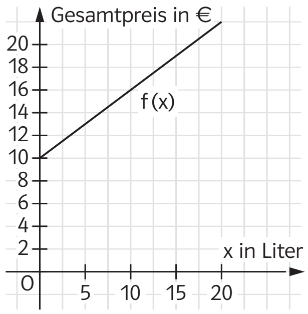
I Graphen gebrochen rationaler Funktionen

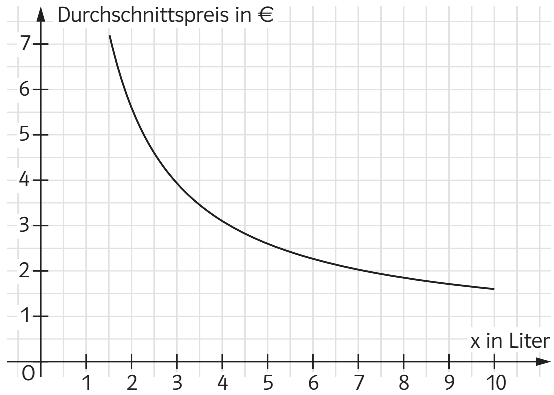
1 Verhalten in der Umgebung der Definitionslücken

S. 8

1 a) f: $x \mapsto 10 + 0{,}6x$ (Gesamtpreis in €)

b) g: $x \mapsto \frac{10 + 0{,}6x}{x}$ (Durchschnittspreis pro Liter in €)





c) Der durchschnittliche Literpreis steigt für kleiner werdendes x an, nahe bei 0 sogar sehr stark, weshalb der Kauf eines Viertelliters nicht sinnvoll ist; sachlicher Hintergrund ist der Festpreisanteil (Fixkostenanteil).

2 $f(x) > 100$ für $3 < x < 3{,}01$; $f(x) < -100$ für $2{,}99 < x < 3$

Der Graph fällt bei Annäherung an 3 von links immer stärker und verschwindet im negativen Unendlichen. Für $x = 3$ gibt es keinen Graphenpunkt. Für $x > 3$ kommt der Graph aus dem Unendlichen und fällt immer schwächer während er sich der x-Achse wieder annähert.

S. 12

3 a) gebrochen rationale Funktion; Definitionslücke bei $x = 3$

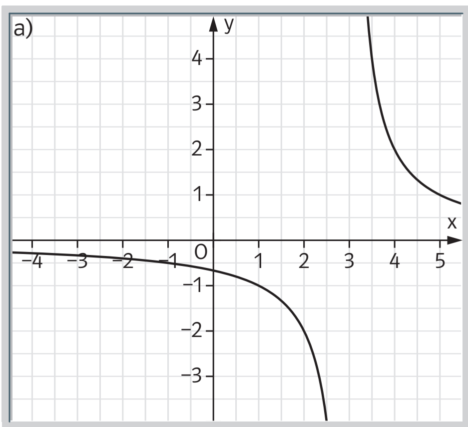
b) gebrochen rationale Funktion; Definitionslücken bei $x = -1$; $x = 3$

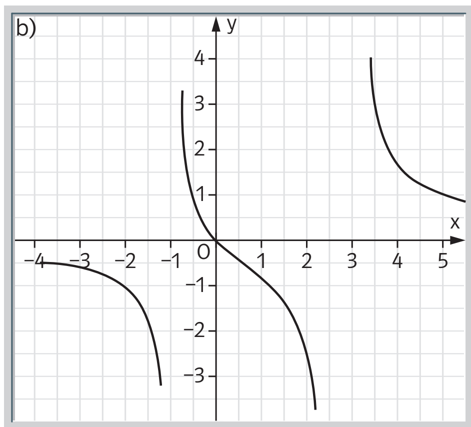
c) kann man im Sinne der Definition (*Schülerbuch S. 8*) als gebrochen rational bezeichnen (das Polynom im Nenner hat den Grad 0), wenn auch ohne Definitionslücke und den typischen Eigenschaften

d) gebrochen rationale Funktion; Definitionslücke bei $x = -2$; $x = 3$

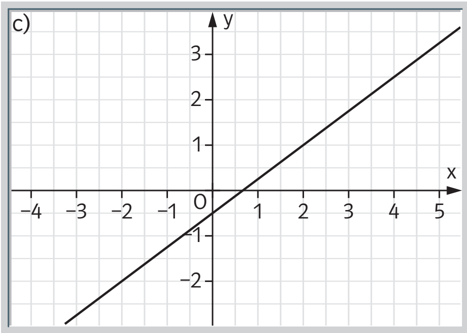
e) keine gebrochen rationale Funktion; Definitionslücke bei $x = 1$

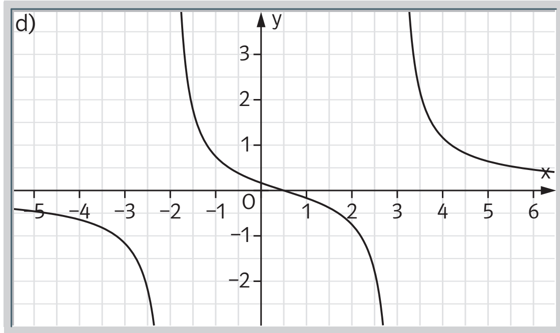
f) gebrochen rationale Funktion; keine Definitionslücke

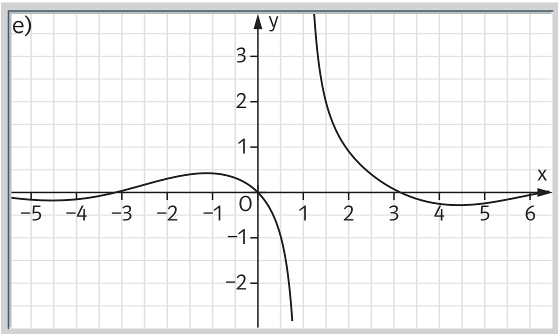


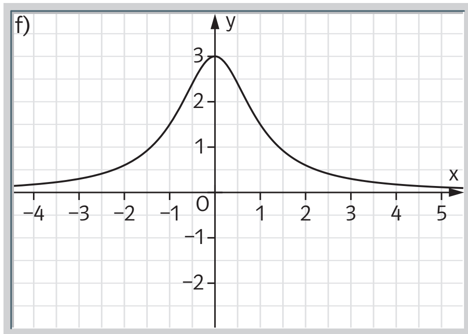


Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2









4 a) Polstellen mit Vorzeichenwechsel +/− bei $x = -\sqrt{3}$ und −/+ bei $x = \sqrt{3}$

b) Polstelle ohne Vorzeichenwechsel bei $x = 2$ mit Verhalten −/−

c) Polstellen mit Vorzeichenwechsel +/− bei $x = 0$ und −/+ bei $x = 3$

d) Polstelle ohne Vorzeichenwechsel bei $x = 0{,}5$ mit Verhalten −/−

e) keine Polstelle

f) Polstelle ohne Vorzeichenwechsel bei $x = -1$ mit Verhalten +/+
mit Vorzeichenwechsel +/− bei $x = 0$

5 a) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{2\}$; $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 2} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 2} f(x) = -\infty$; keine Nullstelle

b) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$; $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} -1} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} -1} f(x) = -\infty$; Nullstelle bei $x = 0{,}5$

c) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1; +1\}$; $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} -1} f(t) = -1$; $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} -1} f(t) = -1$; $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 1} f(t) = -\infty$; $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 1} f(t) = +\infty$;
keine Nullstelle

d) $D_f = \mathbb{R}$; Nullstellen: $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0{,}62$; $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}62$

e) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$; $\lim\limits_{z \underset{<}{\to} -\sqrt{2}} f(z) = +\infty$; $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} -\sqrt{2}} f(z) = -\infty$; $\lim\limits_{z \underset{<}{\to} \sqrt{2}} f(z) = -\infty$; $\lim\limits_{z \underset{>}{\to} \sqrt{2}} f(z) = +\infty$;
keine Nullstelle

f) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1; 3\}$; $\lim\limits_{t \underset{<}{\to} -1} f(t) = -\infty$; $\lim\limits_{t \underset{>}{\to} -1} f(t) = +\infty$; $\lim\limits_{t \underset{<}{\to} 3} f(t) = -\infty$; $\lim\limits_{t \underset{>}{\to} 3} f(t) = +\infty$;
Nullstelle bei $x = 0{,}5$

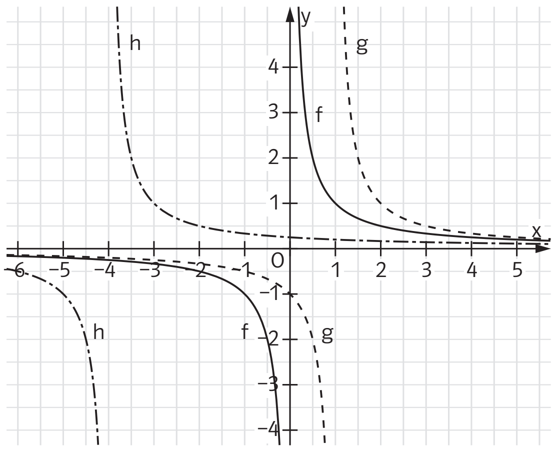
g) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$; $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 1} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 1} f(x) = +\infty$; Nullstelle bei $x = -\frac{1}{8}$

h) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1; 2\}$; $\lim\limits_{z \underset{<}{\to} -1} f(z) = +\infty$; $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} -1} f(z) = -\infty$; $\lim\limits_{z \underset{<}{\to} 2} f(z) = \frac{1}{3}$; $\lim\limits_{z \underset{>}{\to} 2} f(z) = \frac{1}{3}$;
Nullstelle bei 1

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

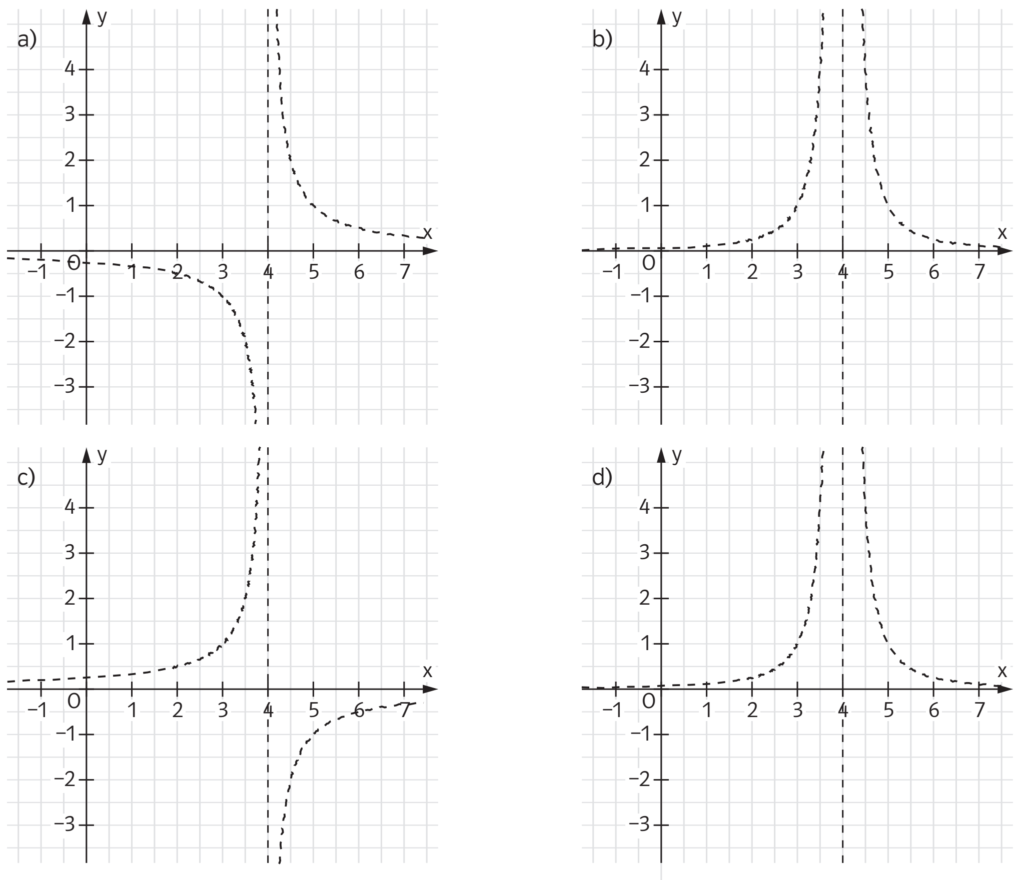
6 von links:
- Polstelle mit Vorzeichenwechsel; $x = 1$; f: $x \mapsto \frac{1}{1-x}$
- Polstelle ohne Vorzeichenwechsel; $x = 2$; f: $x \mapsto \frac{-2}{(x-2)^2}$
- Polstelle mit Vorzeichenwechsel; $x = 0{,}5$; f: $x \mapsto \frac{1}{x-0{,}5}$
- Polstelle ohne Vorzeichenwechsel; $x = 0$; f: $x \mapsto \frac{1{,}5}{x^2}$
- Polstelle mit Vorzeichenwechsel; $x = -1$; f: $x \mapsto \frac{1}{2(x+1)}$

7 f: Definitionslücke bei $x = 0$
g: Definitionslücke bei $x = 1$
h: Definitionslücke bei $x = -4$



Der Graph von g entsteht aus demjenigen von f durch Verschiebung um eine Einheit in positive x-Richtung.
Der Graph von h entsteht aus demjenigen von f durch Verschiebung um 4 Einheiten in negative x-Richtung.
Der Graph von h entsteht aus demjenigen von g durch Verschiebung um 5 Einheiten in negative x-Richtung.

8



Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

9 a) Z.B. f: $x \mapsto \frac{1}{x+3}$; $-\frac{1}{2x+6}$; $-\frac{2}{3+x}$

b) Z.B. f: $x \mapsto \frac{1}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{x^2-4}$; $-\frac{1}{2x^2-8}$; $\frac{2}{x^2-4}$

c) Z.B. f: $x \mapsto \frac{1}{(x+2)(x-3)} = \frac{1}{x^2-x-6}$; $-\frac{1}{2x^2-2x-12}$; $\frac{2}{x^2-x-6}$

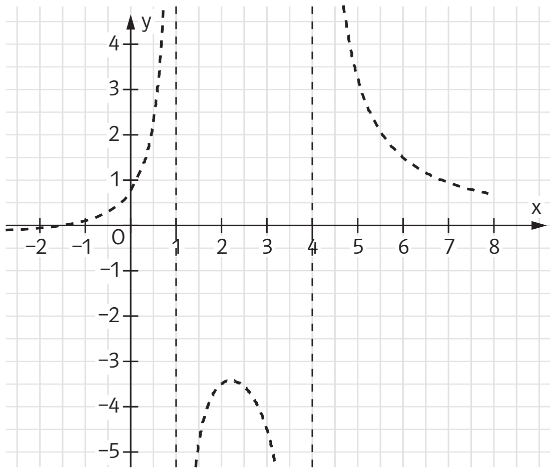
d) Z.B. f: $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$; $-\frac{1}{2x^2+2}$; $\frac{2}{1+x^2}$

10 a) $f(x) = \frac{2x+3}{(x-1)(x-4)}$; $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1; 4\}$

$\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 1} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 1} f(x) = -\infty$;

$\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 4} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 4} f(x) = +\infty$;

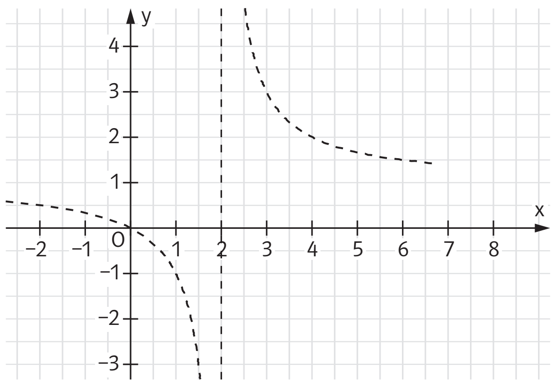
Nullstelle: $x = -\frac{3}{2}$



b) $f(x) = \frac{2x(x-2)}{2(x-2)^2}$; $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 2} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 2} f(x) = +\infty$;

Nullstelle: $x = 0$

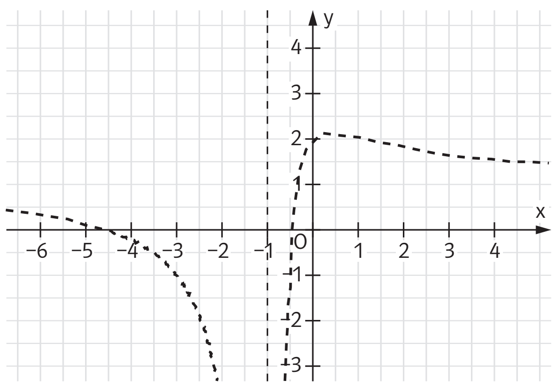


c) $f(x) = \frac{x^2+5x+2}{(x+1)^2}$; $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$;

$\lim\limits_{x \underset{<}{\to} -1} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} -1} f(x) = -\infty$;

Nullstellen:

$x_1 = \frac{-5-\sqrt{17}}{2} \approx -4{,}6$; $x_2 = \frac{-5+\sqrt{17}}{2} \approx -0{,}4$



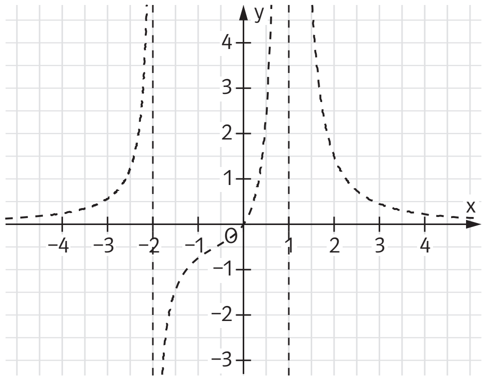
Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

d) $f(x) = \frac{3x}{(x+2)(x-1)^2}$; $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$

$\lim\limits_{x \underset{<}{\to} -2} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} -2} f(x) = -\infty$;

$\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 1} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 1} f(x) = +\infty$;

Nullstelle: $x = 0$



S. 13

11 a) $A(x) = \frac{1}{2}(U - 2x) \cdot x = -x^2 + \frac{U}{2}x$

$D = \left]0; \frac{U}{2}\right[$

Für $U = 12$ ergibt sich:

$A(x) = -x^2 + 6x$

$D =]0; 6[$

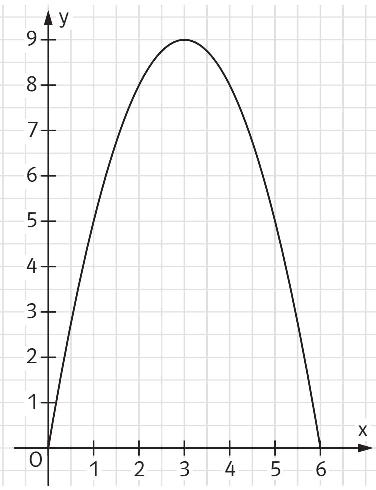
b) $U(x) = 2 \cdot \left(x + \frac{A}{x}\right) = \frac{2(x^2 + A)}{x}$

$D = \mathbb{R}^+$

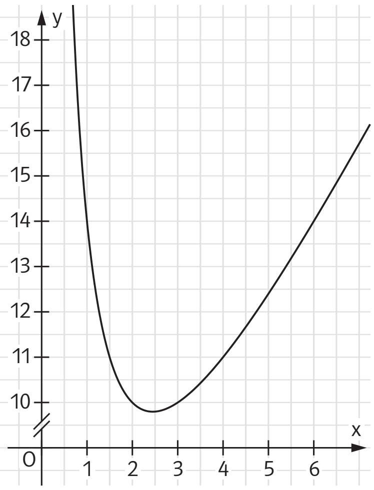
Für $A = 6$ ergibt sich:

$U(x) = \frac{2x^2 + 12}{x}$

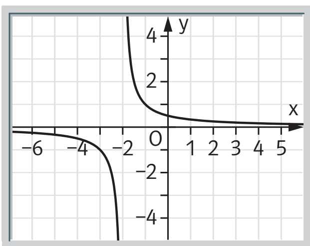
a)



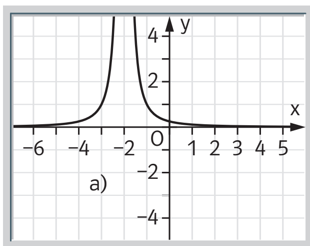
b)



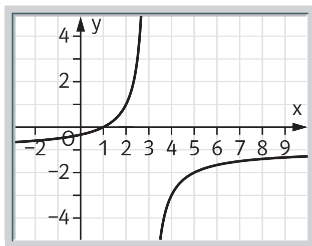
12 a) $f\colon x \mapsto \frac{1}{x+2}$



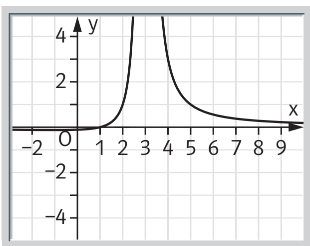
b) $f\colon x \mapsto \frac{1}{(x+2)^2}$



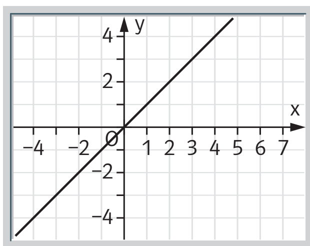
c) $f\colon x \mapsto -\frac{x-1}{x-3}$



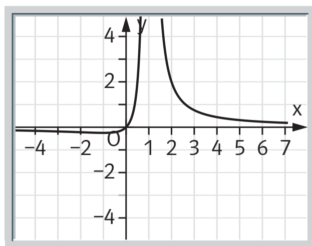
d) $f\colon x \mapsto \frac{x-1}{(x-3)^2}$



e) $f\colon x \mapsto \frac{x^2 - 2x}{x-2} = \frac{x(x-2)}{x-2}$



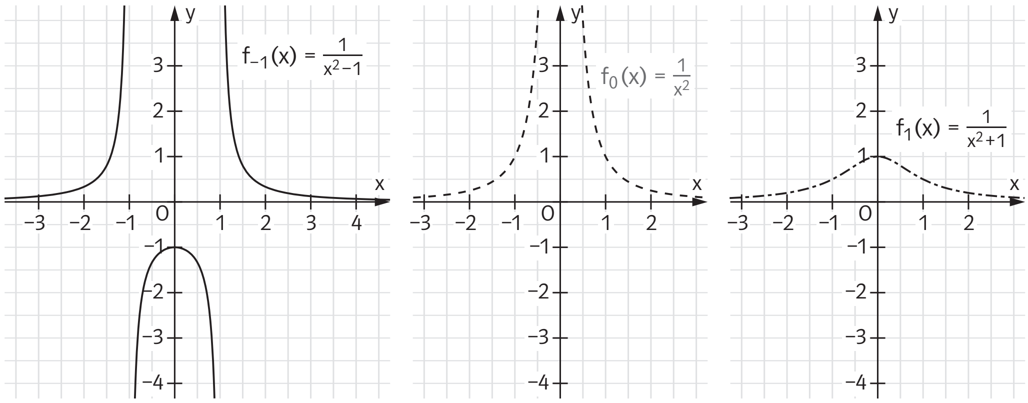
f) $f\colon x \mapsto \frac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)^2}$



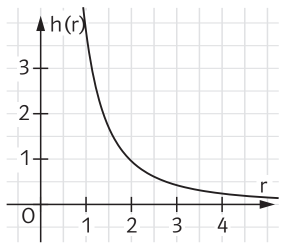
Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

13 a) $t < 0$: 2 Definitionslücken bei $x = \pm\sqrt{-t} \Rightarrow D_{f_t} = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{-t}; +\sqrt{-t}\}$
$t = 0$: 1 Definitionslücke bei $x = 0 \Rightarrow D_{f_t} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$t > 0$: keine Definitionslücke $\Rightarrow D_{f_t} = \mathbb{R}$

b)



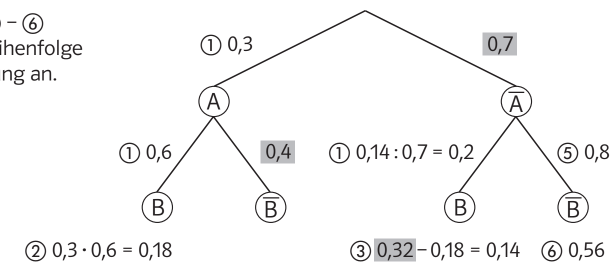
14 a) $h(r) = \frac{V}{r^2 \cdot \pi}$
speziell für $V = 12$:
$h(r) = \frac{12}{r^2 \cdot \pi}$



b) $\frac{V}{(2r)^2 \cdot \pi} = \frac{V}{4r^2 \cdot \pi} = \frac{1}{4} \frac{V}{r^2 \cdot \pi}$
Die Höhe wird geviertelt.

15 a) $x^2 + 3x - 10$ b) $x^3 - 2x^2 + 1$ c) $x - 2$ d) $2x + 8$ e) $x^2 + x + 3$

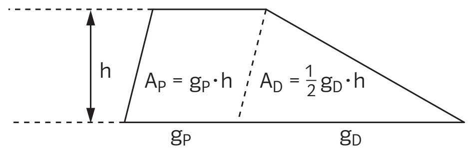
16 Die Ziffern ① – ⑥ geben die Reihenfolge der Berechnung an.



a) $P(A \cap B) = 0{,}18$ b) $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}2$

c) $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}44$ d) $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}18}{0{,}32} = 0{,}5625$

17 Das durch die Zerlegung entstandene Parallelogramm hat die gleiche Höhe wie das entstandene Dreieck.
Damit beide Figuren den gleichen Flächeninhalt haben, muss die Grundseite des Dreiecks doppelt so groß wie die Grundseite des Parallelogramms sein. Dies wird von Trapezen erfüllt, bei denen eine der zueinander parallelen Seiten dreimal so lang wie die andere ist.



Klett

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern, Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

2 Verhalten im Unendlichen

S. 14

1 $\lim\limits_{h\to+\infty} A_K = \lim\limits_{h\to+\infty} \frac{2\pi r^2 h}{r+h} = \lim\limits_{h\to+\infty} \frac{h\cdot 2\pi r^2}{h\left(\frac{r}{h}+1\right)} = \lim\limits_{h\to+\infty} \frac{2\pi r^2}{\frac{r}{h}+1} = 2\pi r^2$

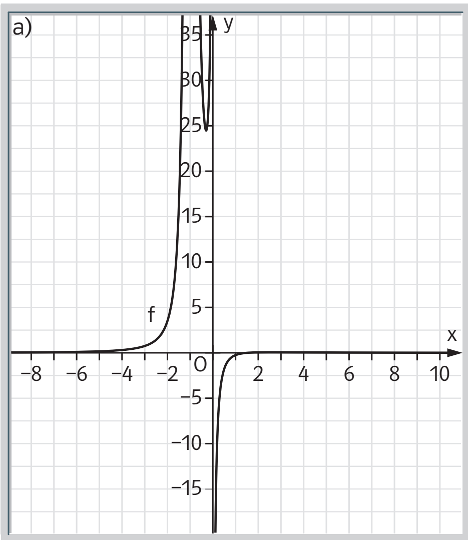
Randspalte Aus sehr großer Entfernung muss man etwa die halbe Erdoberfläche sehen können, da die den Blickwinkel begrenzenden Halbgeraden nahezu parallel werden.
Die Besatzung der ISS sieht etwa 2,6% Erdoberfläche.

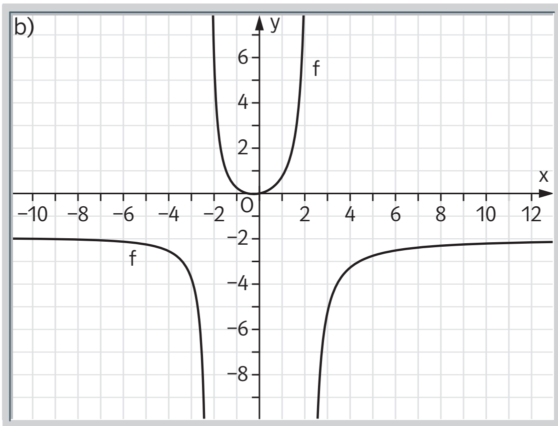
S. 16

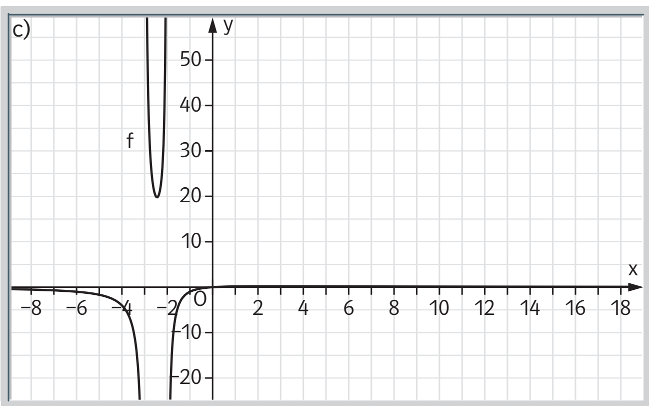
2

	waagrechte Asymptote	senkrechte Asymptote	schräge Asymptote
a)	y = 0	x = −0,5	–
b)	y = 1	x = −1	–
c)	y = 0	x = −0,5; x = 0,5	–
d)	y = 0,5	–	–
e)	y = −2	x = 0; x = 4	–
f)	–	x = 0,5	y = 1,5x − 0,25
g)	–	x = 1	y = x
h)	y = 0	x = 2	–

3







Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

	Graph steigt	Graph fällt	$x \to -\infty$	$x \to +\infty$	Definitionslücken
a)	$x \in]-\infty; -1[\cup [-0{,}3; 0[\cup]0; 2{,}5]$	$x \in]-1; -0{,}3] \cup [2{,}5; +\infty[$	$f(x) \to 0$	$f(x) \to 0$	$x = -1;\ x = 0$
b)	$x \in [-0{,}25; +\infty[\setminus \{\sqrt{5}\}$	$x \in]-\infty; -0{,}25] \setminus \{-\sqrt{5}\}$	$f(x) \to -2$	$f(x) \to -2$	$x = -\sqrt{5};\ x = +\sqrt{5};$
c)	$x \in [-2{,}45; 2{,}5] \setminus \{-1; 2\}$	$x \in]-\infty; -2{,}45] \setminus \{-3\} \cup [2{,}5; +\infty[$	$f(x) \to 0$	$f(x) \to 0$	$x = -3;\ x = -2;$ $x = -1$ (Loch)

S. 17

4 f_1, f_3, f_4 und f_6 kommen nicht in Frage, da sie wegen Zählergrad = Nennergrad waagrechte Asymptoten besitzen und keine schrägen. f_2 kommt ebenso nicht in Frage, da deren senkrechte Asymptote $x = -2$ und nicht $x = 2$ wäre. Daher muss es f_5 sein.
Formt man f_5 so um, so sieht man: $f_5(x) = 0{,}5x + 1 + \frac{1}{4-2x}$.

5 1 → U; 2 → D; 3 → A; 4 → K; 5 → A; 6 → K Lösungswort (von 6 nach 1 gelesen): KAKADU

6 1. Aussage: Bei einer waagrechten Asymptote stimmt das, da $x = x_0$ nicht in den Funktionsterm eingesetzt werden darf.

2. Aussage: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{(x-2)^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2-4x-4} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1-\frac{4}{x}-\frac{4}{x^2}} = 1$

$\Rightarrow$ $y = 1$ ist waagrechte Asymptote
Aber $f(1) = 1$
Auch diese Aussage stimmt.

7 Waagrechte Asymptote $y = 0$: f_2, f_7, f_9
Waagrechte Asymptote $y = -2$: f_1, f_3
Schräge Asymptote $y = x - 3$: f_4, f_5, f_{10}
$f_5(x) = x - 3 + \frac{1}{1-2x}$

8

Funktion	Graph	Begründung
f	rot	Asymptoten: $x = 1;\ y = 1{,}5$
g	blau	Asymptoten: $x = -1;\ y = -0{,}5$
h	–	Asymptoten: $x = 1;\ y = 0$
k	–	Asymptoten: $x = 1;\ y = 0$
m	schwarz	Asymptote: $y = 3$
n	grün	nach unten geöffnete Parabel
p	violett	Sinusfunktion; Streckung um 2 in x-Richtung
r	–	nach oben geöffnete Parabel

9 a) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ b) $f(x) = \frac{1}{2x-3}$ c) $f(x) = x - 2 + \frac{1}{x+1} = \frac{x^2-x-1}{x+1}$

d) $f(x) = \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x^2-4}$ e) $f(x) = x - \frac{1}{x} = \frac{x^2+1}{x}$ f) $f(x) = \frac{1}{x-\sqrt{2}}$

g) Entweder sind Zählergrad und Nennergrad gleich, dann gibt es eine waagrechte Asymptote aber keine schräge oder der Zählergrad ist um 1 größer als der Nennergrad, dann gibt es eine schräge Asymptote aber keine waagrechte. Beides kann nicht gleichzeitig eintreten.

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern, Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

S. 18

10 a) $c = 12;$

$\frac{a+b+12}{2} = 4{,}5$

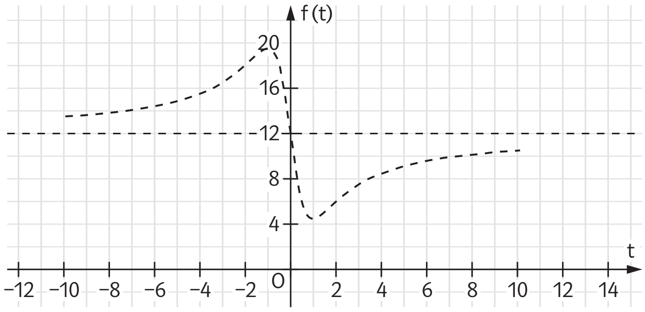
und

$\frac{4a+2b+12}{5} = 6{,}0$

ergibt:

$a = 12;\ b = -15$

b)



c) Ansatz: $f(t) = 0{,}9 \cdot f(0);$

$12t^2 - 15t + 12 = 10{,}8\,(t^2+1)$

$1{,}2t^2 - 15t + 1{,}2 = 0$

$\Rightarrow\quad t \approx 12{,}4$ (Tage)

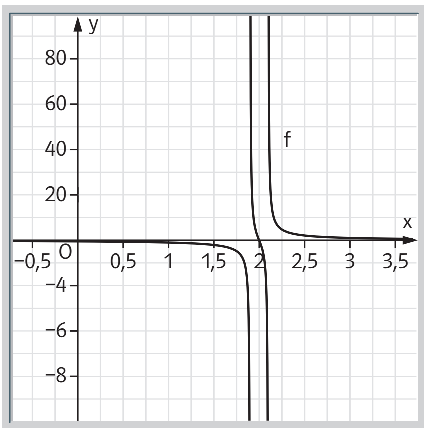
11 a) $f(x) = 8 - \frac{1{,}9}{0{,}5x+2} \quad\Rightarrow\quad y = 8$

b) $f(x) = -\frac{3}{2} - \frac{\frac{3}{2}x - \frac{7}{2}}{-2x^2 - x + 3} \quad\Rightarrow\quad y = -\frac{3}{2}$

c) $g(x) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{8} + \frac{\frac{17}{8}}{2x+1} \quad\Rightarrow\quad y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}$

d) $g(x) = -\frac{5}{2} + \frac{2 - \frac{5}{2}x}{2x^2 - x} \quad\Rightarrow\quad y = -\frac{5}{2}$

12



Der Graph kommt für $x \to -\infty$ von der x-Achse und fällt bis zur Asymptote $x = 1{,}9$, einer Asymptote mit Vorzeichenwechsel. Rechts von $x = 1{,}9$ fällt der Graph bis zur Asymptote $x = 2{,}1$, wieder mit Vorzeichenwechsel. Dabei schneidet er die x-Achse an der Nullstelle $x = 2$. Rechts von $x = 2{,}1$ fällt der Graph und nähert sich für große x der x-Achse.

13 a) $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{9}{8}$

$|f(10) - g(10)| = \frac{\frac{17}{8}}{2 \cdot 10 + 1} \approx 0{,}101$ $\qquad |f(100) - g(100)| = \frac{\frac{17}{8}}{2 \cdot 100 + 1} \approx 0{,}011$

b) $g(x) = 2x^2 - 3$

$|f(10) - g(10)| = \frac{1}{10^2+1} \approx -0{,}01$ $\qquad |f(100) - g(100)| = \frac{1}{100^2+1} \approx -0{,}0001$

c) $g(x) = -2x^2 - 4x^2 - 6x - 7{,}5$

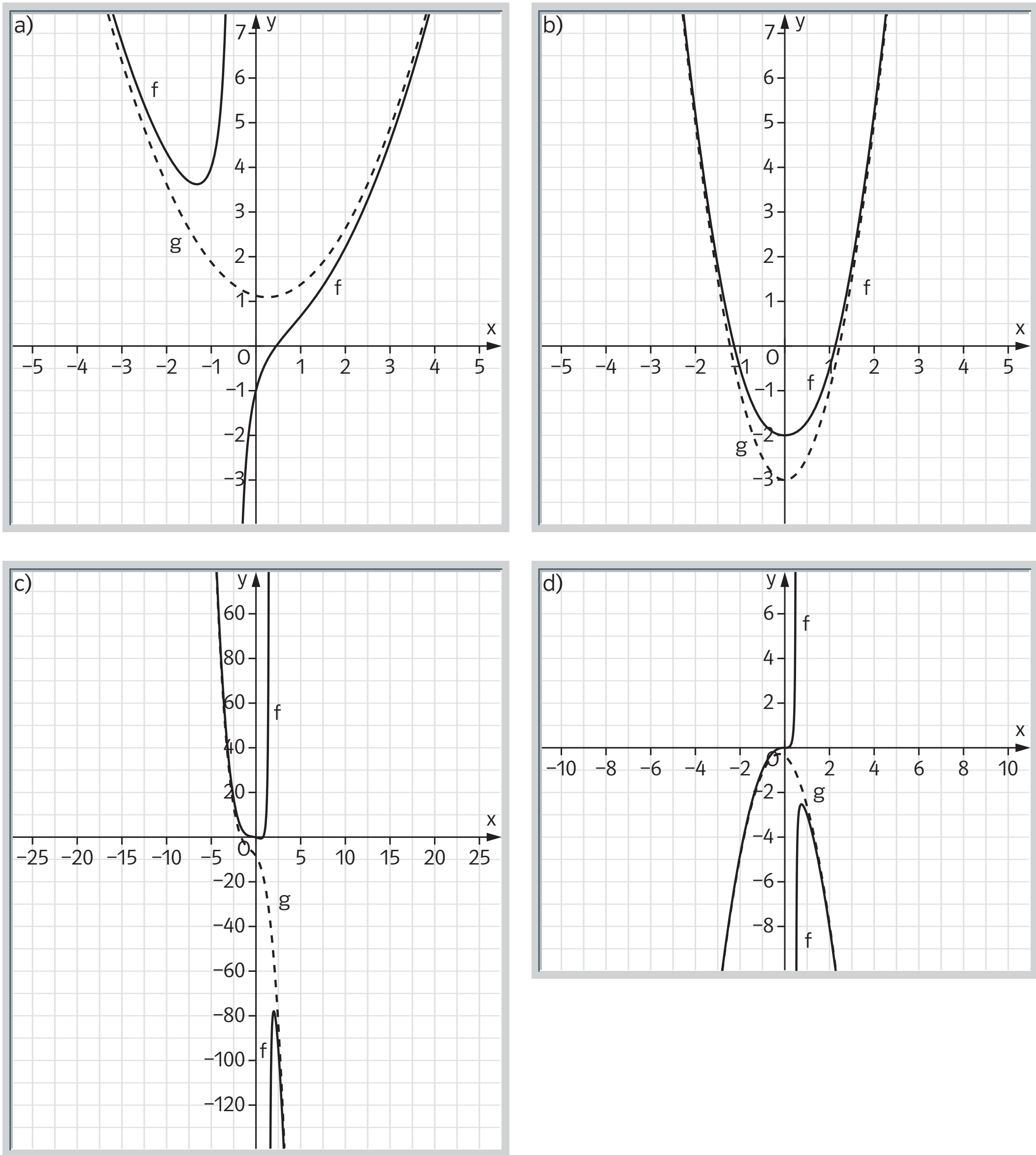
$|f(10) - g(10)| = \frac{\frac{45}{2}}{2 \cdot 10^{-3}} \approx 1{,}324$ $\qquad |f(100) - g(100)| = \frac{\frac{45}{2}}{2 \cdot 100^{-3}} \approx 0{,}114$

d) $g(x) = -\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{3}{8}$

$|f(10) - g(10)| = \left|\frac{\frac{3}{8}}{-2 \cdot 10 + 1}\right| \approx 0{,}02$ $\qquad |f(100) - g(100)| = \left|\frac{\frac{3}{8}}{-2 \cdot 100 + 1}\right| \approx 0{,}002$

Zu beachten: Die Differenz der beiden Funktionswerte entspricht dem Wert des Restterms bei der Polynomdivision.

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2



14 a) $f_a(x) = a(x+1)(x-3);\ a \in \mathbb{R}$

b) $f_a(1) = a(1+1) \cdot (1-3) = 2$

$\Rightarrow\ a = -0{,}5$

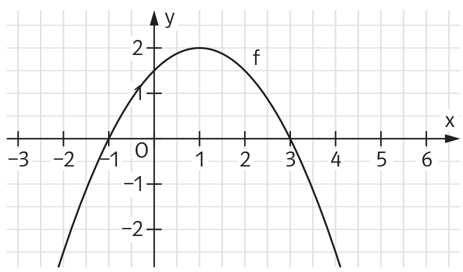
c) Scheitelpunktform:

$f_a(x) = a(x-1)^2 - 4a$

Die Scheitelpunkte haben die Koordinaten $S_c(-1\,|\,-4a)$.

Somit liegen die Scheitelpunkte aller Parabeln auf der Geraden $x = 1$.

Da $(-1\,|\,c)$ und $(3\,|\,0)$ bereits Nullstellen der Parabeln sind, kann es keine weitere Nullstelle mehr geben. Der Punkt 10 kann also auch kein Scheitelpunkt sein.



15 a) 1 Lösung: $r = 6;\ s = 0{,}6$

b) keine Lösung

c) $L = \left\{(\alpha;\ \beta)\,|\,\alpha \in \mathbb{R};\ \beta = -\frac{1}{2}\alpha + 1{,}5\right\}$

d) 1 Lösung: $\gamma = \frac{1}{3};\ \varepsilon = 0$

e) 1 Lösung: $x = 1;\ y = 1$

f) 1 Lösung: $x = 7\frac{4}{9};\ y = 8\frac{5}{9}$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

3 Zusammenhang von Graphen und Termen

S. 19

1 Links: Achsensymmetrisch zur y-Achse; zwei Schnittpunkte mit der x-Achse bei etwa $x_1 = -1{,}4$ und $x_2 = 1{,}4$, zwei senkrechte Asymptoten: $x = -1$, $x = 1$; vermutlich waagrechte Asmptote

Mitte links: vermutlich ein Schnittpunkt mit der x-Achse bei $x = 2$; vermutlich waagrechte Asmptote $y = 0$; keine senkrechte Asymptote

Mitte rechts: punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung; ein Schnittpunkt mit der x-Achse; senkrechte Asymptote: $x = 0$; waagrechte Asmptote $y = 0$

Rechts: ein Schnittpunkt mit der x-Achse bei $x = 0{,}5$; senkrechte Asymptote: $x = 1$; waagrechte Asmptote $y = 1$

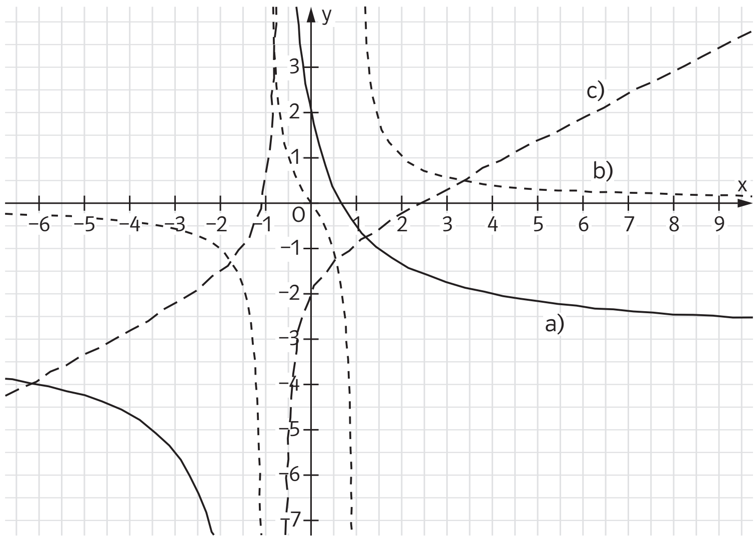
2 Ganzrationale Funktionen
können symmetrisch sein; gehen gegen Unendlich; keine Unterbrechungen maximaler Definitionsmenge; können die x-Achse bis zu n-mal schneiden

Gebrochen rationale Funktionen
können symmetrisch sein; können senkrechte, waagrechte oder schräge Asymptoten besitzen; maximale Definitionsmenge ist meist nicht $\mathbb{R}$

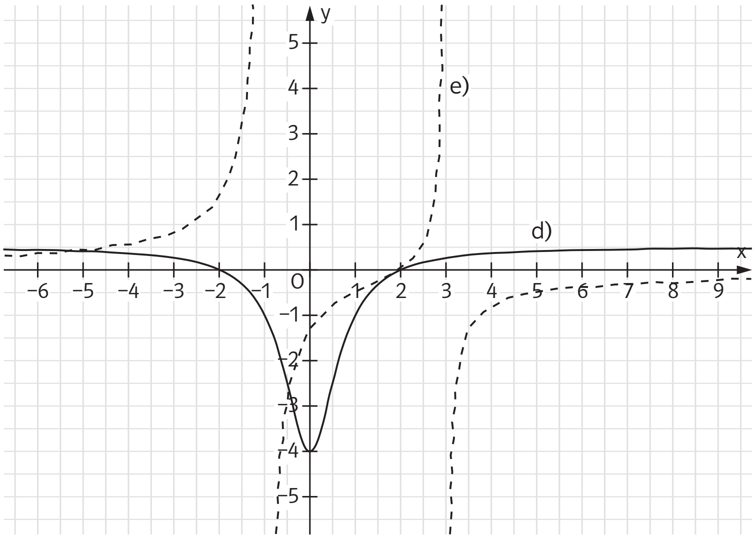
S. 21

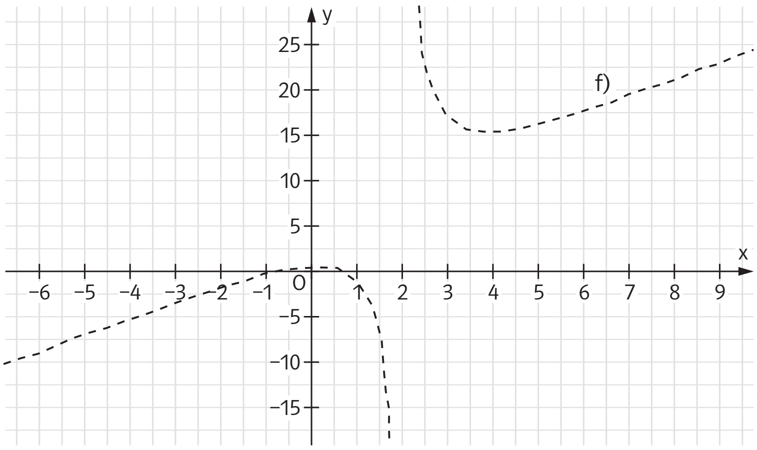
3

	Definitionsmenge	Symmetrie	Asymptoten	Nullstellen
a)	$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	–	$x = -1$; $y = -3$	$x = \frac{2}{3}$
b)	$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$	punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung	$x = -1$; $x = 1$; $y = 0$	$x = 0$
c)	$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$	–	$x = -\frac{2}{3}$; $y = \frac{1}{2}x - 1$	$x_1 \approx -1{,}10$; $x_2 \approx 2{,}43$
d)	$D_f = \mathbb{R}$	achsensymmetrisch zur y-Achse	$y = 0{,}5$	$x_1 = 2$; $x_2 = -2$
e)	$D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$	–	$x = -1$; $x = 3$; $y = 0$	$x = 2$
f)	$D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$	–	$x = 2$; $y = 2x + 4$	$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$



Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern, Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

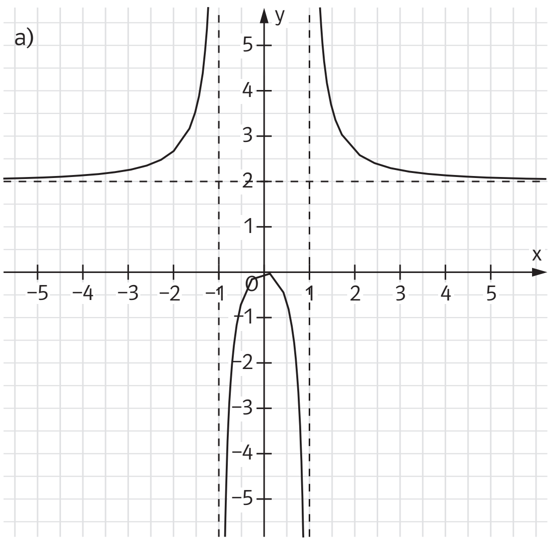




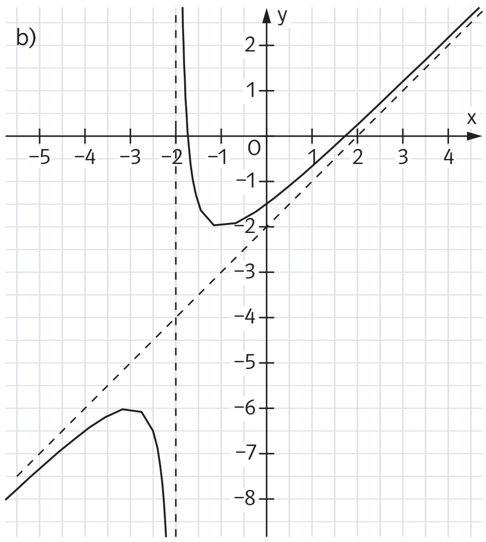
4 a) f: $x \mapsto \frac{1}{x}$ b) f: $x \mapsto \frac{x-1}{x-2}$ c) f: $x \mapsto \frac{x+1}{x-2}$

d) f: $x \mapsto 1-x+\frac{1}{x+1} = \frac{-x^2+2}{x+1}$ e) f: $x \mapsto \frac{1}{x^2-4}$

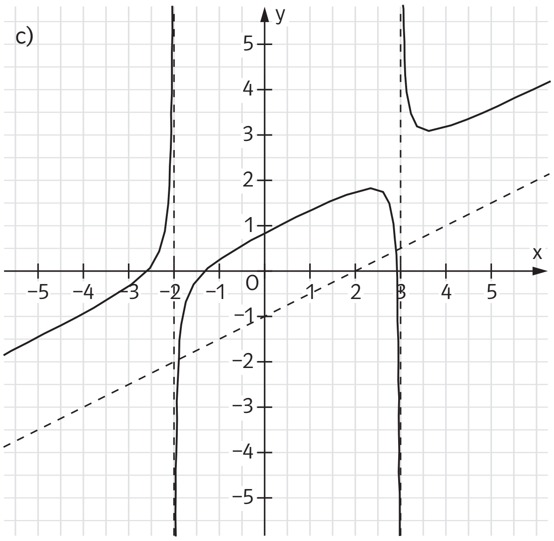
5 a)



b)



Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2



6 a) Achsensymmetrisch bzgl. der y-Achse ⇔ nur gerade Exponenten im Funktionsterm; punktsymmetrisch bzgl. des Koordinatenursprungs ⇔ nur ungerade Exponenten im Funktionsterm

b) Für gebrochen rationale Funktionen der Form $\frac{p(x)}{q(x)}$ gilt:
Haben die Funktionsterme von p und q nur gerade Exponenten, so ist der Graph achsensymmetrisch zur y-Achse. Gleiches gilt, wenn die beiden Funktionsterme nur ungerade Exponenten besitzen.
Hat der Funktionsterm von p nur gerade Exponenten und der von q nur ungerade oder umgekehrt, so ist der Graph punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.

7

	Asymptoten	Symmetrie	Nullstellen	Funktionsterm
f	$x = 0{,}5$; $y = 0{,}5 - 0{,}75x$	–	–	$0{,}5 - 0{,}75x - \frac{1}{2x-1} = f(x)$
g	$x \approx -0{,}7$; $x \approx 0{,}7$; $y = 0$	punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung	$x = 0$	$g(x) = \frac{0{,}25x}{(x-0{,}7)(x+0{,}7)}$
h	$x \approx -1{,}4$; $x \approx 1{,}4$; $y = -0{,}5$	–	$x_1 = 1$; $x_2 = 2$	$h(x) \approx \frac{-0{,}5(x-1)(x-2)}{(x^2-1{,}4^2)} \approx \frac{-0{,}5(x-1)(x-2)}{x^2-2}$

8 a) $V = 324\,dm^3 \cdot \pi \approx 1017{,}88\,dm^3$ $O = 168\,dm^2 \cdot \pi \approx 527{,}79\,dm^2$

b) $V = 179{,}2\,dm^3 \cdot \pi \approx 187{,}61\,dm^3$ $O \approx 164{,}30\,dm^2$

9 a) Mit $t_{Kai} = t_{Stefan} + 4\,min$, $s = v \cdot t$ und $s_{Stefan} = s_{Kai}$ folgt:

$400\frac{m}{min} \cdot t_{Stefan} = 300\frac{m}{min} \cdot (t_{Stefan} + 4\,min) \Rightarrow t_{Stefan} = 12\,min$

$s = v_{Stefan} \cdot t_{Stefan} = 4{,}8\,km$

Der Schulweg der beiden ist 4,8 km lang.

b) $\frac{v_{Stefan}}{v_{Kai}} = \frac{400\frac{m}{min}}{300\frac{m}{min}} = \frac{4}{3} \approx 1{,}333$

Stefan fährt etwa 13,3 % schneller als Kai.

c) $\frac{t_{Kai} - t_{Stefan}}{t_{Kai}} = \frac{4\,min}{16\,min} = 0{,}25$

Stefan spart gegenüber Kai 25 % an Zeit ein.

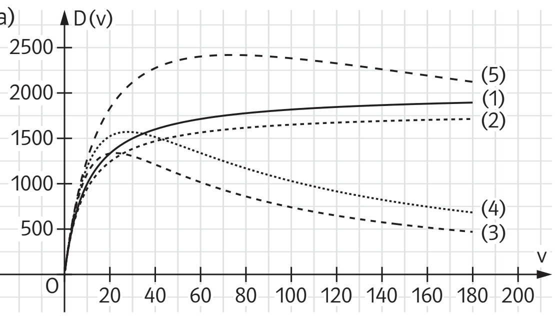
Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern, Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

Thema: Das Schluckvermögen einer Straße

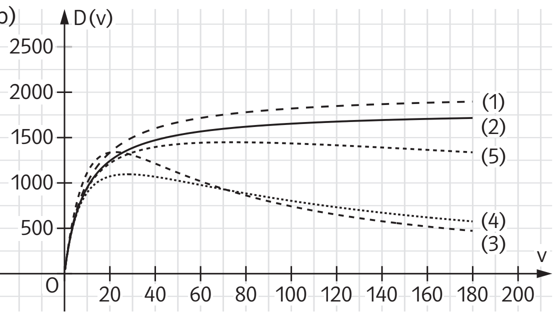
S. 23

1 Mit den Abstandsregeln (3) und (4) hat die Verkehrsdichte bereits zwischen 22 – 25 $\frac{km}{h}$ ihren Höchstwert erreicht.
Danach fällt sie für höhere Geschwindigkeiten wieder ab. Die Verkehrsdichte für (4) liegt dabei immer etwas höher als für (3).
Mit den Abstandsregeln (1) und (2) ist im Diagramm kein Maximum für die Verkehrsdichte erkennbar. Allerdings steigt sie ab etwa 20 $\frac{km}{h}$ weniger stark an. Die Verkehrsdichte für (1) liegt durchweg etwas höher als für (2).
Mit Abstandsregel (5) erhält man die größte Verkehrsdichte, die nach Erreichen ihres Höchstwertes bei 70 $\frac{km}{h}$ wieder etwas abfällt, allerdings nicht so stark wie mit Abstandsregel (3) und (4).

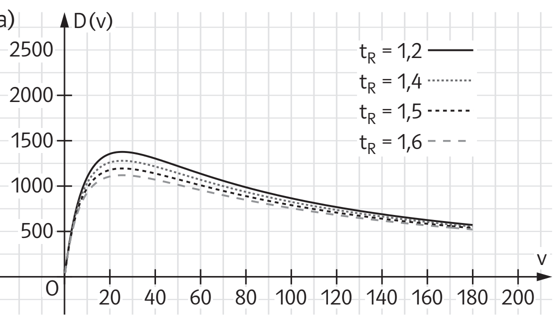
2 a)



b)

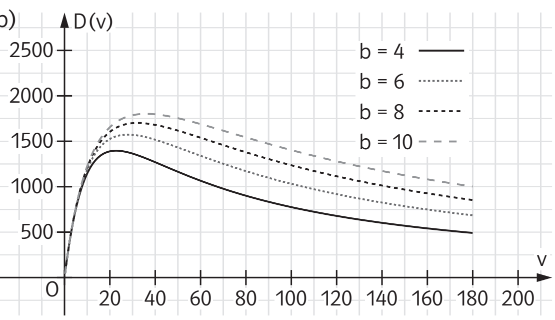


3 a)



Je länger die Reaktionszeit t_R bei gleicher Bremsverzögerung b ist, desto geringer ist die Verkehrsdichte D.
v_0 ändert sich nicht bei ändernden Reaktionszeiten, d.h., v_0 ist unabhängig von t_R.

b)



Je geringer die Bremsverzögerung b bei gleichbleibender Reaktionszeit t_R ist, desto geringer sind v_0 und Verkehrsdichte D.

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2

c) Je größer die Länge L und/oder die Bremsverzögerung b ist, desto größer ist v_0.

b = 4: $v_0 = 3{,}6 \cdot \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 4} \approx 22{,}77 \left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$

$$D = \frac{1000 \cdot v_0}{5 + \frac{v_0}{3{,}6} \cdot 1 + \frac{1}{8} \cdot \frac{v_0^2}{3{,}6^2}} \approx 1394{,}73 \left(\frac{1}{\text{h}}\right) \text{ oder } \frac{\text{Fahrzeuge}}{\text{Stunde}}$$

b = 8: $v_0 = 3{,}6 \cdot \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 8} \approx 32{,}20 \left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$

$$D = \frac{1000 \cdot v_0}{5 + \frac{v_0}{3{,}6} \cdot 1 + \frac{1}{16} \cdot \frac{v_0^2}{3{,}6^2}} \approx 1699{,}69 \left(\frac{1}{\text{h}}\right) \text{ oder } \frac{\text{Fahrzeuge}}{\text{Stunde}}$$

d) $v_0 = 3{,}6 \cdot \sqrt{2L} \cdot \sqrt{\frac{b_1 \cdot b_2}{b_2 - b_1}}$ hängt sowohl von der Länge L als auch von der eigenen Bremsverzögerung b_1 und der Bremsverzögerung b_2 des vorausfahrenden Fahrzeugs ab. Der Term $\sqrt{\frac{b_1 \cdot b_2}{b_2 - b_1}}$ nimmt dabei umso größere Werte an, je größer die einzelnen Werte der Bremsverzögerungen sind (Zähler) und je geringer ihre Differenz ist (Nenner).
[Große Unterschiede in der Bremsverzögerung zum vorausfahrenden Fahrzeug zwingen im Allgemeinen zu einem größeren Sicherheitsabstand.]

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 11
ISBN 978-3-12-732763-2