittsgeschwindigkeit im Intervall $[0;10]$ an.
b) $s'(t) = 2t$; $2t = 15 \Rightarrow t = 7{,}5$;
Zum Zeitpunkt $t = 7{,}5\,s$ hat das Auto die Momentangeschwindigkeit 15.

9 a) $f'(x) = 5x^4$; $f'(-x) = 5\cdot(-x)^4 = 5\cdot x^4 = f'(x)$
$\Rightarrow$ Der Graph von f′ ist achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse.
b) n ungerade $\Rightarrow$ $n = 2k+1$ $(k \notin \mathbb{Z})$
$f(x) = x^{2k+1} \Rightarrow f'(x) = (2k+1)\cdot x^{2k}$
$f'(-x) = (2k+1)\cdot(-x)^{2k} = (2k+1)\cdot((-x)^2)^k = (2k+1)\cdot(x^2)^k = (2k+1)\cdot x^{2k} = f'(x)$
c) Es gilt für gerade Exponenten n: Der Graph der Ableitung von f: $x \mapsto x^n$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung.
n gerade $\Rightarrow$ $n = 2k$ $(k \in \mathbb{Z})$
$f(x) = x^{2k} \Rightarrow f'(x) = 2k\cdot x^{2k-1}$
$f'(-x) = 2k\cdot(-x)^{2k-1} = 2k\cdot(-x)^{2k}\cdot(-x)^{-1} = 2k\cdot((-x)^2)^k\cdot\frac{1}{(-x)} = -2k\cdot(x^2)^k\cdot x^{-1} = -2k\cdot x^{2k-1} = -f'(x)$

10 a) Tangente t in $B(1|1)$:
$m = h'(1) = 3\cdot1^2 = 3$; $1 = 3\cdot1+t \Rightarrow t = -2 \Rightarrow t\colon y = 3x-2$
Schnittpunkt: $3x-2 = x^3 \Rightarrow x^3-3x+2 = 0$
Lösen der Gleichung führt auf den Schnittpunkt $P(-2|-8)$.
b) $m = 3a^2$; $a^3 = a\cdot3a^2+t \Rightarrow t = -2a^3 \Rightarrow t_a\colon y = 3a^2\cdot x-2a^3$

11 Individuelle Lösungen
a) z.B. $f(x) = x^2$; $g(x) = x^2+2 \Rightarrow f'(x) = g'(x) = 2x$
b) z.B. $f(x) = 2x^2$; $g(x) = -2x^2 \Rightarrow f'(x) = 4(x)$; $g'(x) = -4x$
c) z.B. $f(x) = 4x^2$; $g(x) = 2x^2 \Rightarrow f'(x) = 8(x)$; $g'(x) = 4x$
d) z.B. $f(x) = 3x$; $g(x) = 2x \Rightarrow f'(x) = 3$; $g'(x) = 2$

12 a) Amplitude = a; Periode = $\frac{2\pi}{b}$; keine Phasenverschiebung
b) Amplitude = 1; Periode = $\frac{2\pi}{b}$; Phasenverschiebung $\frac{c}{b}$

13 a) $\sqrt{\frac{1}{9}-\frac{1}{25}} = \sqrt{\frac{25-9}{9\cdot25}} = \sqrt{\frac{16}{9\cdot25}} = \frac{4}{3\cdot5} = \frac{4}{15}$ b) $\sqrt{\frac{1}{36}+\frac{1}{64}} = \sqrt{\frac{64+36}{36\cdot64}} = \sqrt{\frac{100}{36\cdot64}} = \frac{10}{6\cdot8} = \frac{5}{24}$

7 Summenregel und Faktorregel

S. 49

1 $g'(x) = 2x$; $h'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{x^2+\frac{1}{x}-x_0^2-\frac{1}{x_0}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{x^2-x_0^2+\frac{x_0-x}{x\cdot x_0}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{x\cdot x_0\cdot(x-x_0)(x+x_0)-(x-x_0)}{x\cdot x_0\cdot(x-x_0)}$$

$$= \lim_{x\to x_0} x+x_0-\frac{1}{x\cdot x_0} = 2x_0-\frac{1}{x_0^2}$$

also folgt: $f'(x) = g'(x) + h'(x)$ für beliebige x.

2 Ablesen der Steigungen zeigt: $g'(1) = 1$, $f'(1) = 0{,}5$ und $g'(2) = 2$, $f'(2) = 1$
also ist die Steigung des Graphen von g in beiden Punkten doppelt so groß.

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x_0^2}{(x-x_0)} = \lim_{x\to x_0}\frac{1}{4}\frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{1}{4}(x+x_0) = \frac{1}{2}x_0$$

$$g'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{2\cdot\frac{1}{4}x^2-2\cdot\frac{1}{4}x_0^2}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{2\cdot\left(\frac{1}{4}(x-x_0)(x+x_0)\right)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} 2\cdot\left(\frac{1}{4}(x+x_0)\right) = 2\cdot\frac{1}{2}x_0 = 2\cdot f'(x_0)$$

somit folgt: $g'(x) = 2\cdot f'(x)$ für beliebige x.

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

S. 51

3 a) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ b) $g'(x) = 2x + \frac{2}{x^3}$ c) $f'(x) = 8z^5$ d) $f'(x) = 3x^2 - 5x^{-6}$

e) $g'(u) = -8u^{-9} - 24u^2$ f) $f'(x) = \frac{2}{5} - \frac{10}{x^3}$ g) $f'(x) = -\frac{3}{2x^3}$ h) $f'(x) = 0$

i) $g'(x) = -3x^{-6}$ k) $h'(x) = -\frac{5}{x^{11}}$

4 a) $f'(x) = 12x^2 - 10x - 3$; $f'(0) = -3$, Graph fällt; $f'(1) = -1$

b) $f'(x) = 6x^7 - 10x^4 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{2}{3}x$; $f'(0) = 0$, keine Steigung; $f'(1) = -2\frac{1}{6}$

c) $f'(x) = 3{,}2x^3 - 2{,}6x + a$; $f'(0) = a$, Graph fällt für $a < 0$; $f'(1) = 0{,}6 + a$
Graph steigt für $a > 0$;

d) $f'(x) = 4x^5 - \frac{5}{3}x - 3 + \frac{2}{x^2}$; Funktion und somit auch die Ableitungsfunktion sind für $x = 0$ nicht definiert. $f'(1) = 1\frac{1}{3}$

e) $f'(x) = -3x^2 + 3x - 3{,}5$; $f'(0) = -3{,}5$, Graph fällt; $f'(1) = -3{,}5$

f) $f'(x) = 3ax^2 - 25x^4$; $f'(0) = 0$, keine Steigung; $f'(1) = 3a - 25$

g) $f'(x) = 7x^6 - 6x^5 + 5x^4 - 4x^3 + 1$; $f'(0) = 1$, Graph steigt; $f'(1) = 3$

5 a) g hat den Grad 3 und somit h den Grad 2.
h_2 kommt somit nicht in Frage.
An der Stelle $x = 0$ fällt der Graph, daher kommt h_1 wegen $h_1(0) > 0$ nicht in Frage.
Da g für betragsmäßig große x steigt, muss h für betragsmäßig große x positiv sein; damit scheidet h_4 aus und es bleibt h_3 übrig.

b) Der Grad von k muss 4 sein, somit scheidet k_3 aus. $k_1(x)$ scheidet aus, weil $k_1'(0) = -\frac{3}{4} \neq 0$ ist.
K_4 scheidet aus, weil für große x $k_4'(x)$ negativ sein müsste. Es bleibt k_2. (Anmerkung: k_2 bleibt als einzige Funktion übrig, erfüllt aber auch die Bedingung nicht.)

6 a) $h'(x) = 12x - \frac{3}{2x^2}$ b) $f'(a) = -\frac{3}{2}a^{-4} - 3$ c) $g'(x) = 4x$ d) $h'(a) = -6a$

e) $f'(t) = -4t^{-2} - a$ f) $g'(x) = 0$ g) $h'(x) = \frac{16}{3}x^3 - \frac{1}{x^2}$ h) $f'(z) = \frac{3}{2}z^3 - 3z$

i) $f'(t) = 6t^2 - 6t$ k) $h'(x) = 6x$ l) $g'(x) = 7{,}8x^5$

7 a) $f(x) = 2 \cdot x^0$, also $f'(x) = 2 \cdot 0 \cdot x^{-1} = 0$
ebenso ist $g'(x) = 0$ und $h'(x) = 0$
Die Ableitung jeder konstanten Funktion ist die Nullfunktion.

b) $f'(x) = 2$; $g'(x) = -\frac{1}{2}$; $h'(x) = m$
Die Ableitung jeder linearen Funktion ist der Steigungsfaktor an x.

8

Funktionsterm	Ableitungsfunktion		Stammfunktion	
$f_1(x) = 3x + \frac{1}{x^2}$	$f_1'(x) = 3 - \frac{2}{x^3}$	R	$F_1(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{x}$	Z
$f_2(x) = 2{,}4x^2 - \frac{1}{2}x^4$	$f_2'(x) = 4{,}8 - 2x^3$	E	$F_2(x) = 0{,}8x^3 - \frac{1}{10}x^5$	K
$f_3(x) = -\frac{5}{x^2} - 4x$	$f_3'(x) = 10x^{-3} - 4$	B	$F_3(x) = \frac{5}{x} - 2x^2$	N
$f_4(x) = x^3 - 2x^2$	$f_4'(x) = 3x^2 - 4x$	A	$F_4(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3$	T
$f_5(x) = 3 - \frac{3}{x^2}$	$f_5'(x) = 6x^{-3}$	L	$F_5(x) = 3x + \frac{3}{x}$	M
$f_6(x) = 4x^3 - 3x^4$	$f_6'(x) = 12x^2 - 12x^3$	R	$F_6(x) = x^4 - \frac{3}{5}x^5$	D

Es bleiben bei den roten Kärtchen H und O und bei den grünen Kärtchen S und E übrig.
Lösungswort: HOSE

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

9 a) $f'(x) = 27x^2 - 2$; $f'(-1) = f'(1) = 25$; $f'(0) = -2$

Der Graph der Funktion steigt an den Stellen $x = -1$ und $x = 1$ sehr stark an, während er an der Stelle $x = 0$ fällt.

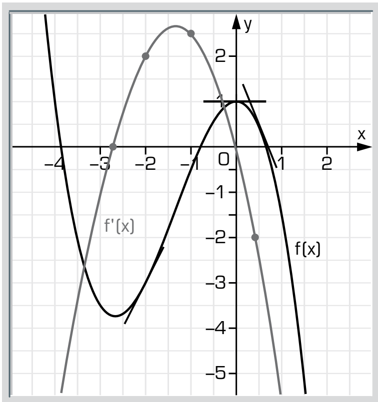
b) $f'(x) = n \cdot 2x^{n-1}$; $f'(-1) = \begin{cases} -2n & \text{für n gerade} \\ 2n & \text{für n ungerade} \end{cases}$ $f'(1) = 2n$; $f'(0) = 0$

Ob der Graph an der Stelle $x = -1$ steigt oder fällt, hängt davon ab, ob n positiv oder negativ und gerade oder ungerade ist.

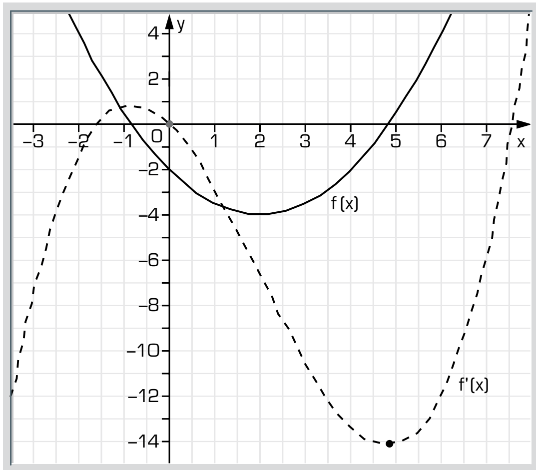
An der Stelle $x = 0$ ist die Steigung immer 0, d.h. der Graph der Funktion hat dort eine waagrechte Tangente.

S. 52

10 a) Vorgehensweise wie im *Schülerbuch* auf S. 41



b)



11 $f'(x) = 2x^4 - \frac{5}{2}x^2 - 8x + 1$ f' hat den Grad 4

$g'(x) = (f')'(x) = 8x^3 - 5x - 8$ g hat den Grad 3

12 a) $f'(x) = \frac{5}{3}x - \frac{3}{2}$ Nullstelle bei $x = \frac{9}{10}$

b) $f'(x) = 6x^2 + 2x - 1$ Nullstellen bei $x_1 = \frac{-1-\sqrt{7}}{6}$ und $x_2 = \frac{-1+\sqrt{7}}{6}$

c) $f'(x) = \frac{4}{3}x^2 - 2$ Nullstellen bei $x_1 = \frac{\sqrt{6}}{2}$ und $x_2 = -\frac{\sqrt{6}}{2}$

d) $f'(x) = 9x^2 - \frac{2}{x^2}$ Nullstellen bei $x_1 = +\sqrt[4]{\frac{2}{9}}$ und $x_2 = -\sqrt[4]{\frac{2}{9}}$

e) $f'(x) = 3x^3 - 2x^2 - x$ Nullstellen bei $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -\frac{1}{3}$

f) $f'(x) = \frac{10}{3}x^4 + \frac{3}{8}x^2 + 3$ keine Nullstellen

13 a) $f'(-x) = 2 \cdot (-x)^4 - (-x)^2 - 3 = 2x^4 - x^2 - 3 = f(x)$

$\Rightarrow$ G_f ist achsensymmetrisch zur y-Achse

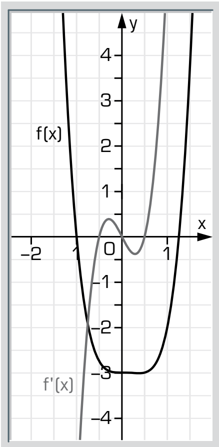
b) $f'(x) = 8x^3 - 2x$

c) $f'(-x) = 8 \cdot (-x)^3 - 2 \cdot (-x) = -8x^3 + 2x = -(8x^3 - 2x) = -f'(-x)$

$\Rightarrow$ G_f ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern, Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

d)



e) Für ganzrationale Funktionen gilt, dass die Ableitung jeder geraden Potenz eine ungerade Potenz ergibt und umgekehrt.
Somit wird aus einer Summe von gewichteten geraden Potenzen eine Summe von gewichteten ungeraden Potenzen und umgekehrt.
Allgemein gilt: bei achsensymmetrischen Funktionen sind die Funktionswerte in gleichem Abstand von der y-Achse gleich, somit sind die Tangentensteigungen in gleichem Abstand von der y-Achse gleich, somit sind die Tangentensteigungen in gleichem Abstand betragsgleich, haben aber unterschiedliche Vorzeichen.
Daher ist die abgeleitete Funktion punktsymmetrisch.
Bei punktsymmetrischen Funktionen unterscheiden sich die Funktionswerte in gleichem Abstand von der y-Achse nur durch das Vorzeichen, somit haben die Tangentensteigungen gleiche Vorzeichen.
Die abgeleitete Funktion ist achsensymmetrisch.

14 a) $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(4-x^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0;\; x_2 = -2;\; x_3 = 2$
$f'(x) = 4-3x^2;\quad f'(0) = 4;\quad f'(-2) = -8;\quad f'(2) = -8$

b) $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2-x-3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1;\; x_2 = -0{,}75;$
$f'(x) = 8x-1;\quad f'(1) = 7;\quad f'(-0{,}75) = -7;\quad f'(0) = -1$

c) $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3-3x+2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1$ (Probieren);
$(x^3-3x+2) : (x-1) = x^2+x-2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 1;\; x_3 = -2$
$f'(x) = 3x^2-3;\quad f'(0) = -3;\quad f'(1) = 0;\quad f'(-2) = 9$

d) $f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2-1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3};\; x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
$f'(x) = 6x;\quad f'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 2\sqrt{3};\quad f'\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -2\sqrt{3};\quad f'(0) = 0$

e) $f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2-x^4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2(3-x^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 = 0;\quad x_3 = \sqrt{3};\quad x_4 = -\sqrt{3}$
$f'(x) = 6x-4x^3;\quad f'(0) = 0;\quad f'(\sqrt{3}) = -6\sqrt{3};\quad f'(-\sqrt{3}) = 6\sqrt{3};$

f) $f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^4-5x^2+4 = 0;$ Substition $x_2 = u \quad \Rightarrow \quad u^2-5u+4 = 0$
$\Rightarrow \quad u_1 = 4,\; u_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2;\; x_2 = -2;\; x_3 = 1;\; x_4 = -1$
$f'(x) = 4x^3-10x;\quad f'(0) = 0;\quad f'(2) = 12;\quad f'(-2) = -12;\quad f'(1) = -6;\quad f'(-1) = 6$

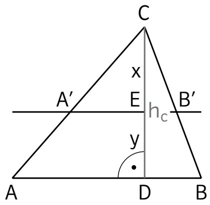
15 a) $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{9}x^3-\frac{x}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\cdot\left(\frac{2}{9}x^2-\frac{1}{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0;\quad x_2 = \frac{3}{2};\quad x_3 = -\frac{3}{2}$
$f'(x) = \frac{2}{3}x^2-\frac{1}{2};\quad f'(0) = -\frac{1}{2};$ Schnittwinkel α: $\tan\alpha = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 153{,}43°$
$f'\left(\frac{3}{2}\right) = f'\left(-\frac{3}{2}\right) = 1;$ Schnittwinkel α: $\tan\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 45°$
$g(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{18}x^3+2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\cdot\left(-\frac{1}{18}x^2+2\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0;\quad x_2 = 6;\quad x_3 = -6$
$g'(x) = -\frac{1}{6}x^2+2;\quad g'(0) = 2;$ Schnittwinkel α: $\tan\alpha = 2 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 63{,}43°$
$g'(6) = g'(-6) = -4;$ Schnittwinkel α: $\tan\alpha = -4 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 104{,}04°$

b) $f(x) = g(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{9}x^3-\frac{x}{2} = -\frac{1}{18}x^3+2x \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{18}x^3-2{,}5x = 0 \quad \Rightarrow \quad x\left(\frac{5}{18}x^2-2{,}5\right) = 0$
$S_1(0\,|\,0);\quad S_2(-3\,|\,-4{,}5);\quad S_3(3\,|\,4{,}5)$
$f'(0) = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 153{,}43°;\qquad g'(0) = 2 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 63{,}43°$
also Schnittwinkel $\gamma = 153{,}43°-63{,}43° = 90°$
$f'(-3) = 5{,}5 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 79{,}7°;\qquad g'(-3) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 26{,}57°\qquad$ Schnittwinkel $\gamma = 53{,}13°$
$f'(3) = 5{,}5;\quad g'(3) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow$ Schnittwinkel $\varphi = 53{,}13°$

c) waagrechte Tangente heißt Steigung gleich Null
$g'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{6}x^2+2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2\sqrt{3};\; x_2 = -2\sqrt{3}$
$g(2\sqrt{3}) = -\frac{1}{18}\cdot(2\sqrt{3})^3+2\cdot2\sqrt{3} = \frac{8}{3}\sqrt{3};$
Gerade h geht durch den Punkt $P\left(2\sqrt{3}\,\middle|\,\frac{8}{3}\sqrt{3}\right)$ und hat Steigung 0 $\quad \Rightarrow \quad h(x) = 0$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

16



$\overline{AB'} \parallel \overline{AB}$

$\overline{CE} = x$; $\overline{ED} = y$

$x+y = h_c$

Bedingung: $A_{\Delta ABC} = A_{\Delta A'B'C}$

somit: $\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot h_c - \frac{1}{2}\overline{A'B'}\cdot x = \frac{1}{2}\overline{A'B'}\cdot x$

$\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot h_c = \overline{A'B'}\cdot x$

(1) $\frac{\frac{1}{2}h_c}{x} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$

nach dem Strahlensatz gilt: $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{x}{h_c}$

somit gilt für (1): $\frac{\frac{1}{2}h_c}{x} = \frac{x}{h_c}$

$\frac{1}{2}{h_c}^2 = x^2$

$\frac{{h_c}^2}{x^2} = \frac{2}{1}$

$\frac{h_c}{x} = \frac{\sqrt{2}}{1}$

da $h_c = x+y$ gilt: $\frac{x+y}{x} = \frac{\sqrt{2}}{1}$

$1+\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{2}}{1}$

$\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{2}-1}{1}$

17 $f(x) = 2x^2-3x-2$;

Graph von g erhält man aus f durch Streckung in x-Richtung mit dem Faktor 2:

$g(x) = 2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 3\cdot\left(\frac{x}{2}\right) - 2 = 0{,}5x^2 - 1{,}5x - 2$

Nullstellen von $f(x)$: $x_1 = 2$; $x_2 = -0{,}5$

Nullstellen von $g(x)$: $x_1 = 4$; $x_2 = -1$

8 Produkt- und Quotientenregel

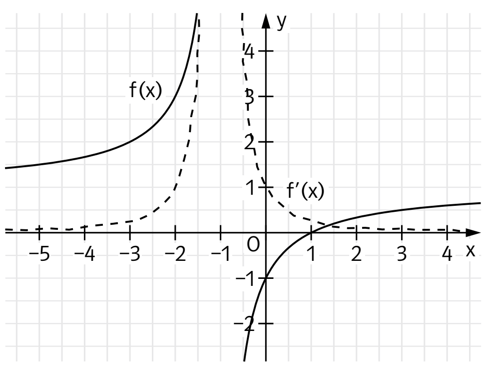
S. 53

1 a) $u'(x) = 6x$, $v'(x) = 12x^2-3$

b) $f(x) = (3x^2-4)\cdot(4x^3-3x) = 12x^5-25x^3+12x$; $f'(x) = 60x^4-75x^2+12$

c) $u'(x)\cdot v'(x) = 6x\cdot(12x^2-3) = 72x^3-18x \neq f'(x)$ $\Rightarrow$ Die Gleichung $f'(x) = u'(x)\cdot v'(x)$ stimmt nicht.

2



Eigenschaften von $f'(x)$:

f' hat bei $x = -1$ ebenfalls eine senkrechte Asymptote und geht links und rechts der Asymptote gegen $+\infty$. (Pol 2. Ordnung; Nenner $(x+1)^2$)

f' besitzt keine Nullstelle und muss wegen der x-Achse als Asymptote den Zählergrad kleiner 2 haben, also Zähler vermutlich konstant.

Vermutung: $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$;

tatsächlich ist $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$.

S. 55

3 Berechnung analog *Schülerbuch, Seite 53,* Beispiel 1

a) $f'(x) = 5x^4+3x^2-2x-6$

b) $f'(x) = 4x^3-7{,}5x^2-8x+1$

c) $f'(x) = 2x+2$

d) $f'(x) = 6x^5-10x^4+4x^3+6x^2-2x-2$

e) $f'(x) = 6x^5+9x^2+16x^3+12$

f) $f'(x) = 2{,}5x^4-16x^3+27x^2+17{,}5x+22$

g) $f'(x) = 2x^3-x$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

4 a) $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ b) $g'(x) = \frac{2}{(1+3x)^2}$ c) $f'(z) = \frac{-z^2-4z-1}{(z+2)^2}$

d) $f'(t) = \frac{-t^2-4t-1}{(t^2-1)^2}$ e) $g'(x) = \frac{6(x^2+15)}{(15-x^2)^2}$ f) $h'(z) = \frac{8z^2+8z+10}{(2z+1)^2}$

5 $f'(x) = \frac{x^2 \cdot 0 - 1 \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3}$ oder: $f(x) = x^{-2}$ $\Rightarrow$ $f'(x) = -2 \cdot x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$ (vgl. LE 6)

S. 56

6 a) $f'(x) = 2x \cdot \sin\frac{x}{2} + x^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos\frac{x}{2}$ b) $f'(x) = \sqrt{2x} \cdot (2x-1) + \frac{1}{\sqrt{2x}} \cdot (x^2-x-1)$

c) $f'(x) = -\sqrt{1+x^2} \cdot 2\sin(2x-1) + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \cos(2x-1)$ d) $f'(x) = \frac{3x^2+1}{\sqrt{2x^3+2x}}$

e) $f'(x) = \sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2}$

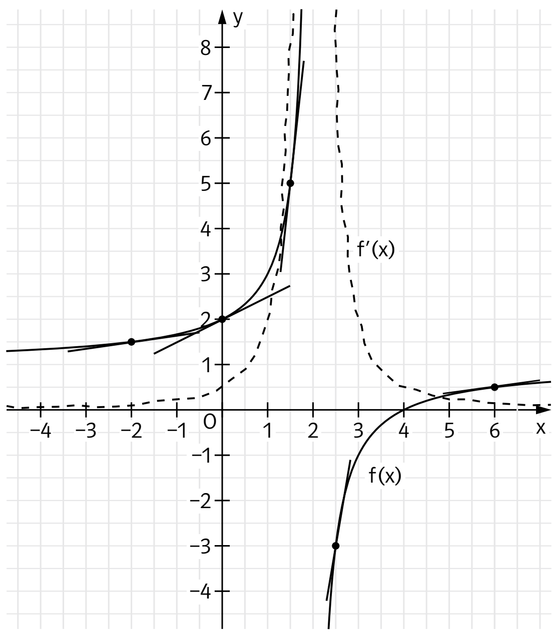
f) Wegen $\sqrt{2x^3-4x^2+2x} = \sqrt{2x} \cdot \sqrt{x^2-2x+1} = \sqrt{2x} \cdot \sqrt{(x-1)^2} = \sqrt{2x} \cdot |x-1|$ sollte $x \geqq 1$ vorausgesetzt werden. Dann ist $f'(x) = \frac{3x-2}{\sqrt{2x}}$.

7 a) $f(x) = -x - \frac{1}{2x}$ $f'(x) = -1 + \frac{1}{2x^2}$ b) $f(x) = 3x$ $f'(x) = 3$

c) (mit Quotientenregel) $f'(x) = \frac{8x^2-8x-2}{(2x-1)^2}$ d) $f(x) = \frac{3}{x^3} - \frac{4}{x}$ $f'(x) = \frac{-9}{x^4} + \frac{4}{x^2}$

e) $f(x) = 2x^3 - \frac{x^2}{5} + \frac{1}{5}$ $f'(x) = 6x^2 - \frac{2}{5}x$ f) (mit Quotientenregel) $f'(x) = \frac{12}{(2x+3)^2}$

8 $f(-2) = 1{,}5$; $f(0) = 2$; $f(1{,}5) = 5$;
$f(2{,}5) = -3$; $f(6) = 0{,}5$
$f'(x) = \frac{2}{(2-x)^2}$ (Quotientenregel);
$f'(-2) = 0{,}125$; $f'(0) = \frac{1}{2}$; $f'(1{,}5) = 8$;
$f'(2{,}5) = 8$; $f'(6) = 0{,}125$

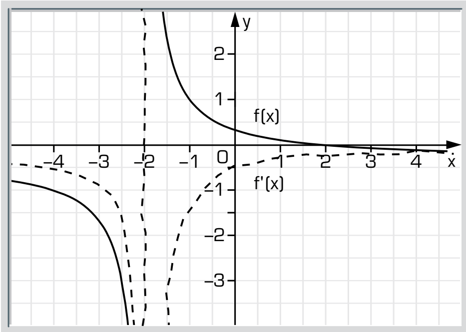


9 a) $g'(x) = 20x^4 + 32x^3 - 42x^2 - 8x + 6$ b) $f'(x) = 4x^3 - 3ax^2 + x(2-2a) + a^2$ c) $f'(x) = \frac{-6ax}{(1+x^2)^2}$

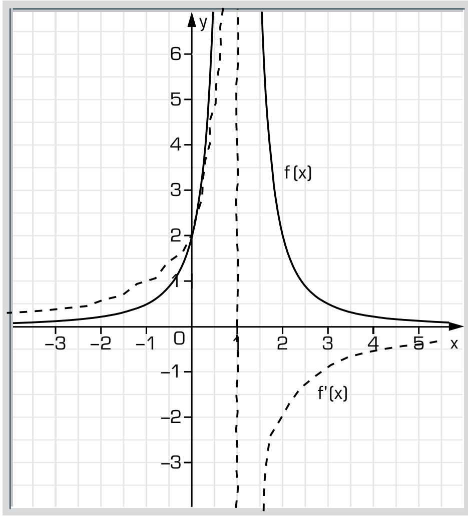
d) $f'(a) = \frac{3}{1+x^2}$ e) $g'(x) = \frac{16x^3}{(x^4+4)^2}$ f) $h'(x) = \frac{tx^2+2tx-2}{(x+1)^2}$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

10 a)



b)



11 a) $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2x^2}$; $\quad \frac{1}{2} - \frac{3}{2x^2} = -\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \frac{3}{2x^2} = 1 \;\Rightarrow\; x^2 = \frac{3}{2} \;\Rightarrow\; x_1 = +\sqrt{\frac{3}{2}};\; x_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$

b) $f'(x) = -1 - \frac{1}{x^2}$; $\quad -1 - \frac{1}{x^2} = -5 \;\Rightarrow\; -\frac{1}{x^2} = -4 \;\Rightarrow\; x^2 = \frac{1}{4} \;\Rightarrow\; x_1 = \frac{1}{2};\; x_2 = -\frac{1}{2}$

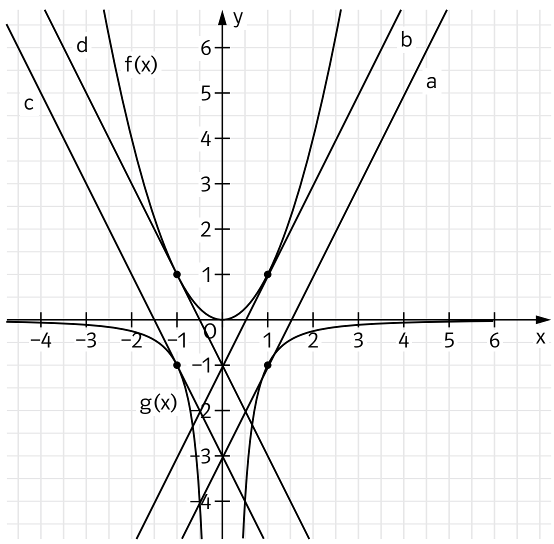
c) $f'(x) = \frac{x^2+4x+9}{(x+2)^2}$; $\quad x^2+4+9 = \frac{6}{5}\cdot(x+2)^2 \;\Rightarrow\; -x^2-4x+21 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = -7;\; x_2 = 3$

12 Fehler im *Schülerbuch*: Es muss heißen:
„An welchen Stellen stimmen die Funktionswerte von f' und g' überein." Das bedeutet geometrisch, dass an den berechneten Stellen die Tangenten an den beiden Graphen paralell sind.

a) $f'(x) = 2x$; $\quad g'(x) = \frac{2}{x^3}$

$2x = \frac{2}{x^3} \;\Rightarrow\; x^4 = 1$

$\Rightarrow\; x_1 = -1;\; x_2 = 1$

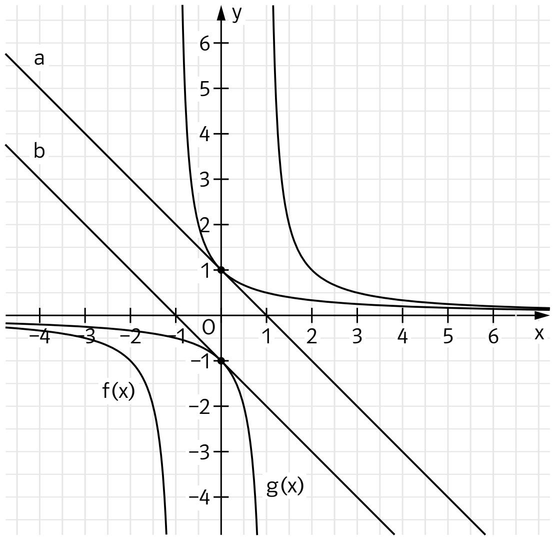


Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

b) $f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$; $g'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$;

$\frac{-1}{(x+1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2} \Rightarrow -(x-1)^2 = -(x+1)^2$

$\Rightarrow x = 0$

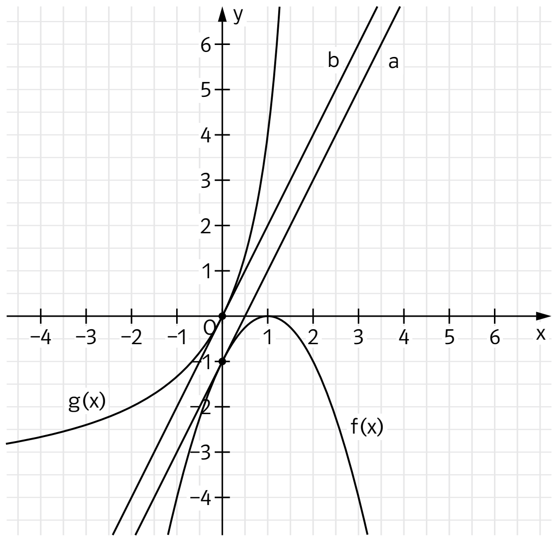


c) $f'(x) = -2x+2$; $g'(x) = \frac{8}{(x-2)^2}$;

$-2x+2 = \frac{8}{(x-2)^2} \Rightarrow -2x^3+10x^2-16x = 0$

$-2x(x^2-5x+8) = 0 \Rightarrow x = 0$

(x^2-5x+8 wird nicht Null)



S. 57

13 a) $f(1) = \frac{1}{2}$;

$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$; $f'(1) = \frac{1}{4}$ $\Big\}$ $\frac{1}{2} = \frac{1}{4}\cdot 1+t \Rightarrow t = \frac{1}{4}$ t: $y = \frac{1}{4}x+\frac{1}{4}$

$f(2) = \frac{2}{3}$; $f'(2) = \frac{1}{9}$; $\frac{2}{3} = \frac{1}{9}\cdot 2+t \Rightarrow t = \frac{4}{9}$ t: $y = \frac{1}{9}x+\frac{4}{9}$

b) $f(1) = 2$

$f'(x) = \frac{8x^3+2}{x^2}$; $f'(1) = 10$ $\Big\}$ $2 = 10\cdot 1+t \Rightarrow t = -8$; t: $y = 10x-8$

$f(2) = 15$; $f'(2) = 16{,}5$; $15 = 16{,}5\cdot 2+t \Rightarrow t = -18$; t: $y = 16{,}5x-18$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

14 Fehler im *Schülerbuch*: Es sollten eigentlich die Tangenten bestimmt werden, die durch den Punkt $P(1|f(1))$ gehen. Dabei sind die Lösungen:

a) $f'(x) = \frac{-4}{(x-2)^2}$; $f'(1) = -4$; $-2 = 1 \cdot (-4) + t \Rightarrow t = 2$; $t\colon\ y = -4x + 2$

b) $f'(x) = \frac{-4}{(2x-1)^2}$; $f'(1) = -4$; $3 = 1 \cdot (-4) + t \Rightarrow t = 7$; $t\colon\ y = -4x + 7$

Für die Aufgabenstellung des Schülerbuchs ist die Tangente von einem Punkt außerhalb des Graphen an den Graphen zu legen.
Dazu ist zunächst die Berührungsstelle zu berechnen und danach die Gleichung der Tangente.

a) $x_{B1} = -2(\sqrt{3}+1)$ und $x_{B2} = -2(\sqrt{3}-1)$

$\Rightarrow$ t_1: $y = -0{,}0718x + 1{,}0718$ bzw. t_2: $y = -13{,}93x + 14{,}983$

b) $x_B = \frac{3}{4}$ $\Rightarrow$ t: $y = -16x + 17$

Hinweis: Man sollte eventuell mit der leichteren Teilaufgabe b) beginnen.

15 Da der Graph von f in der Umgebung der beiden Asymptoten fallend verläuft, müssen die Ableitungen negativ sein. Somit kommt nur der vierte Graph in Frage.

$f(x) = \frac{x+1}{(x+2)(x-1)}$ (wegen Nullstelle bei $x = -1$ und zwei senkrechte Asymptoten für $x = -2$ und $x = 1$)

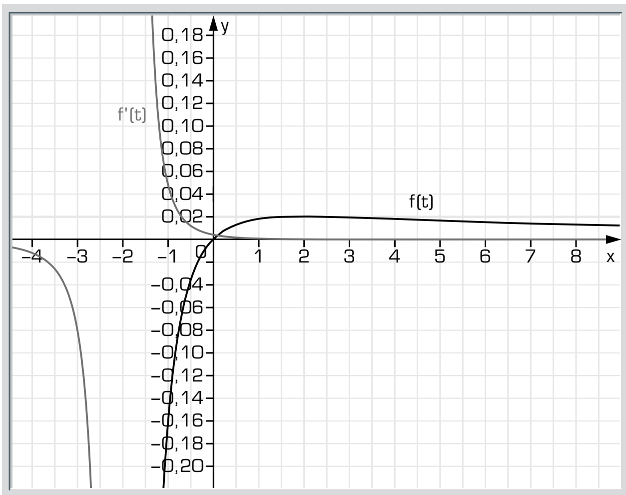
$f'(x) = \frac{-(x^2+2x+3)}{(x^2+x-2)^2}$; Graph von f′ muss Graph 4 sein.

16 a) $f'(t) = 0{,}16 \cdot \frac{2-t}{(t+2)^3}$

$f'(0) = 0{,}04$; $f'(3) = -0{,}00128$; $f'(6) = -0{,}00125$

mittlere Änderungsrate $= \frac{f(6)-f(0)}{6-0} = \frac{0{,}015}{6} = 0{,}0025$

b)



Der Graph von f nimmt für $x \in [0;2]$ leicht zu, erst für $x \in [2;6]$ gehen die Werte langsam zurück.

17 Individuelle Lösung für das Beispiel:

$f(x) = \frac{1}{x-1}$; $f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$

Wird eine gebrochen rationale Funktion abgeleitet, muss die Quotientenregel angewandt werden. Der Linearfaktor im Nenner wird quadriert. Somit besitzt die Ableitungsfunktion an derselben Stelle einen Pol ohne Vorzeichenwechsel.

18 I $2 = m \cdot 4 + t \Rightarrow 2 - 4m = t$

II $\frac{1}{3} = m \cdot (-5) + t$

I in II: $\frac{1}{3} = -5m + 2 - 4m \Rightarrow m = \frac{5}{27}$; $t = 1\frac{7}{27}$

$y = \frac{5}{27}x + 1\frac{7}{27}$

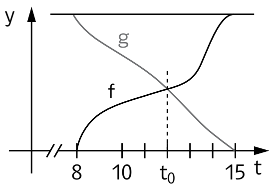
Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

Thema: Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Funktionen

S. 59

1 G_f: Er lässt sich ohne Absetzen des Zeichenstiftes zeichnen, somit ist f im gesamten gezeichneten Bereich stetig. Da der Graph an den Stellen $x = 1$ und $x = 2$ einen Knick hat, ist er dort nicht differenzierbar. An allen anderen Stellen ist f differenzierbar.

G_g: Die Funktion g ist für $x = 0$ nicht definiert.
Für $x < 0$ und für $x > 0$ ist g stetig und differenzierbar.

2 

Der Auf- und Abstieg am nächsten Tag können durch stetige Funktionen f und g wie in der Skizze ? veranschaulicht werden.
Es gilt: $f(8) < g(8)$ und $f(15) > g(15)$.
Es muss also eine Stelle geben, an der er zur gleichen Zeit vorbeikommt, weil sich die Graphen schneiden müssen.

3 a) Die Aussage ist wahr. Der Graph einer in x_0 stetigen Funktion kann dort einen Knick haben. Dann ist f in x_0 nicht differenzierbar. Beispiel: f: $x \mapsto |x|$ in $x_0 = 0$.

b) Die Aussage ist wahr. Ist f differenzierbar, so existiert $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.
Dazu ist notwendig, dass $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ existiert, d.h. auch der Zähler im Differenzenquotienten gegen Null strebt $x \to x_0$.

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2