VIII Anwendungen der Differentialrechnung

1 Ganzrationale Funktionen in realen Situtationen

S. 196

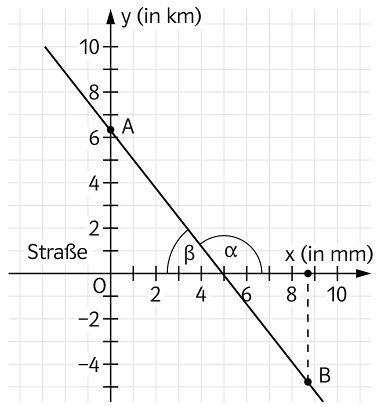
1 a) $f(x) = -\frac{37}{29}x + 6{,}3$

b) Bei einer Parallelverschiebung der Geraden um 4,8 in positive y-Richtung bleibt die Länge der Strecke [AB] erhalten:

$L = \sqrt{(4{,}8 + 6{,}3)^2 + 8{,}7^2} = \sqrt{198{,}9} \approx 14{,}1$

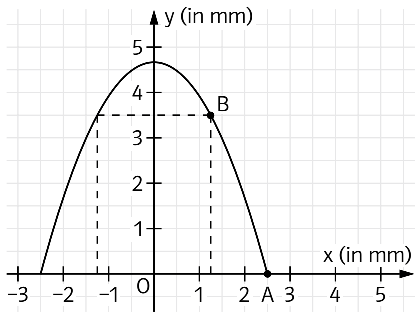
Die Gasleitung ist ca. 14,1 km lang.

c) $\tan\alpha = -\frac{37}{29} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 128{,}09°; \;\; \beta \approx 51{,}91°$



S. 198

2 a) Koordinatensystem:



Ansatz: $f(x) = ax^2 + b$

Bedingungen: $f\left(\frac{5}{2}\right) = 0$ Punkt A

$f\left(\frac{2{,}5}{2}\right) = 3{,}5$ Punkt B

Gleichungen: $\frac{25}{4}a + b = 0$ (I)

$\frac{25}{16}a + b = 3{,}5$ (II)

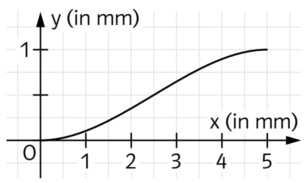
$\Rightarrow \quad a = -\frac{56}{75}; \;\; b = \frac{14}{3}$

$f(x) = -\frac{56}{75}x^2 + \frac{14}{3}$

b) $f(0) = \frac{14}{3} \approx 4{,}67$

Der Tunnel ist ca. 4,67 m hoch.

3 a) Koordinatensystem:



Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d; \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Bedingungen: $f(0) = 0$: $d = 0$

$f'(0) = 0$: $c = 0$

$f(5) = 1$: $125a + 25b = 1$

$f'(5) = 0$: $75a + 10b = 0$

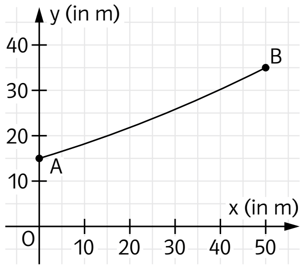
$\Rightarrow \quad a = -\frac{2}{125}; \quad b = \frac{3}{25}$

$f(x) = -\frac{2}{125}x^3 + \frac{3}{25}x^2 = -0{,}016x^3 + 0{,}12x^2$

b) $f(4) = \frac{112}{125} = 0{,}896 > 0{,}7$

Der felsige Untergrund muss nicht abgetragen werden.

4 a) Koordinatensystem:



Ansatz: $f(x) = ax^2 + bx + c$; $f'(x) = 2ax + b$

Bedingungen: $f(0) = 15$: $c = 15$

$f(50) = 35$: $2500a + 50b = 20$

$f'(50) = 0{,}5$: $100a + b = 0{,}5$

$\Rightarrow$ $a = 0{,}002$; $b = 0{,}3$

$f(x) = 0{,}002x^2 + 0{,}3x + 15$

b) Gleichung der Geraden durch A und B: $y = \frac{2}{5}x + 15$

$d(x) = \frac{2}{5}x + 15 - f(x) = -0{,}002x^2 + 0{,}1x$

$d'(x) = -0{,}004x + 0{,}1$

$d'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 25$

	$x < 25$	25	$x > 25$
d'	$d' > 0$		$d' < 0$
d	$\nearrow$	Max	$\searrow$

$\Rightarrow$ $D(25 \mid 23{,}75)$; $d(25) = 1{,}25$

Der Durchhang in D beträgt 1,25 m.

Steigung des Tragseils: $f'(25) = 0{,}4$

c) z.B. mit dem Satz des Pythagoras:

$L = \sqrt{20^2 + 50^2} \approx 53{,}85$

Das Seil ist etwa 53,85 m lang.

5 a) Die Wurfparabel lässt sich durch den Graphen einer ganzrationalen Funktion 2. Grades beschreiben. Bedingungen für die gesuchte Funktion f mit $f(x) = ax^2 + bx + c$:

$f(0) = 2$; $f(20{,}4) = 0$ und $f'(20{,}4) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lineares Gleichungssystem: (I) $416{,}16a + 20{,}4b = -2$

(II) $40{,}80a + b = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow$ $a \approx -0{,}0235$; $b \approx 0{,}3813$; $c = 2$

Damit: $f(x) = -0{,}0235x^2 + 0{,}3813x + 2$

b) Im den höchsten Punkt der Flugbahn zu bestimmen, berechnet man den Scheitelpunkt der Wurfparabel: $S(8{,}11 \mid 3{,}55)$.

Die maximale Höhe beträgt etwa 3,55 m.

Um den Abwurfwinkel zu bestimmen, berechnet man die Steigung im Abwurfpunkt:

$m = f'(0) = 0{,}3813 \Rightarrow \alpha \approx 20{,}87°$

Der Abwurfwinkel beträgt etwa 20,87°.

c) Mit einem Abwurfwinkel von 20,87° war der Versuch nicht optimal.

6 a) Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Bedingungen: $f(0) = 0$: $d = 0$

$f'(0) = 0$: $c = 0$

$f(5) = -0{,}5$: $125a + 25b = -0{,}5$

$f(10) = -1{,}6$: $1000a + 100b = -1{,}6$

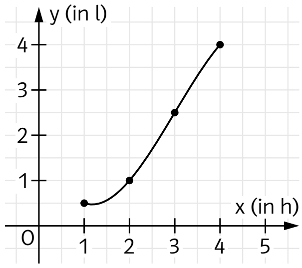
$\Rightarrow$ $a = \frac{1}{1250}$; $b = -\frac{3}{125}$

Damit: $f(x) = \frac{1}{1250}x^3 - \frac{3}{125}x^2 = 0{,}0008x^3 - 0{,}024x^2$

b) $f(7) = -0{,}9016$

Die Auslenkung beträgt 9,016 mm.

7 Koordinatensystem:



Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

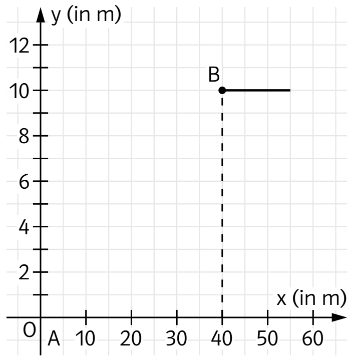
Bedingungen:
$f(1) = 0{,}5$: $\quad a + b + c + d = 0{,}5$
$f(2) = 1$: $\quad 8a + 4b + 2c + d = 1$
$f(3) = 2{,}5$: $\quad 27a + 9b + 3c + d = 2{,}5$
$f(4) = 4$: $\quad 64a + 16b + 4c + d = 4$
$\Rightarrow \quad a = -\frac{1}{6};\ b = \frac{3}{2};\ c = -\frac{17}{6};\ d = 2$

Damit: $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{17}{6}x + 2$

Der Wasserverbrauch nimmt anfangs stärker zu, ist nach 3 Stunden am größten und nimmt dann weniger stark zu.

S. 199

8 a) Koordinatensystem:

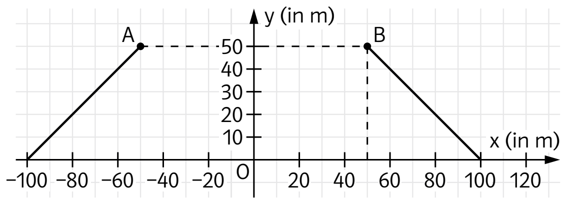


Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $\quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Bedingungen:
$f(0) = 0$: $\quad d = 0$
$f'(0) = 0$: $\quad c = 0$
$f(40) = 10$: $\quad 64\,000a + 1600b = 10$
$f'(40) = 0$: $\quad 4800a + 80b = 0$
$\Rightarrow \quad a = -\frac{1}{3200};\ b = \frac{3}{160}$

Damit: $f(x) = -\frac{1}{3200}x^3 + \frac{3}{160}x^2$

b) Koordinatensystem:

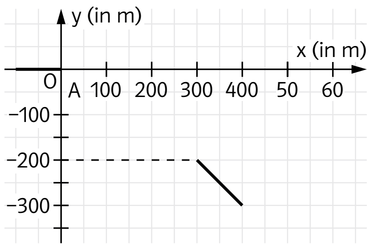


Ansatz (Symmetrie zur y-Achse):
$f(x) = ax^2 + b$; $\quad f'(x) = 2ax$

Bedingungen:
$f(50) = 50$: $\quad 2500a + b = 50$
$f'(50) = -1$: $\quad 100a = -1$
$\Rightarrow \quad a = -\frac{1}{100};\ b = 75$

Damit: $f(x) = -\frac{1}{100}x^2 + 75$

c) Koordinatensystem:



Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$;
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

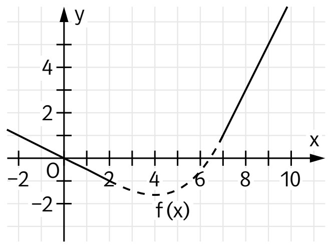
Bedingungen:
$f(0) = 0$: $\quad d = 0$
$f'(0) = 0$: $\quad c = 0$
$f(300) = -200$: $\quad 2{,}7 \cdot 10^7 \cdot a + 9{,}0 \cdot 10^4 \cdot b = -200$
$f'(300) = -1$: $\quad 2{,}7 \cdot 10^5 \cdot a + 600b = -1$
$\Rightarrow \quad a = \frac{1}{270\,000};\ b = -\frac{1}{300};\ c = d = 0$

Damit: $f(x) = \frac{1}{270\,000}x^3 - \frac{1}{300}x^2$ oder $f(x) = \frac{1}{270}x^3 - \frac{1}{30}x^2$

(im Maßstab 1:10)

d) Individuelle Lösung

9 a) Koordinatensystem:



Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Bedingungen:
$f(2) = -1$: $8a + 4b + 2c + d = -1$
$f'(2) = -0{,}5$: $12a + 4b + c = -0{,}5$
$f(7) = 1$: $343a + 49b + 7c + d = 1$
$f'(7) = 2$: $147a + 14b + c = 2$

$\Rightarrow$ $a = \frac{7}{250}$; $b = -\frac{16}{125}$; $c = -\frac{81}{250}$; $d = -\frac{8}{125}$

Damit $f(x) = \frac{7}{250}x^3 - \frac{16}{125}x^2 - \frac{81}{250}x - \frac{8}{125}$

b) Nein, da aus anschaulich geometrischer Sicht die beiden Teilstücke nicht symmetrisch zueinander liegen. Algebraisch ist es aufgrund der vier gegebenen Bedingungen bei nur drei wählbaren Parametern ebenso nicht möglich.

c) Man bestimmt die Punkte $P_2(2|-1)$, $P_3(3|-1{,}432)$, $P_4(4|-1{,}616)$, $P_5(5|-1{,}384)$, $P_6(6|-0{,}568)$, $P_7(7|1)$ und berechnet die Längen

$\overline{P_2P_3} = \sqrt{[-1{,}432-(-1)]^2 + (3-2)^2} \approx 1{,}089$

$\overline{P_3P_4} = \sqrt{[-1{,}616-(-1{,}432)]^2 + (4-3)^2} \approx 1{,}017$

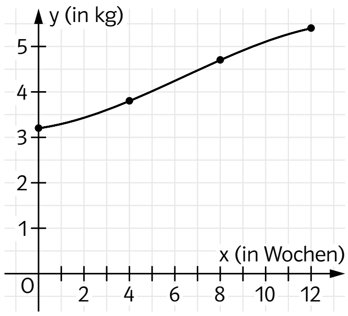
$\overline{P_4P_5} = \sqrt{[-1{,}384-(-1{,}616)]^2 + (5-4)^2} \approx 1{,}027$

$\overline{P_5P_6} = \sqrt{[-0{,}568-(-1{,}384)]^2 + (6-5)^2} \approx 1{,}291$

$\overline{P_6P_7} = \sqrt{[1-(-0{,}568)]^2 + (7-6)^2} \approx 1{,}860$

Näherungsweise Länge des Verbindungsstücks: L = 6,28 LE.

10 a) Koordinatensystem:



Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Bedingungen:
$f(0) = 3{,}2$: $d = 3{,}2$
$f(4) = 3{,}8$: $64a + 16b + 4c = 0{,}6$
$f(8) = 4{,}7$: $512a + 64b + 8c = 1{,}5$
$f(12) = 5{,}4$: $1728a + 144b + 12c = 2{,}2$

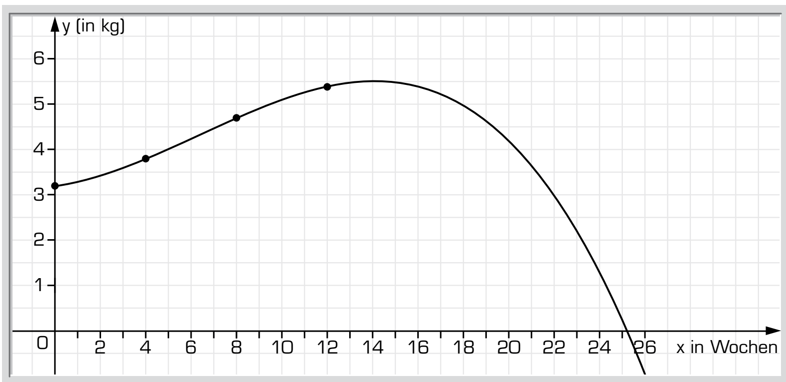
$\Rightarrow$ $a = -\frac{1}{768}$; $b = \frac{1}{40}$; $c = \frac{17}{240}$; $d = \frac{16}{5}$

Damit: $f(x) = -\frac{1}{768}x^3 + \frac{1}{40}x^2 + \frac{17}{240}x + \frac{16}{5}$
$\approx -0{,}0013x^3 + 0{,}025x^2 + 0{,}71x + 3{,}2$

b) $m = \frac{5{,}4-3{,}2}{12-0} \approx 0{,}183$ (in kg)

Damit nimmt ein Säugling im Durchschnitt pro Woche 183 g zu.

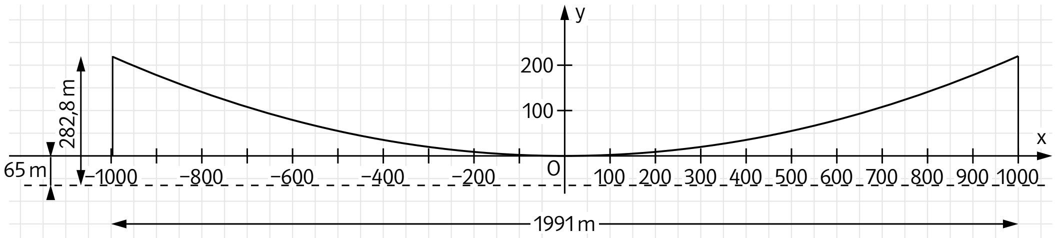
c)



Eine Modellierung t = 12 Wochen ist kritisch, da ab 14 Wochen eine Abnahme des Gewichts folgen würde.

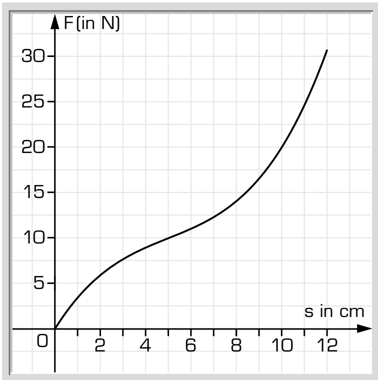
d) Man bestimmt das Maximum der 1. Ableitung und erhält, dass der Säugling bei etwa 6,4 Wochen am stärksten zunimmt. Die wöchentliche Zunahme beträgt dann etwa 231 g.

11 Koordinatensystem:



Ansatz: $f(x) = ax^2$
Bedingung: $f(995{,}5) = 282{,}8 - 65 = 217{,}8 \quad \Rightarrow \quad a \approx 2{,}2 \cdot 10^{-4}$
Damit: $f(x) = 2{,}2 \cdot 10^{-4} \cdot x^2$

12 a) $F(0) = 0$; $F(1) = 3{,}44$; $F(5) = 10$; $F(10) = 20$



b) Für geringe Ausdehnungen gilt näherungsweise ein lineares Kraftgesetz. Danach nimmt der Kraftaufwand etwas ab. Bei großen Auslenkungen wird es aber immer schwerer, das Gummiband zu dehnen. Bei einem Luftballon ist der Kraftaufwand zu Beginn ebenfalls groß, da der hohe Anfangswiderstand überwunden werden muss. Danach wird es leichter.

S. 200

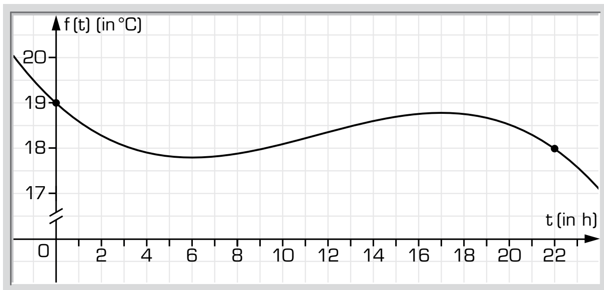
13 a) Ansatz: $f(x) = ax^2 + bx + c$; $f'(x) = 2ax + b$
Bedingungen: $f(0) = 9000$: $c = 9000$
$f'(0) = 1$: $b = 1$
$f(5000) = 9000$: $a = -0{,}0002$
Damit $f(x) = -0{,}0002x^2 + x + 9000$

b) $V = 800\,\frac{km}{h} = \frac{800}{3{,}6}\,\frac{m}{s} \approx 222{,}2\,\frac{m}{s}$. Also $t = \frac{s}{v} \approx \frac{5000}{222{,}2}\,s \approx 22{,}5\,s$
Die Schwerelosigkeit dauert bei den vorgegebenen Daten etwa 22,5 s.

14 a) Ansatz: $f(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$; $f'(t) = 3at^2 + 2bt + c$
Bedingungen: $f(0) = 19$: $d = 19$
$f(6) = 17{,}8$: $216a + 36b + 6c = -1{,}2$
$f'(6) = 0$: $108a + 12b + c = 0$
$f'(17) = 0$: $867a + 34b + c = 0$
$\Rightarrow \quad a = -\frac{1}{675}$; $b = \frac{23}{450}$; $c = -\frac{34}{75}$; $d = 19$

Damit $f(t) = -\frac{1}{675}t^3 + \frac{23}{450}t^2 - \frac{34}{75}t + 19$

b) Die momentane Änderungsrate um 22 Uhr beträgt etwa $-0{,}356\,\frac{°C}{h}$, d.h. dass die Temperatur um 22 Uhr um ca. 0,36 °C pro Stunde fällt. Dies ist sehr viel, so dass die Modellierung ab ca. 21 Uhr infrage zu stellen ist (siehe Abbildung).



15 Diese Aufgabe sollte mit einem Tabellenkalkulationsprogramm oder CAS bearbeitet werden.

a) $m = \frac{88-1{,}5}{6-0} \approx 14{,}4$. Damit nimmt ein Ferkel im Durchschnitt ca. 14,4 kg pro Monat zu.

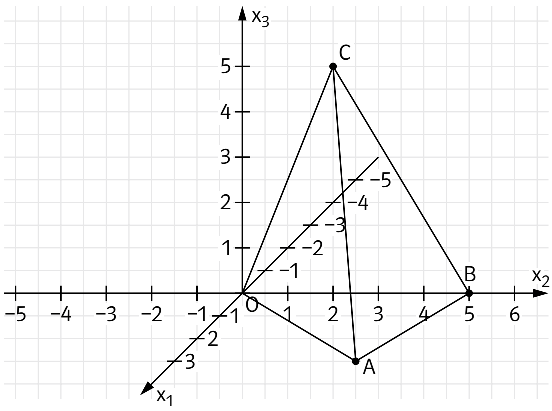
b) Z. B. liefert ein Tabellenkalkulationsprogramm
$f(x) = -0{,}0511x^4 - 0{,}2058x^3 + 4{,}5852x^2 + 5{,}5364x + 1{,}0108$.

c) Die momentane Änderungsrate ist nach etwa 3 Monaten maximal. Das Ferkel nimmt zu diesem Zeitpunkt 22 kg pro Monat zu.

d) Z. B. liefert ein Tabellenkalkulationsprogramm
$g(x) = -0{,}8194x^3 + 6{,}8571x^2 + 2{,}9504x + 1{,}2738$.

e) Die Wachstumsgeschwindigkeit ist bei dem Graphen von g schon 7 Tage früher maximal. Dies ist aber keine große Veränderung. Beide Funktionen sind sehr gut.

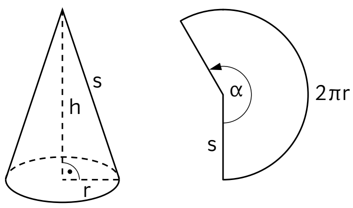
16 a)



$V = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3\right) \cdot 6 = 15$

b) Es ist der Schnittwinkel zwischen den Vektoren $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ und seiner Projektion in die x_1x_2-Ebene $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ zu bestimmen: $\varphi \approx 59{,}0°$.

17



$\frac{G}{M} = \frac{r^2\pi}{r \cdot \pi \sqrt{h^2 + r^2}} = \frac{9}{41} \quad \Rightarrow \quad r = 9;\ s = 41$

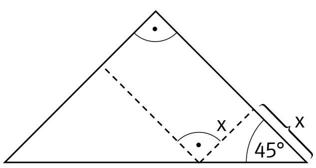
$\frac{\alpha}{360°} = \frac{2\pi r}{2\pi s} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 79{,}02°$

$V = \frac{1}{3} G \cdot h \approx 3392{,}92\,\text{cm}^3$

2 Extremwertprobleme

S. 201

1 Anschauliche Begründung:
Lässt man x von sehr kleinen Werten (sehr schmale Rechtecke) auswachsen, so nimmt der Flächeninhalt der Rechtecke bis zu $x = \frac{a}{2}$ (Quadrat) zu und dann aus Symmetriegründen wieder ab.
Rechnerische Begründung:
Skizze:



$y = x \cdot \tan 45° = x$

Also: $A(x) = x \cdot (a - x) = -x^2 + ax$

A wird maximal für $x = \frac{a}{2}$.

Das größtmögliche Rechteck ist ein Quadrat mit der Seitenlänge $\frac{a}{2}$.

Es hat den Flächeninhalt $\frac{a^2}{4}$.

S. 202

2 Summe wird minimal für $x = \frac{2}{3}$; lokales und globales Minimum: $\frac{10}{3}$.
Differenz wird maximal für $x = 2$; lokales und globales Maximum: 2.

3 Flächeninhalt:
$A(u) = 2u \cdot (-u^2+9) = -2u^3+18u$; $A'(u) = -6u^2+18$
$A'(u) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = \sqrt{3}$ (wegen $0 \leqq u \leqq 3$)

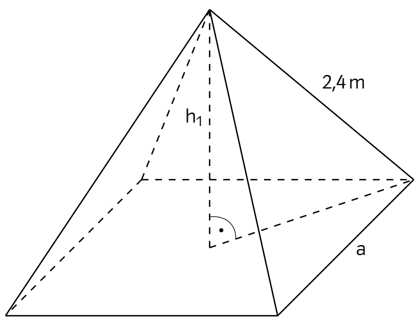
A′: A′ > 0 | $\sqrt{3}$ | A′ < 0
A: ↗ Max ↘

Bei $u = \sqrt{3}$ liegt ein lokales Maximum vor, das wegen $A(0) = A(3) = 0$ auch ein globales Maximum ist.
$A_{max} = 12\sqrt{3}$
$U(u) = 2(2u-u^2+9) = -2u^2+4u+18$; $U'(u) = -4u+4$
$U'(u) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = 1$

U′: U′ > 0 | 1 | U′ < 0
U: ↗ Max ↘

Bei $u = 1$ liegt ein lokales Maximum vor, das wegen $U(0) = 18$ und $U(3) = 12$ auch ein globales Maximum ist.
$U_{max} = 20$

4



$V(x) = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$
Höhe h: $\frac{e}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+a^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$
$h = \sqrt{(2{,}4)^2 - \left(\frac{e}{2}\right)^2} = \sqrt{5{,}76-0{,}5a^2}$
$\Rightarrow \quad V(a) = \frac{1}{3}a^2 \cdot \sqrt{5{,}76-0{,}5a^2}$
$V'(a) = \frac{2}{3}a \cdot \sqrt{5{,}76-0{,}5a^2} \cdot \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{-a}{2\sqrt{5{,}76-0{,}5a^2}}$
$= \frac{2}{3}a \cdot \sqrt{5{,}76-0{,}5a^2} \cdot \frac{1}{6}a^3 \cdot \frac{-1}{2\sqrt{5{,}76-0{,}5a^2}}$
$V'(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 1{,}6\sqrt{3} \approx 2{,}77$

V′: V′ | $1{,}6\sqrt{3}$
V: ↗ Max ↘

V wird maximal für $a = 1{,}6\sqrt{3}$ (in m).
$V_{max} = 2{,}048\sqrt{3}\,m^3 \approx 3{,}547\,m^3$
Das Zelt hat für eine Länge der Quadratseite von etwa 2,77 m den größten Rauminhalt.
Die Höhe des Zeltes beträgt dabei $0{,}8\sqrt{3}\,m \approx 1{,}39\,m$.
Ein Erwachsener kann nicht darin stehen.

5 $A(x) = 2x \cdot [f(x)-g(x)] = -1{,}5x^3+12x$ wird maximal für $x = \frac{2}{3}\sqrt{6}$.
$A_{max} = \frac{16}{3}\sqrt{6}$; $A(0) = A(2\sqrt{2}) = 0$ (globales Maximum)
$U(x) = 2 \cdot \{2x+[f(x)-g(x)]\} = 4x+2[f(x)-g(x)] = -1{,}5x^2+4x+12$ wird maximal für $x = \frac{4}{3}$.
$U_{max} = \frac{44}{3}$; $U(0) = 12$; $U(2\sqrt{2}) = 8\sqrt{2}$ (globales Maximum)

6 a) Wenn der Punkt R auf G_f von S nach Q wandert, nimmt der Flächeninhalt des Fünfecks zunächst bis zu einem größtmöglichen Wert zu und danach wieder ab. Wenn R auf S oder auf Q liegt, ergibt sich ein Trapez mit dem Flächeninhalt 16,875 FE.

b) $A(u) = \frac{f(0)+f(u)}{2} \cdot u + \frac{f(u)+f(5)}{2} \cdot (5-u)$

$= -0{,}125\,u^3 + 3{,}125\,u + 16{,}875$

$= -\frac{1}{8}u^3 + \frac{25}{8}u + \frac{135}{8}$

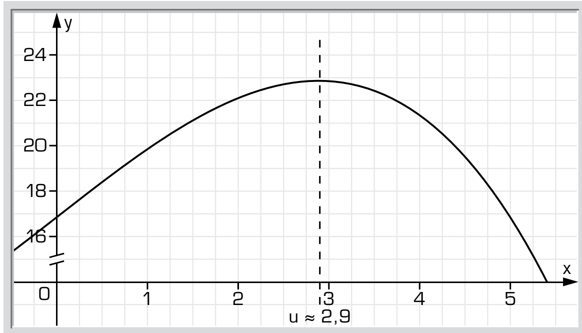
Rechnerische Lösung:

A(u) wird maximal für $u = \frac{5}{3}\sqrt{3}$.

$A_{max} = \frac{125}{36}\sqrt{3} + \frac{135}{8} \approx 22{,}89$;

$A(0) = \frac{135}{8}$; $A(5) = \frac{135}{8}$

(globales Maximum)

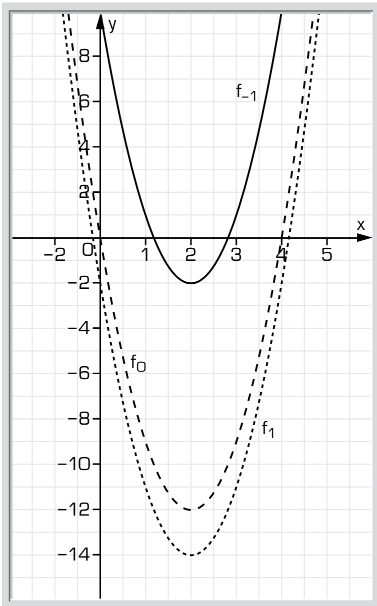


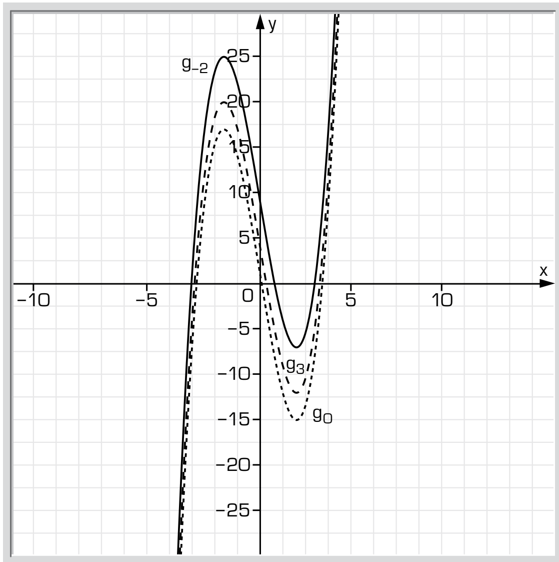
S. 203

7 a) $f(x) = x \cdot (12-x)$; f wird maximal für $x = y = 6$.
($f(x) = x^2 + (12-x)^2$; f wird minimal für $x = y = 6$.)

b) $f(x) = x + \frac{8}{x}$; f wird minimal für $x = y = 2\sqrt{2}$.

8 a)





b) $f_t'(x) = 6x - 12$; $f_t'(x) = 0 \Rightarrow x_0 = 2$

f_t': $f_t' < 0$ | 2 | $f_t' > 0$

f_t: ↘ Min ↗

f_t hat bei $x_0 = 2$ ein lokales Minimum.

$g_t'(x) = 3x^2 - 12$; $g_t'(x) = 0 \Rightarrow x_0 = 2$

g_t': $g_t' < 0$ | 2 | $g_t' > 0$

g_t: ↘ Min ↗

g_t hat bei $x_0 = 2$ ein lokales Minimum.

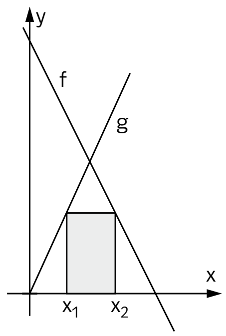
c) f_t: $T(2\,|\,4t^2 - 6t - 12)$; $t = \frac{3}{4}$

g_t: $T(2\,|\,-16 + (t-1)^2)$; $t = 1$

9 Z.B. „Welches Rechteck mit dem Umfang 30 cm hat die kürzeste Diagonale?“
$d(x) = \sqrt{x^2 + (15-x)^2}$
$[d(x)]^2$ wird maximal für $x = 7{,}5$ (in cm).

10 Eine handelsübliche Streichholzschachtel hat ein Volumen von etwa $19{,}5\,\text{cm}^3$.
Optimale Maße hinsichtlich des Materialverbrauchs (bei $V \approx 19{,}5\,\text{cm}^3$ und $L = 5{,}2\,\text{cm}$):
$A = 10{,}4\,b + 10{,}4\,h + 2hb$
$19{,}5 = 5{,}2 \cdot b \cdot h \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{3{,}75}{b}$
Damit folgt:
$A(b) = 10{,}4\,b + \frac{39}{b} + 7{,}5$ wird minimal für $b \approx 1{,}94$ (in cm) und $h \approx 1{,}94$ (in cm).
Optimale Maße: $L = 5{,}2\,\text{cm}$, $b = 1{,}94\,\text{cm}$, $h = 1{,}94\,\text{cm}$.

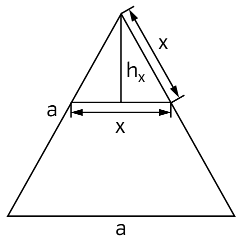
11 Skizze:



Sei $f(x) = 30 - 3x$ und $g(x) = 2x$
Nebenbedingung: $g(x_1) = f(x_2)$
$\Rightarrow \quad 2x_1 = 30 - 3x_2$
$\Rightarrow \quad x_1 = 15 - 1{,}5\,x_2$
$A(x_2) = (x_2 - x_1)\cdot f(x_2) = (2{,}5\,x_2 - 15)\cdot(30 - 3x_2) = -7{,}5\,x_2^2 + 120\,x_2 - 450$
Der Flächeninhalt des Rechtecks ist maximal für $x_2 = 8$ und $x_1 = 3$.
Die Koordinaten der Eckpunkte sind $A(3|0)$, $B(8|0)$, $C(8|6)$, $D(3|6)$.

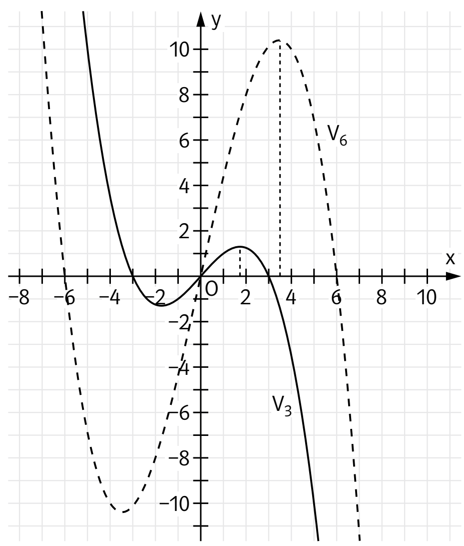
12 a) Fall (I): $A(x) = x\cdot(50 - x)$ maximal für $x = 25\,\text{m}$, $A_{max} = 625\,\text{m}^2$
Fall (II): $A(x) = x\cdot(100 - 2x)$ maximal für $x = 25\,\text{m}$, $A_{max} = 1250\,\text{m}^2$
Fall (III): $A(x) = x\cdot(100 - x)$ maximal für $x = 50\,\text{m}$, $A_{max} = 2500\,\text{m}^2$
b) Ohne Differentialrechnung über die Scheitelbestimmung.
Fall (I): $S(25|625)$
Fall (II): $S(25|1250)$
Fall (III): $S(50|2500)$

13 a) Skizze:



$h_x = \frac{x}{2}\sqrt{3}$; $G_{Trapez} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} - \frac{x^2}{4}\sqrt{3}$
$\Rightarrow \quad V_a(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{a^2}{4}\sqrt{3} - \frac{x^2}{4}\sqrt{3}\right)\cdot\frac{x}{2}\sqrt{3}$
$= \frac{1}{8}x(a^2 - x^2)$

b)



$a = 3$: $x_{max} \approx 1{,}7$
$a = 6$: $x_{max} \approx 3{,}5$

c) V(x) wird maximal für $x = \frac{a}{3}\sqrt{3}$.

$V_{max} = \frac{1}{8} \cdot \frac{a}{3}\sqrt{3}\left(a^2 - \frac{a^2}{3}\right) = \frac{a^3}{36}\sqrt{3}$

a = 3: $x_{max} \approx \sqrt{3} \approx 1{,}73$

a = 6: $x_{max} \approx 2\sqrt{3} \approx 3{,}46$

d) Eine Faltung längs einer Symmetrieachse des Dreiecks ABC ergibt $V = \frac{a^3}{48}\sqrt{3}$ (siehe Fig. 1)
Eine Faltung längs einer Achse, die eine Seite im Verhältnis 2 : 1 teilt, ergibt $V = \frac{a^3}{54}\sqrt{3}$ (siehe Fig. 2)
Beide Volumina sind kleiner als das in c).

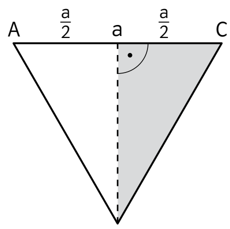


Fig. 1

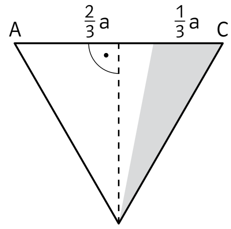


Fig. 2

14 a) $f'(x) = \frac{4x-3}{2\sqrt{2x^2-3x+8}}$

b) $g'(x) = \frac{\cos 5x \cdot 5(5x+1) - \sin 5x \cdot 5}{(5x+1)^2} = \frac{25x \cdot \cos 5x + 5 \cdot \cos 5x - 5 \cdot \sin x}{(5x+1)^2}$

c) $h'(x) = -\sin\frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2} \cdot \sin\frac{1}{x}$

d) $p'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \sin(-x) + \sqrt{x} \cdot \cos(-x) \cdot (-1)}{\sin^2(-x)} = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \sin x - \sqrt{x} \cdot \cos x}{\sin^2 x}$

15 $f(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 3x + 11{,}25) = \frac{1}{3}(x^2 - 3x + 1{,}5^2 - 1{,}5^2 + 11{,}25) = \frac{1}{3}(x - 1{,}5)^2 + 3$
Scheitel der nach oben geöffneten Parabel: S(1,5 | 3)
f hat einen Tiefpunkt bei T(1,5 | 3).

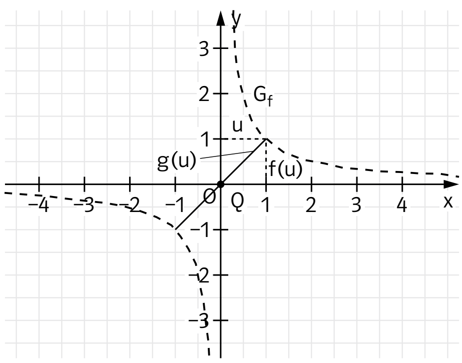
3 Komplexe Extremwertprobleme

S. 204

1 a) $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{25 - a^2}$ b) $A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \sqrt{q \cdot (5-q)}$ c) $A = \frac{1}{2} \cdot 5^2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha = 12{,}5 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$
Ohne weitere Umformungen kann der Schüler keine der Funktionen ableiten. Quadrieren würde helfen.

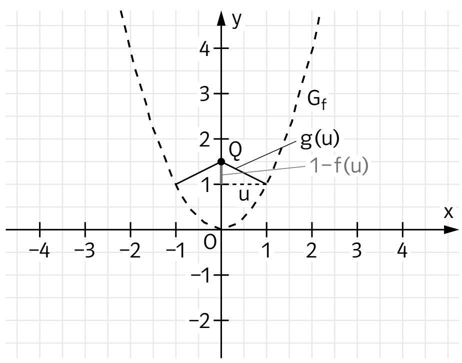
S. 205

2 a) Skizze:



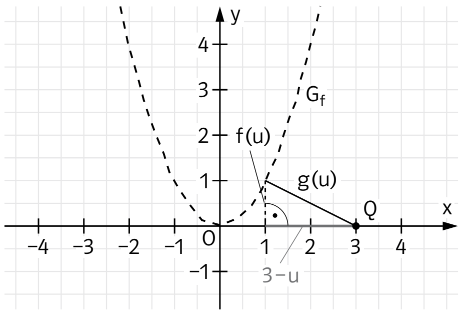
$g(u) = \sqrt{u^2 + \frac{1}{u^2}}$
Die Ersatzfunktion f:
$f(u) = u^2 + \frac{1}{u^2}$ wird minimal für $u = \pm 1$.
Nächstgelegene Punkte: (1 | 1), (−1 | −1)
Kleinster Abstand: $\sqrt{2}$

b) Skizze:



$g(u) = \sqrt{u^2 + (1{,}5 - u^2)^2}$
Die Ersatzfunktion f:
$f(u) = u^2 + (1{,}5 - u^2)^2$ wird minimal für $u = \pm 1$.
Nächstgelegene Punkte: (−1 | 1), (1 | 1)
Kleinster Abstand: $\sqrt{1{,}25}$

c) Skizze:



$g(u) = \sqrt{(3-u)^2 + (u^2)^2}$

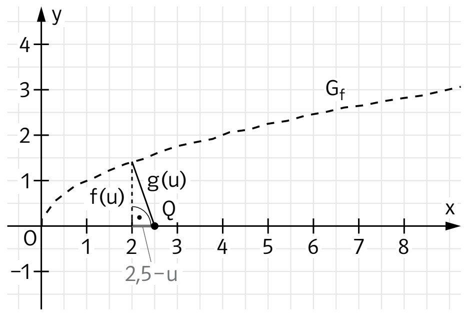
Die Ersatzfunktion f:

$f(u) = (3-u)^2 + u^4$ wird minimal für $u = \pm 1$.

Nächstgelegener Punkt: $(1|1)$

Kleinster Abstand: $\sqrt{5}$

d) Skizze:



$g(u) = \sqrt{\left(\sqrt{u}\right)^2 + (2{,}5-u)^2}$

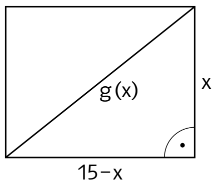
Die Ersatzfunktion f:

$f(u) = u + (2{,}5-u)^2$ wird minimal für $u = 2$.

Nächstgelegener Punkt: $\left(2\,|\,\sqrt{2}\right)$

Kleinster Abstand: 1,5

3 Skizze:



$g(x) = \sqrt{x^2 + (15-x)^2}$

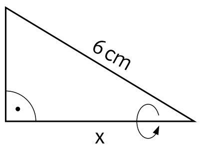
Die Ersatzfunktion f: $f(x) = x^2 + (15-x)^2$ wird minimal für $x = 7{,}5$.

Kürzeste Diagonale: $7{,}5\sqrt{2}$

Allgemein muss das Rechteck ein Quadrat sein; $x = \frac{a}{4}$;

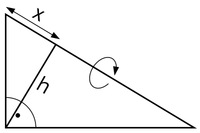
kürzeste Diagonale: $\frac{a}{4}\sqrt{2}$

4



$V(x) = \frac{1}{3}\pi\left(\sqrt{36-x^2}\right)^2 \cdot x = \frac{1}{3}\pi(36-x^2)\cdot x$ wird maximal für $x = 2\sqrt{3}$ (in cm).

$V_{max} = 16\sqrt{3}\,\pi$ (in cm³)



$V(x) = \frac{1}{3}\pi h^2 \cdot x + \frac{1}{3}\pi h^2 \cdot (6-x) = 2\pi h^2 = 2\pi x(6-x)$ wird maximal für $h = 3$,

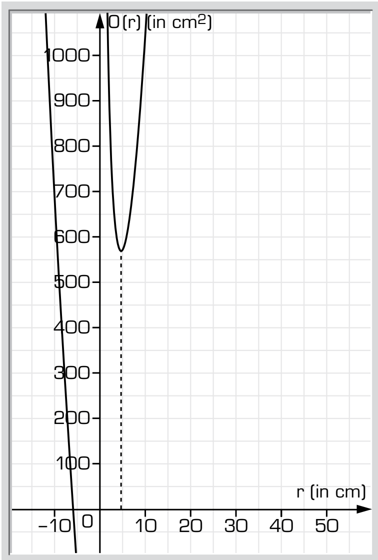
also $x = \frac{6}{2} = 3$.

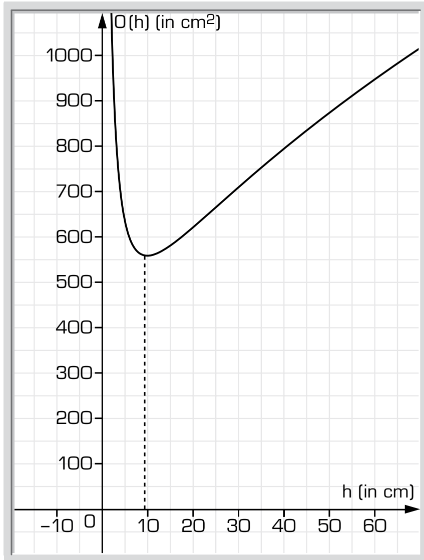
$V_{max} = 18\pi$ (in cm²)

S. 206

5 a) Ist r (in cm) der Radius und h (in cm) die Höhe, so gilt für die Oberfläche O (in cm^3):
$O = 2\pi r \cdot h + 2 \cdot \pi r^2$.
Aus der Nebenbedingung $V = \pi r^2 h = 1000$ erhält man $h = \frac{1000}{\pi r^2}$.
$O(r) = \frac{2000}{r} + 2\pi r^2 \quad \text{mit } r > 0$
Aus der Nebenbedingung $V = \pi r^2 h = 1000$ erhält man $r = \sqrt{\frac{1000}{\pi h}}$.
$O(h) = 20\sqrt{10\pi h} + \frac{2000}{h} \quad \text{mit } h > 0$

b)

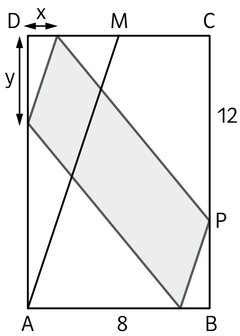




O hat ein globales Minimum bei etwa $r = 5$ (in cm).
O hat ein globales Minimum bei etwa $h = 11$ (in cm).

c) O hat ein globales Minimum bei $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5{,}42$ (in cm).
Eine Dose mit diesem Radius und der Höhe $h = 2r \approx 10{,}84$ (in cm) hat die minimale Oberfläche $O = 553{,}58$ (in cm^2).

6 Skizze:



$A = 8 \cdot 12 - 2 \cdot \frac{1}{2} xy - 2 \cdot \frac{1}{2}(8 - x)(12 - y) = -2xy + 8y + 12x$

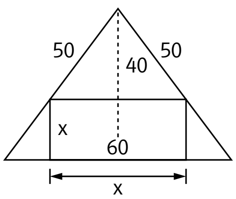
$\frac{x}{y} = \frac{4}{12} \quad \Leftrightarrow \quad y = 3x$

$A(x) = -6x^2 + 36x$ wird maximal für $x = 3$ (in cm)

$\Rightarrow \quad \overline{BP} = 9$ (in cm)

$A_{max} = 54$ (in cm^2)

7 Skizze:



$A = x \cdot h$

$\frac{\frac{x}{2}}{30} = \frac{40 - h}{40} \quad \Leftrightarrow \quad h = 40 - \frac{2}{3}x$

$A(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 40x$ wird maximal für $x = 30$ (in cm)

$A_{max} = 600$ (in cm^2)

$A_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 40 = 1200$ (in cm^2)

Abfall: $\frac{A_{\Delta} - A_{max}}{A_{\Delta}} = 50\,\%$

8 a) $N = 2r\pi + h$;   r (in cm) ist der Radius und h (in cm) die Höhe

$V = r^2 \cdot \pi \cdot h = 2000 \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{2000}{\pi r^2}$

$N(r) = 2r\pi + \frac{2000}{\pi r^2}$ wird minimal für $r = 10 \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{\pi^2}} \approx 5{,}87$ (in cm) und $h = 20 \cdot \sqrt[3]{\frac{\pi}{4}} \approx 18{,}45$ (in cm).

$N_{min} = 20\left(\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}} + \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}\right) \approx 55{,}36$ (in cm)

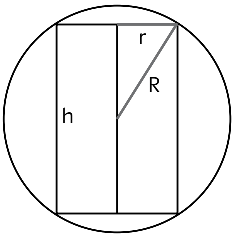
b) $O = r^2 \cdot \pi + 2\pi r \cdot h$

$V = r^2 \cdot \pi \cdot h = 2000 \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{2000}{\pi r^2}$

$O(r) = r^2\pi + \frac{4000}{r}$ wird minimal für $r = 10 \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}} \approx 8{,}60$ (in cm) und $h = 10 \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}} \approx 8{,}60$ (in cm).

$O_{min} = 100 \cdot \sqrt[3]{4\pi} + 400 \cdot \sqrt[3]{\frac{\pi}{2}} \approx 697{,}47$ (in cm²)

9 Skizze:



$V = r^2\pi \cdot h$

$\frac{h}{2} = \sqrt{R^2 - r^2} \quad \Leftrightarrow \quad h = 2\sqrt{R^2 - r^2}$

$\Rightarrow \quad V(r) = 2\pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2}$

$[V(r)]^2 = 4\pi^2 (R^2 r^4 - r^6)$ wird maximal für $r = \frac{1}{3}\sqrt{6}\,R$.

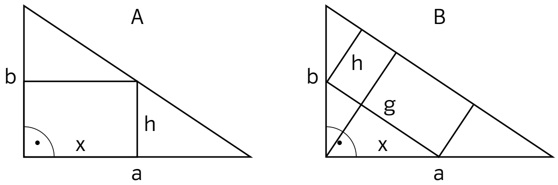
$h = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,R$

$V_{max} = \frac{4}{9}\sqrt{3}\,\pi R^3$

$V_{Kugel} = \frac{4}{3} R^3 \pi$

$\frac{V_{max}}{V_{Kugel}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 57{,}44\,\%$

10 a) Skizzen:



Fall A:

$A = x \cdot h$

$\frac{b-h}{b} = \frac{x}{a} \quad \Leftrightarrow \quad h = b - \frac{b}{a}x$

$A(x) = bx - \frac{b}{a}x^2$ wird maximal für $x = \frac{a}{2}$.

$h = \frac{b}{2}$; $A_{max} = \frac{1}{4}ab$

Für $a = 80\,\text{cm}$, $b = 60\,\text{cm}$ ist $x_{max} = 40\,\text{m}$, $h_{max} = 30\,\text{m}$, $A_{max} = 1200\,\text{m}^2$.

Fall B:

$A = g \cdot h$

$\frac{g}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{x}{a} \quad \Leftrightarrow \quad g = \frac{x}{a}\sqrt{a^2+b^2}$

$\frac{a-x}{a} = \frac{h}{H} \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{H}{a}(a-x)$

$H = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$A(x) = \frac{x}{a}\sqrt{a^2+b^2} \cdot \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{a-x}{a} = bx - \frac{b}{a}x^2$

Siehe Fall A, gleiche Werte für x_{max}, A_{max}.

b) Das Problem von a) muss nur für das kleine Dreieck $P_1P_2P_3$ gelöst werden.

$\frac{d}{3} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b} \quad \Leftrightarrow \quad d = \frac{3}{b}\sqrt{a^2+b^2} = 5$ (in m)

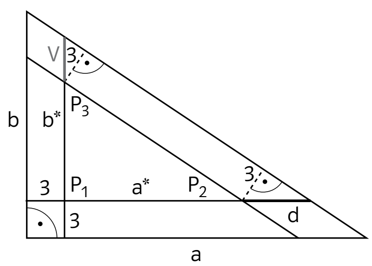
$\frac{V}{3} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} \quad \Leftrightarrow \quad V = \frac{3}{a}\sqrt{a^2+b^2} = \frac{15}{4}$ (in m)

Das kleinere Dreieck hat die Katheten

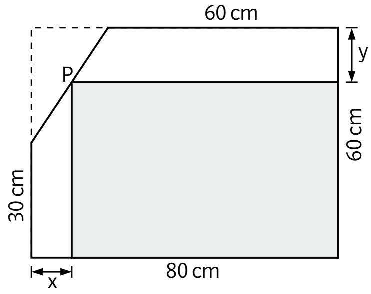
$\tilde{a} = 80 - 3 - 5 = 72$ (in m), $\tilde{b} = 60 - 3 - \frac{15}{4} = 53{,}25$ (in m).

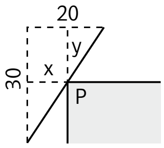
$x_{max} = 36\,\text{m}$ von P_1 aus gemessen, für (A) und (B).

$A_{max} = \frac{1}{4} \cdot 72 \cdot 53{,}25\,\text{m}^2 = 958{,}5\,\text{m}^2$.



11 a) Skizzen:





Mit dem Strahlensatz folgt: $y = 30 - \frac{3}{2}x$

$A = (80 - x) \cdot (60 - y)$

$A(x) = (80 - x) \cdot \left(30 + \frac{3}{2}x\right) = -\frac{3}{2}x^2 + 90x + 2400$ wird maximal für $x = 30$.

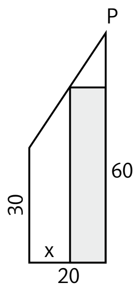
Da aber $0 \leqq x \leqq 20$, folgt aus $A(0) = 2400$ und $A(20) = 3600$, dass A für $x = 20$ maximal wird.

$A_{max} = 3600\,\text{cm}^2$

Ohne Differentialrechnung muss der Scheitelpunkt der zu A gehörenden Parabel bestimmt werden: $S(30\,|\,3750)$.

Aus $0 \leqq x \leqq 20$, $A(0) = 2400$ und $A(20) = 3600$, folgt $x_{max} = 20$ und $A_{max} = 3600\,\text{cm}^2$.

b) Skizze:



x in cm	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
A in cm²	600	594	576	546	504	490	384	306	216	114

Vermutung:

$A_{max} = 600\,\text{cm}^2$

$A(x) = (20 - x)\left(30 + \frac{3}{2}x\right) = -\frac{3}{2}x^2 + 600$ wird maximal für $x = 0$.

$A_{max} = 600\,\text{cm}^2$

12 x: Stückpreissenkung in €

$E(x) = (5000 + 300x) \cdot (25 - x)$ wird maximal für $x = 4\frac{1}{6}$

Maximale Einnahmen bei einer Stückpreissenkung von $4\frac{1}{6}$€ ≈ 4,17€:

$E_{max} = 130\,208\frac{1}{3}$€ ≈ 130 208,33€.

Neuer Stückpreis: $20\frac{5}{6}$€ ≈ 20,83€

S. 207

13 a) $A = \frac{1}{2}(a + b) \cdot h = \frac{1}{2}(b + b + 2x) \cdot h = (b + x) \cdot h$

$h = b \cdot \sin\alpha$; $x = b \cdot \cos\alpha$

$A(\alpha) = (b + b \cdot \cos\alpha) \cdot b \cdot \sin\alpha$

$= b^2 \cdot (1 + \cos\alpha) \cdot \sin\alpha \qquad 0 \leqq \alpha \leqq 90°$

b) $V(\alpha) = b^2 \cdot L(1 + \cos\alpha) \cdot \sin\alpha$

Tabellenkalkulation (L = 1 cm; b = 15):

α in °	…	58	59	60	61	62	…
V(α) in cm²	…	291,93	292,19	292,28	292,19	291,93	…

Das größte Volumen liegt bei $\alpha = 60°$ vor.

Exakter Wert:

$V'(\alpha) = b^2 L(-\sin^2\alpha + \cos\alpha + \cos^2\alpha)$

$= b^2 L(-1 + \cos\alpha + 2 \cdot \cos^2\alpha)$

mit $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

Aus $V'(\alpha) = 0$ erhält man mit der Substitution $u = \cos\alpha$:

$-1 + u + 2u^2 = 0$ mit den Lösungen $u_1 = \frac{1}{2}$ (und $u_2 = -1$), damit maximalen Inhalt für $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, also $\alpha = 60°$.

$V_{max} = 168{,}75\sqrt{3} \cdot L$ (in cm³)

c) $h = \sqrt{b^2-x^2}$; $x = \sqrt{b^2-h^2}$

$A(h) = b \cdot h + \sqrt{b^2-x^2} \cdot h = h\left(b + \sqrt{b^2-h^2}\right)$

$A(x) = b \cdot \sqrt{b^2-x^2} + x \cdot \sqrt{b^2-x^2} = (b+x)\sqrt{b^2-x^2}$

Da $V(h) = L \cdot A(h)$ bzw. $V(x) = L \cdot A(x)$, nehmen V und A an derselben stelle ihr Maximum an.

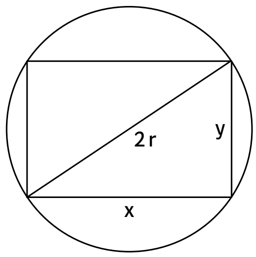
Z.B. $A'(x) = \sqrt{b^2-x^2} - \frac{x(b+x)}{\sqrt{b^2-x^2}}$

$A'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2x^2 - bx + b^2 = 0$ mit den Lösungen $x_1 = \frac{1}{2}b$ (und $x_2 = -b$)

A wird maximal für $x = 7{,}5$ (in cm).

$V_{max} = 168{,}75\sqrt{3} \cdot L$ (in cm^3) $\quad (\alpha = 60°)$

14 a) Skizze:



$U = 2x + 2y$

$x^2 + y^2 = 400 \quad \Leftrightarrow \quad y = \sqrt{400-x^2}$

$U(x) = 2x + 2\sqrt{400-x^2}$; $\quad 0 < x < 20$,

wird maximal für $x = 10\sqrt{2} \approx 14{,}14$

$\Rightarrow \quad y = 10\sqrt{2} \approx 14{,}14$.

Das Rechteck wird für ein Quadrat mit einer Seitenlänge von etwa 14,1 cm am größten.

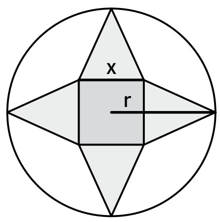
b) $A_{Kreis} = r^2 \cdot \pi = 100 \cdot \pi$

$A_{Rechteck} = x^2 = 200$

$\frac{A_{Rechteck}}{A_{Kreis}} = \frac{2}{\pi} \approx 63{,}66\,\%$

Es landen also etwa 36,34 % der Scheibe im Recycling.

15 Skizze:



$V = \frac{1}{3}x^2 \cdot h$

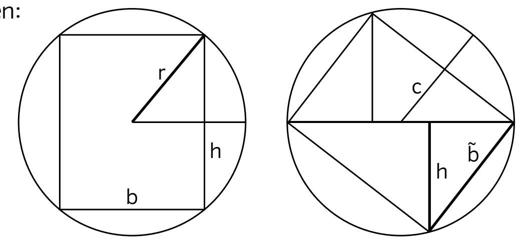
$h^2 = \left(10 - \frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 100 - 10x$

$V(x) = \frac{1}{3}x^2\sqrt{100-10x}$

$[V(x)]^2$ wird maximal für $x = 8$ (in cm).

$V_{max} = \frac{128}{3}\sqrt{5}\,cm \approx 95{,}41\,cm$ und $O = 160\,cm^2$.

16 Skizzen:



a) $T = K \cdot b \cdot h^2$

$\left(\frac{h}{2}\right)^2 = r^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad h^2 = 4r^2 - b^2$

$T(b) = K \cdot b \cdot (4r^2 - b^2)$ wird maximal für $b = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,r$.

$h_{max} = \frac{2}{3}\sqrt{6}\,r$.

b) $\tilde{b}^2 = \frac{2}{3}r \cdot 2r = \frac{4}{3}r^2$

$\tilde{b} = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,r = b$ aus Teilaufgabe a).

Die Zimmermannsregel gibt die exakte Lösung an.

17 $A = (4x + 0{,}5) \cdot (h + x + 2)$; $V = x^2 \cdot (h - 2) \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{V}{x^2} + 2$

Mit $V = 1000$ (in cm^3) folgt

$A(x) = \frac{4000}{x} + 16{,}5x + 4x^2 + \frac{500}{x^2} + 2$;

$A'(x) = -\frac{4000}{x^2} + 16{,}5 + 8x - \frac{1000}{x^3}$.

Die Nullstelle der ersten Ableitung lässt sich entweder anhand des geplotteten Graphen ablesen ($x \approx 7{,}39$) oder mit CAS ($x \approx 7{,}3935$) bestimmen.

A wird maximal bei $x \approx 7{,}39$ (in cm) und $h \approx 20{,}29$ (in cm). Die reale Milchtüte ist recht gut optimiert.

18 $K^n = 1{,}04^n \cdot K_0$

$\frac{K^n}{K_0} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 1{,}04^n = 3 \quad \Leftrightarrow \quad n = \frac{\ln 3}{\ln 1{,}04} \approx 28{,}01$

Es dauert 28 Jahre, bis sich das Kapital verdreifacht hat.

4 Funktionen mit Parametern

S. 208

1 a)

Jahre	Kapital in €	Zinsen (3%) in €	Endbetrag in €
1	1000,00	30,00	1030,00
2	1030,00	30,90	1060,90
3	1060,90	31,83	1092,73
4	1092,73	32,78	1125,51
5	1125,51	33,77	1159,27
6	1159,27	34,78	1194,05

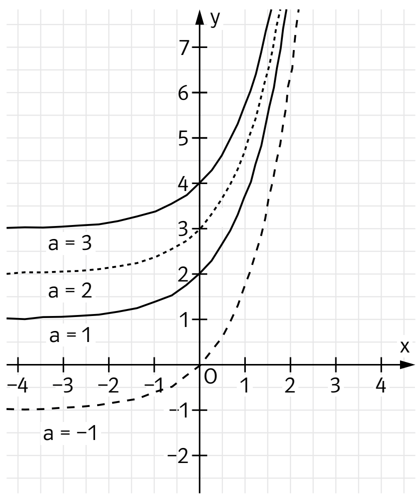
b) So ist z.B. $K_3(6) = 1000\left(1 + \frac{3}{600}\right)^6 = 1000 \cdot 1{,}03^6 \approx 1194{,}05$.

2 a) gelb: $t = 1$; orange: $t = 2$; rot: $t = 3$; violett: $t = 4$; blau: $t = 5$

b) $x_S = \frac{t}{2}$

S. 209

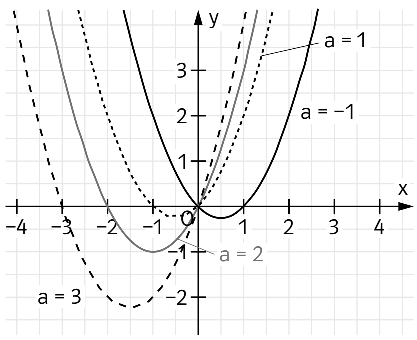
3 a)



Die Graphen haben die Form einer natürlichen Exponentialfunktion, verschoben um $a > 0$ ($a < 0$) in positiver (negativer) y-Richtung.

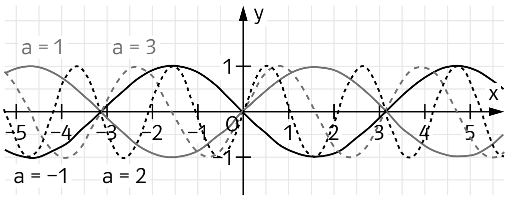
Je größer a ist, desto weiter nach „oben" ist der Graph verschoben.

b)



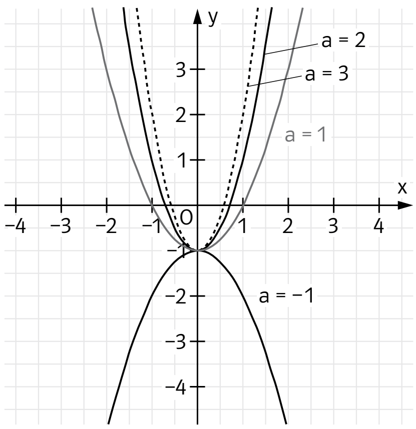
Die Graphen haben die Form einer natürlichen Normalparabel; gemeinsam ist der Punkt (0|0). Für $a > 0$ ($a < 0$) liegt der Scheitel links (rechts) vom Ursprung. Je größer a ist, desto weiter links liegt der Scheitel.

c)



Die Graphen sind Sinuskurven mit gleicher Amplitude 1. Je größer $|a|$ ist, desto kürzer ist die Periode $\frac{2\pi}{|a|}$.

d)



Die Graphen sind Parabeln mit dem Scheitel (0|−1). Für $a > 0$ ($a < 0$) ist die Parabel nach oben (unten) geöffnet. Je größer $|a|$ ist, desto enger ist die Parabel.

4 a) $f_a(x) = \frac{1}{x} + a \quad (a \in \mathbb{R})$ b) $f_a(x) = \frac{1}{a} \cdot e^{x-a} \quad (a > 0)$

5 a) gelb: $t = -\frac{3}{2}$; orange: $t = -3$; rot: $t = 2$; violett: $t = \frac{1}{2}$

b) $f_a(x) = \frac{1}{3}x^2(x-a)$ Nullstellen bei $x_1 = 0$ und $x_2 = a$.

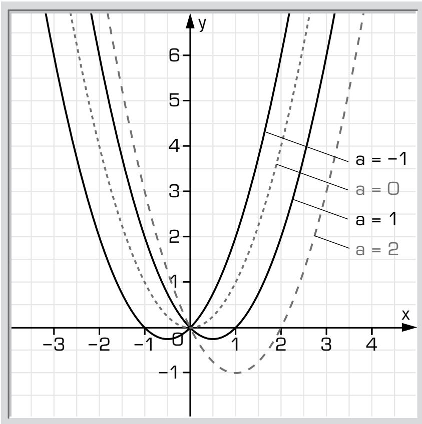
gelb: $a = 3{,}5$; orange: $a = 2$; rot: $a = -2$; violett: $a = -3$

S. 210

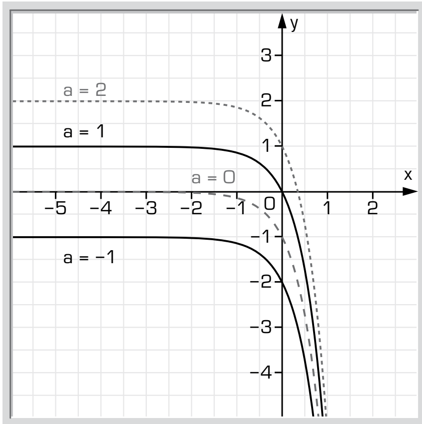
6 $y = x^2 - 2ax + a^2 = (x-a)^2$

(1) $a = 1$; (2) $a = 2$; (3) $a = -1$; (4) $a = \frac{1}{3}$; (5) $a = \sqrt{2}$; (6) $a = -3$

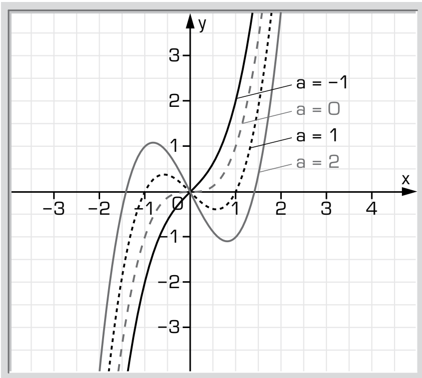
7 a)



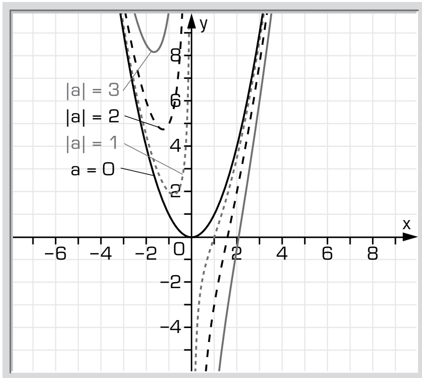
b)



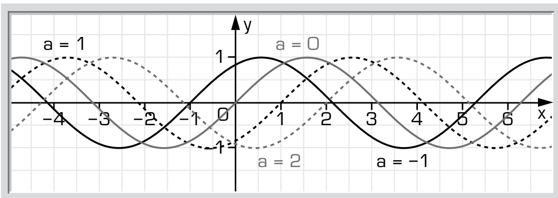
c)



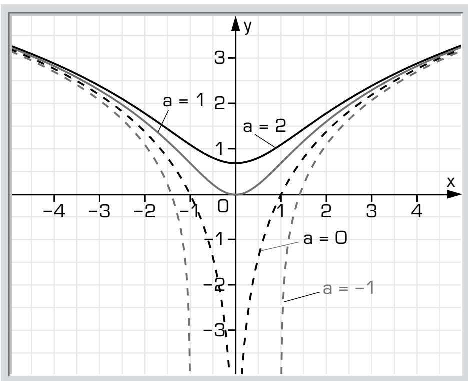
d)



e)



f)

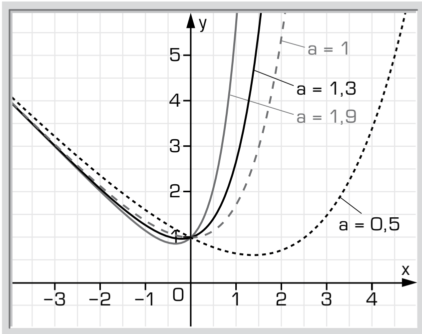


8 a) Der Personenanzahl x ist das Speichervolumen $1{,}5 \cdot t \cdot x$ in Litern zugeordnet, wobei t Liter eine Kollektorfläche $f(t)$ benötigen. Dem Wasserbedarf wird wiederum die Kollektorfläche zugeordnet: Aus $200\,l \mapsto 3\,m^2$ und $500\,l \mapsto 7\,m^2$ erhält man die lineare Funktion $f(t) = \frac{1}{75}t + \frac{1}{3}$.
Damit gilt die für x Personen benötigte Kollektorfläche: $f_t(x) = \frac{1}{75}\left(\frac{3}{2}tx\right) + \frac{1}{3} = \frac{t}{50}x + \frac{1}{3}$.

b) $f_{50}(4) = 4\frac{1}{3}$ (in m^2)

c) Individuelle Lösung

9 a)

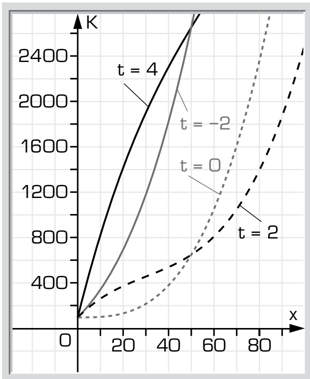


Alle Graphen haben den Punkt (0|1) gemeinsam.

b) Für $x \to -\infty$ gilt $f_a(x) + x = e^{a \cdot x} \to 0$;
damit ist $y = -x$;
gemeinsame Asymptote für $x \to -\infty$.

c) Extremstellen:
$f_a'(x) = a \cdot e^{ax} - 1$
$f_a'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = -\frac{\ln a}{a}$
In x_0 liegt ein Tiefpunkt vor: $T_a\left(-\frac{\ln a}{a} \,\middle|\, \frac{1 + \ln a}{a}\right)$
Für $a = 1$ gilt: $T(0|1)$

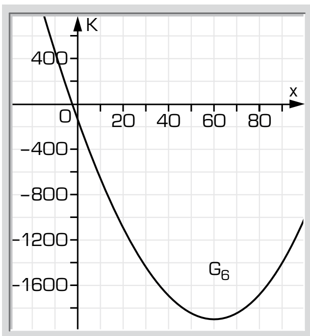
10 a)



Je größer |t| ist, desto steiler ist der Graph bei kleinen x-Werten. Die Gesamtkosten K_t sind in diesem Fall bei einer geringen Anzahl an Produktionseinheiten relativ hoch.

b) Umsatz: $U_t(x) = 6 \cdot (t + 10) \cdot x = 6tx + 60x$
Gewinn: $G_t(x) = U_t(x) - K_t(x)$
t = −2: $G_{-2}(x) = -0{,}0044x^3 - 0{,}4x^2 + 28x - 100$ wird maximal für $x_1 \approx 24{,}83$ mit $G_{-2,max} \approx 281{,}27$ (in €). Da $G_{-2}(0) = -100$ und $G_{-2}(100) = -5700$ ist, wird für x_1 auch das globale Maximum des Gewinns erzielt.
t = 0: $G_0(x) = -0{,}0044x^3 + 60x - 100$ wird maximal für $x_1 \approx 67{,}42$ mit $G_{0,max} \approx 2596{,}80$ (in €). Da $G_0(0) = -100$ und $G_0(100) = 1500$ ist, wird für x_1 auch das globale Maximum des Gewinns erzielt.

c)



$G_6(x) = -0{,}0044x^3 + 1{,}2x^2 - 84x - 100$
Da $G_6(x) < 0$ für $0 \leqq x \leqq 100$ kann kein Gewinn erzielt werden.

11 a) Z.B. $P_1(1|4)$ in f_1 eingesetzt: $4 = \frac{a-2}{b}$ (I)

$P_2(1|0)$ in f_3 eingesetzt: $0 = \frac{a-6}{b}$ (II)

Aus (II) folgt $a = 6$. In (I) eingesetzt ergibt sich damit $b = 1$.

Also: $f_t \mapsto \frac{6x-2t}{x^2}$

b) $D_{max} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$f_t(-x) \neq f_t(x)$; $f_t(-x) \neq -f_t(x)$; die Graphen der Schar besitzen also keine Symmetrieeigenschaft.

c) $f_t(-x) = \frac{6-\overbrace{\frac{2t}{x}}^{\to 0}}{\underbrace{x}_{\to +\infty}} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$; $\quad f_t(x) = \frac{6-\overbrace{\frac{2t}{x}}^{\to +\infty}}{\underbrace{x}_{\to 0}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty$

d) $f_t'(x) = \frac{-6x+4t}{x^3}$

$f_t'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = \frac{2}{3}t$

In x_0 liegt ein Hochpunkt vor: $H_t\left(\frac{2}{3}t\,\middle|\,\frac{9}{2t}\right)$.

(I) $x = \frac{2}{3}t$

(II) $y = \frac{9}{2t}$

Aus (I) folgt $t = \frac{3}{2}x$. In (II) eingesetzt ergibt sich damit $y = \frac{3}{x}$.

Durchläuft t alle zugelassenen Werte, so bilden die Punkte H_t eine Kurve mit der Gleichung $y = \frac{3}{x}$.

S. 211

12 a) Fehler im *Schülerbuch*: Es muss heißen … Nullstellen von $\mathbf{f_{-1}}$ …

$f_{-1}(x) = x+e^x$; $f_{-1}'(x) = 1+e^x$. Die Nullstelle liegt zwischen 0 und −1, da $f_{-1}(-1) \approx -1{,}368 < 0$ und $f_{-1}(0) = 1 > 0$ ist.

Aus $x_{n+1} = x_n - \frac{f_1(x_n)}{f_1'(x_n)}$ ergibt sich $x_{n+1} = x_1 - \frac{x+e^x}{1+e^x}$.

Mit dem Anfangswert $x_0 = -0{,}5$ erhält man der Reihe nach $x_1 \approx 0{,}566311$, $x_2 \approx 0{,}567143$, $x_3 \approx 0{,}567143$.

b) Extremstellen;

$f_k'(x) = 1-ke^x$

$f_k'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = -\ln k$; $\quad k > 0$

Bei x_0 liegt für $k > 0$ ein Hochpunkt vor: $H_k(-\ln k\,|-\ln k-1)$.

Die Hochpunkte der Graphen von f_k liegen auf

(I) $x = -\ln k$

(II) $y = -\ln k-1$

Aus (I) folgt $k = e^x$. In (II) eingesetzt ergibt sich damit $y = x-1$.

c) Die Tangente in einem beliebigen Punkt $P(a\,|\,f_k(a))$ hat die Gleichung $\frac{y-(a-k\cdot e^a)}{x-a} = 1-k\cdot e^a$.

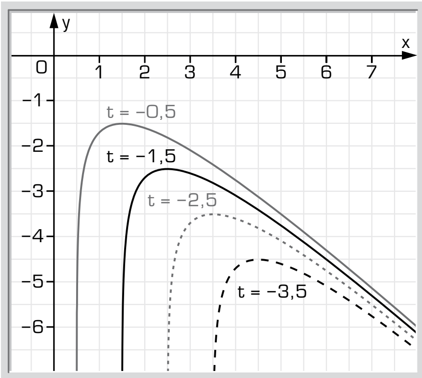
Da sie durch den Ursprung verlaufen soll, muss gelten:

$\frac{-(a-k\cdot e^a)}{-a} = 1-k\cdot e^a$ oder $k\cdot e^a = a\cdot k\cdot e^a$, $a = 1$.

Damit ist die Gleichung der Tangente $y = (1-ke)\cdot x$.

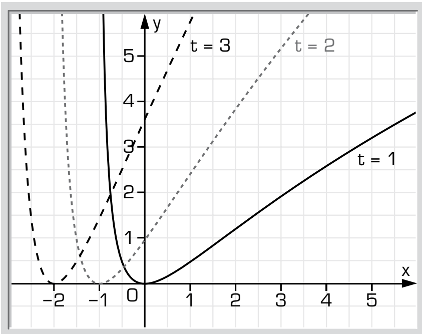
Der gesuchte Punkt ist $P(1\,|\,1-ke)$.

13 a)



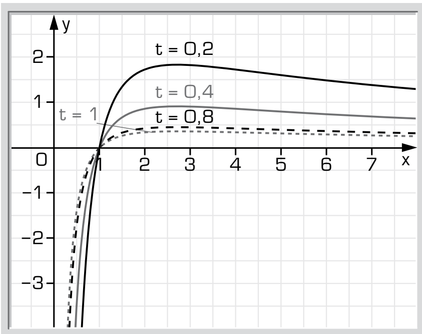
$D_{f_t} = \{x \mid x > -t\}$
Asymptoten: Für $x \to -t$ gilt $f_t(x) \to -\infty$;
damit ist $x = -t$ Asymptote.
Extremstellen:
$f_t'(x) = \frac{1}{x+t} - 1$
$f_t'(x) = 0 \iff x_0 = 1 - t$
Bei x_0 liegt ein globales Maximum vor.
Je größer t ist, desto weiter oben und weiter links liegt der Hochpunkt des Graphen G_{f_t}.
$y = -t$ ist senkrechte Asymptote.

b)



$D_{f_t} = \{x \mid x > -t\}$
Asymptoten: Für $x \to -t$ gilt $f_t(x) \to +\infty$;
damit ist $x = -t$ Asymptote.
Extremstellen:
$f_t'(x) = \frac{2t \cdot \ln(x+t)}{x+t}$
$f_t'(x) = 0 \iff x_0 = 1 - t$
Bei x_0 liegt ein globales Minimum vor.
Je größer t ist, desto weiter links liegt der Tiefpunkt (und somit auch die Nullstelle) des Graphen G_{f_t}.

c)



$D_{f_t} = \{x \mid x > 0\}$
Asymptoten: Für $x \to 0$ gilt $f_t(x) \to -\infty$;
damit ist $x = 0$ Asymptote.
Für $x \to +\infty$ gilt $f_t(x) \to 0$;
damit ist $y = 0$ Asymptote.
Extremstellen:
$f_t'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{tx^2}$
$f_t'(x) = 0 \iff x_0 = e$
Bei $x_0 = e$ liegt ein globales Maximum vor.
Je größer t ist, desto weiter unten liegt der Hochpunkt des Graphen G_{f_t}.

14 a) Der Parameter a bestimmt den Schnittpunkt des Graphen der Funktion f_t mit der y-Achse: $S(0 \mid a)$.
Je größer a ist, umso größer ist die anfängliche Amplitude. Die Dämpfung wird von k bestimmt: Je größer das positive k ist, umso rascher nehmen die Amplituden ab.
In s bestimmt b die Zeitdauer der Schwingung: Je größer b ist, umso kürzer ist die Zeitdauer für eine volle Schwingung.

b) Im vorliegenden Fall ist $a = 5$, da der Graph von f_t durch $P(0 \mid 5)$ verläuft. Da er auch durch $Q(8 \mid 1)$ verläuft, ist $5 \cdot e^{-k \cdot 8} = 1$, also $k = \frac{\ln 5}{8} \approx 0{,}2$.
Da im Intervall $[0; 2\pi]$ zwei volle Schwingungen erfolgen, ist $b = 2$.
Damit: $s(t) = 5 \cdot e^{-0{,}2 \cdot t} \cdot \sin(2 \cdot t)$.

15 a) Generelle Zunahme; Treibhauseffekt.
Jahreszeitliche Schwankungen: in Pflanzen gebundenes CO_2 im Sommer, verstärkte Heizung im Winter (Nordhalbkugel).

b) Die Amplitude ist $a = 2{,}5$.
Die Periode ist $p = 1$. Damit ergibt sich aus $p = \frac{2\pi}{b}$; $b = 2\pi$.
Der Scheitel der zugrundeliegenden Parabel liegt bei $(0|316)$.
Daraus folgt $k_0 = 316$.
Einsetzen der beiden Graphenpunkte $P_1(5|320)$ und $P_2(10|335)$ liefert $k_1 = 0{,}7$ und $k_2 = 0{,}02$.
Also: $k_0 = 316$; $k_1 = 0{,}7$; $k_2 = 0{,}02$; $a = 2{,}5$; $b = 2\pi$.

16 a) Schwimmgeschwindigkeit relativ zum Land $\left(\text{in } \frac{m}{s}\right)$: $x-2$;.
Schwimmzeit (in s): $\frac{100}{x-2}$.
Energie (in J): $E(x) = 100c \cdot \frac{x^k}{x-2}$

$$E'(x) = 100c \cdot x^{k-1} \cdot \frac{(k-1)x-2k}{(x-2)^2}$$

Maximaler Energieaufwand bei $x_{min} = \frac{2k}{k-1}$ $\left(\text{in } \frac{m}{s}\right)$.

b) $x_{min}(x) = \frac{2k}{k-1}$; $x'_{min}(k) = \frac{-2}{(k-1)^2} < 0$ für $k > 2$.
x_{min} ist also streng monoton abnehmend; d.h. je größer k ist, desto kleiner ist die energiesparendste Geschwindigkeit.

17 a) $P(A \cap B) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$; $P(A \cup B \setminus C) = \frac{40}{100} = \frac{4}{10}$; $P(\overline{B}) = \frac{50}{100} = \frac{5}{10}$; $P_{A \cup B}(C) = \frac{\frac{20}{100}}{\frac{60}{100}} = \frac{1}{3}$

b) $P(A) = \frac{20}{100} = \frac{2}{10}$; $P(C) = \frac{40}{100} = \frac{4}{10}$; $P(A \cap C) = \frac{8}{100}$; $P(A) \cdot P(C) = P(A \cap C)$;
also sind die Ereignisse A und C stochastisch unabhängig.

5 Funktionsbestimmungen

S. 212 **1** a) Um die Gleichung einer Parabel der Form $y = ax^2 + bx + c$ aufzustellen, sind drei Bedingungen nötig.

Hier: Nullstelle $(0|0) \in G_f$ $\Rightarrow$ $f(0) = 0$ $\Rightarrow$ $c = 0$
Maximum bei $x = 2{,}5$ $\Rightarrow$ $f'(2{,}5) = 0$ $\Rightarrow$ $5a + b = 0$ (I)
Scheitel $(2{,}5|3) \in G_f$ $\Rightarrow$ $f(2{,}5) = 3$ $\Rightarrow$ $6{,}25a + 2{,}5b = 3$ (II)

Die Lösung des Gleichungssystems liefert; $a = -0{,}48$, $b = 2{,}4$.
Damit gilt: f: $y = -0{,}48x^2 + 2{,}4x$.

b) Die Funktion f hat eine Polstelle bei $x = 1$ und G_f somit eine senkrechte Asymptote der Gleichung $x = 1$.
Die Polynomdivision $(x^2 - x + 1) : (x-1) = x + \frac{1}{x-1}$ liefert eine schräge Asymptote der Gleichung $y = x$.

Desweiteren gilt: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x-1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \pm\infty$ und $\lim\limits_{x \underset{>}{\overset{<}{\to}} 1} = \pm\infty$.

Somit gehört der blaue Graph zur angegebenen Funktion.

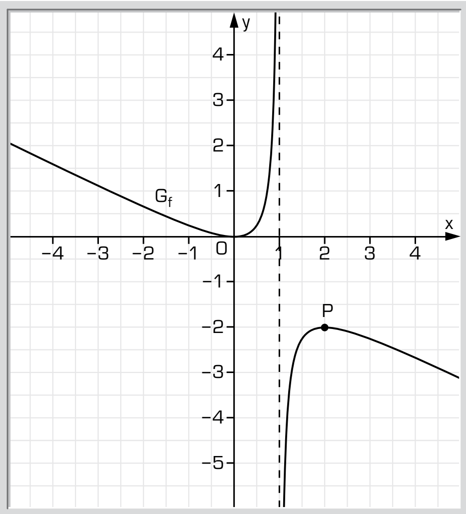
S. 213

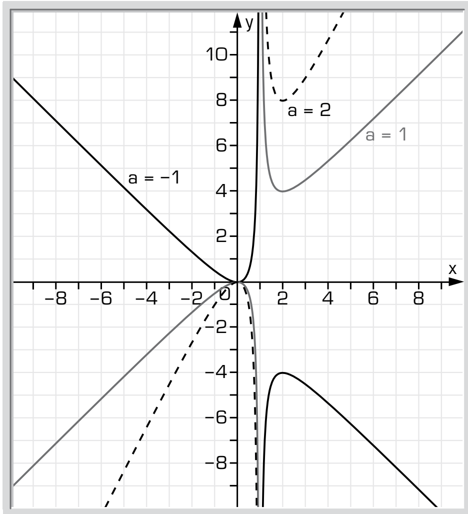
2 a) Polstelle bei $x = 1 \;\Rightarrow\; c = -1$

$P \in G_f \;\Rightarrow\; a = -\frac{1}{2}$

Damit gilt: $f(x) = \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x-1}$.

b) Bei P liegt ein lokales Maximum vor. Diese Eigenschaft liefert mit $f'(2) = 0$: $1 + c = 0$. Dies ist die gleiche Bedingung wie die Polstelle. Das lokale Maximum (Minimum) liegt unabhängig von a jeweils bei $x = 2$.





3 Es gilt: $f'(x) = a \cdot \sqrt{b - x^2} - \frac{ax^2}{\sqrt{b - x^2}}$

$f'(0) = \frac{4}{3} \;\Rightarrow\; a\sqrt{b} = \frac{4}{3}$

$f(4) = 0 \;\Rightarrow\; 4a\sqrt{b - 16} = 0$

$\Rightarrow\; a = \frac{1}{3};\; b = 16$

Damit gilt: $f(x) = \frac{x}{3}\sqrt{16 - x^2}$.

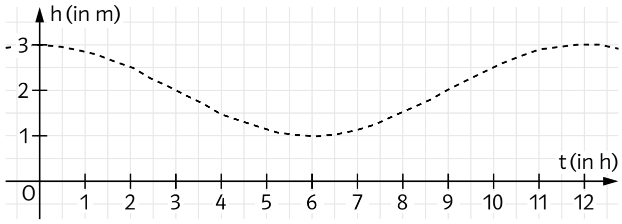
S. 214

4 a) Es ist

$a = \frac{1+3}{2} = 2$ und $b = \frac{3-1}{2} = 1$.

Damit gilt: $h(t) = 2 + \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$.

Die Periode ist $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12$.



b) Gesucht ist $h(t) \leqq 1{,}5$, also $2 + \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right) \leqq 1{,}5$

bzw. $\cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right) \leqq -0{,}5$.

Dazu bestimmt man die Schnittstellen der Funktionen $c(t) = \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$ und $g(t) = -0{,}5$:

Man erhält die Stellen $t_1 = 4$ und $t_2 = 8$.

Damit liegt der Wasserspiegel 4 Stunden unter 1,5 m.

Das Wasser steigt maximal dort, wo die Steigung $h'(t) = -\sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right) \cdot \frac{\pi}{6}$ maximal ist, also am Maximum der 1. Ableitung bei $t_3 = 9$. Es ist dort $h'(9) = \frac{\pi}{6} \approx 0{,}524$ $\left(\text{in } \frac{m}{h}\right)$.

Damit steigt das Wasser maximal etwa 0,873 Zentimeter pro Minute.

5 Ansatz: $f(x) = ax^3+bx^2+c$; $f'(x) = 3ax^2+2bx$

$f(0) = 0 \Rightarrow c = 0$

$T(2|1) \in G_f \Rightarrow 8a+4b = 1$

$f'(2) = 0 \Rightarrow 12a+4b = 0$

$\Rightarrow a = -\frac{1}{4}$; $b = \frac{3}{4}$

Damit gilt: $f(x) = -\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{4}x^2$.

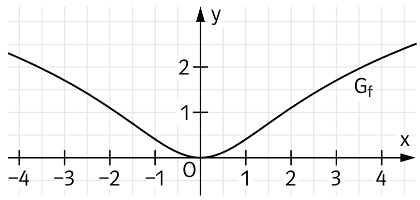
6 Es gilt: $f'(x) = \frac{n \cdot b \cdot x^{n-1}}{a+b \cdot x^n}$.

Achsensymmetrie bzgl. der y-Achse $\Rightarrow$ n ist gerade.

$f(0) = 0 \Rightarrow a = 1$

$f'(1) = \frac{2}{3} \Rightarrow b = 0{,}5$

Damit gilt: $f(x) = \ln(1+0{,}5x^2)$.



7 a) Es gilt: $f'(x) = \frac{2a+bx}{x^3}$.

$f(0{,}5) = 0 \Rightarrow b = -2a$ (Alternativ: $f'(1) = 0 \Rightarrow b = -2a$)

$f(1) = -2 \Rightarrow a+b = 2$ (Alternativ: $f'(-1) = 6 \Rightarrow a-b = 6$) $\Rightarrow a = 2$; $b = -4$

Damit gilt: $f(x) = \frac{2-4x}{x^2}$.

b) $c = 0{,}5$: $a = 1$; $b = -2$

$c = 2$: $a = 4$; $b = -8$

c kann beliebig gewählt werden, da $a = 2c$ und $b = -2a$, d.h. es ergibt sich stets der gleiche Graph.

8 a) Es gilt: $f'(x) = a \cdot (b - \ln x - 1)$

Nullstelle: $x_0 = e^b$

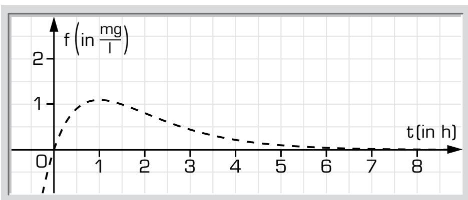
$f'(e^b) = -1 \Rightarrow a = 1$ (Die Bedingung ist unabhängig von b.

Der Parameter b bestimmt die Lage der Nullstelle und des lokalen Maximums. Der Schnittwinkel ist für $a = 1$ aber stets gleich 135°.

b) Lokales Maximum bei $x_1 = e^{b-1}$

9 a) $c = 0$ bedeutet, dass zu Versuchsbeginn $t = 0$ die Konzentration 0 ist, also keine „Restkonzentration" vom vorherigen Experiment vorliegt (o.ä.).

b) Z.B. $a = 3$; $b = 1$; $c = 0$

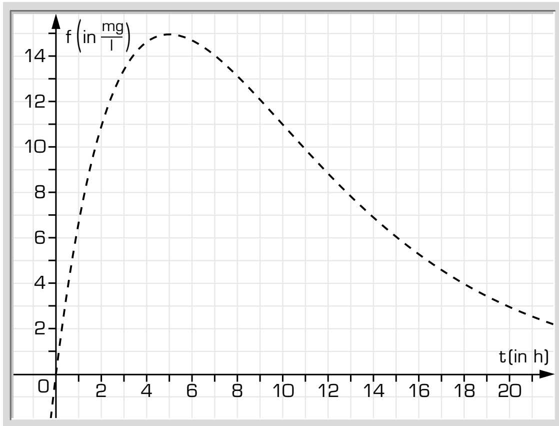


Je größer der positive Parameter a ist, desto größer ist die höchste Konzentration des Medikaments, desto weiter oben liegt also der Hochpunkt des Graphen.

Je größer der positive Parameter b ist, desto rascher sinkt die Konzentration nach dem Maximum ab, desto steiler fällt dann also der Graph.

Der Parameter c gibt die Anfangskonzentration an, so dass für größer werdende c-Werte der Graph in positive y-Richtung verschoben wird.

c) Es gilt: $f(t) = a \cdot t \cdot e^{-b \cdot t}$;
$f'(t) = a \cdot e^{-b \cdot t}(1 - b \cdot t)$
$f(5) = 15 \quad \Rightarrow \quad 5 \cdot a \cdot e^{-5 \cdot b} = 15$
$f'(5) = 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot e^{-5 \cdot b}(1 - 5 \cdot b) = 0$
$\Rightarrow \quad a = 3e;\ b = \frac{1}{5}$
Damit gilt: $f(t) = 3t \cdot e^{1 - \frac{1}{5}t}$



10 Es gilt: $f(x) = ax^2 + c$; $\quad f'(x) = 2ax$
$f(0) = 4 \quad \Rightarrow \quad c = 4$
$f'(-4) = 2 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{4}$
Damit gilt: $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4$

11 a) Es gilt: $f'(t) = a \cdot \frac{\pi}{12} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot t + b\right)$
Es ist $a = \frac{30-16}{2} = 7$ und $c = \frac{30+16}{2} = 23$
$f(14) = 30 \quad \Rightarrow \quad \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot 14 + b\right) = 1$, d.h. $\frac{\pi}{12} \cdot 14 + b = \frac{\pi}{2}$
Damit ist $b = -\frac{8}{12}\pi$ und es gilt:
$f(t) = 7 \cdot \sin\left[\frac{\pi}{12} \cdot (t - 8)\right] + 23$

b) Man bestimmt das Maximum der 1. Ableitung. Die Temperaturzunahme war um 8.00 Uhr am größten. Sie betrug dort etwa 1,8 °C pro Stunde.

12 Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{a}' = c \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$; $c \in \mathbb{R}$

$$\left|\vec{a}'\right| = \sqrt{(ca_1)^2 + (ca_2)^2 + (ca_3)^2} = \sqrt{c^2(a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2)} = c \cdot \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2} = c \cdot \left|\vec{a}'\right|$$

6 Funktionsanpassungen

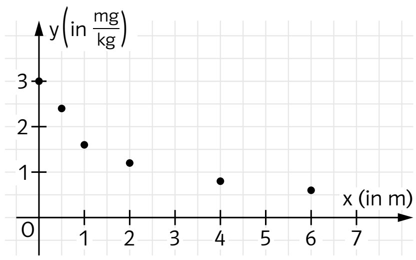
S. 215

1 $h(x) = \frac{ax}{x+b}$

S. 216

2 a) Lineare Funktion
b) Exponentialfunktion oder gebrochen rationale Funktion
c) Gebrochen rationale Funktion

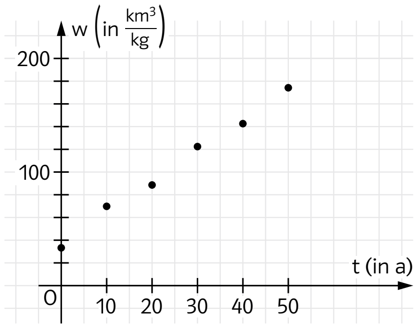
3



Wählt man zur Bestimmung z.B. die Wertepaare (0|3) und (4|0,8) oder (0,5|2,4) und (6|0,6), so ergibt sich $f(x) = \frac{4{,}36}{x+1{,}45}$ bzw. $f^*(x) = \frac{4{,}4}{x+1{,}33}$.

S. 217

4 a) Transformation der Messwerte: $t = 0$ entspricht dem Jahr 1930. Das Wertepaar $(0|33)$ betrachtet man als „Ausreißer" und wählt mit dem Ansatz $w(t) = a \cdot e^{kt}$ zur Bestimmung z.B. die Wertepaare $(10|69{,}8)$ und $(50|174{,}2)$ bzw. $(20|88{,}6)$ und $(50|174{,}2)$:

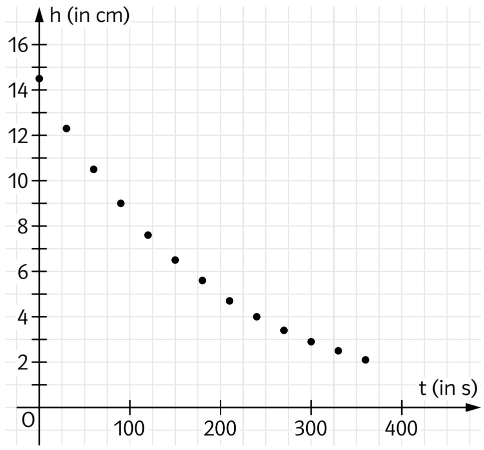


$w(t) = 55{,}53 \cdot e^{0{,}02229 \cdot t}$ bzw.
$w^*(t) = 56{,}45 \cdot e^{0{,}0225 \cdot t}$.
Unter Verwendung der Funktion
$w(t) = 56{,}45 \cdot e^{0{,}0225 \cdot t}$ ergibt sich für die Teilaufgaben b) und c):

b) $T_V = \frac{\ln 2}{0{,}0225} \approx 30{,}8$ (Jahre)

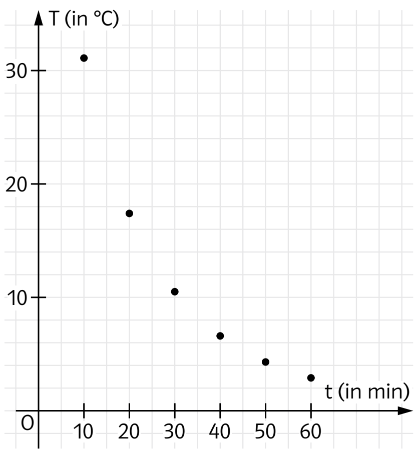
c) $w(65) \approx 244{,}26$ (km^3)
In Wirklichkeit liegt der Wasserverbrauch bei $244{,}26\,km^3$; d.h. der Verbrauch steigt nicht mehr weiter exponentiell.

5 a)



Wählt man zur Bestimmung z.B. das Wertepaar $(30|12{,}3)$ und $(330|2{,}5)$, so ergibt sich mit dem Ansatz $f(x) = \frac{a}{x+b}$ der Funktionsterm $h(t) = \frac{941{,}33}{t + 46{,}53}$.
Kontrolle:
$h(90) \approx 6{,}89 < 9{,}0$; $h(180) \approx 4{,}16 < 5{,}6$.
Aufgrund der hohen Abweichungen ist der angegebene Ansatz nicht geeignet.
Ansatz: $h(t) = a \cdot e^{-k \cdot t}$
Wählt man zur Bestimmung z.B. die Wertepaare $(0|14{,}5)$ und $(330|2{,}5)$ bzw. $(0|14{,}5)$ und $(300|2{,}9)$, so ergibt sich
$h(t) = 14{,}5 \cdot e^{-0{,}0059 \cdot t}$ bzw.
$h^*(t) = 14{,}5 \cdot e^{-0{,}0054 \cdot t}$.
Hierbei sind die Abweichungen von den Tabellenwerten geringer. Die Exponentialfunktion ist daher besser geeignet.

6 a)

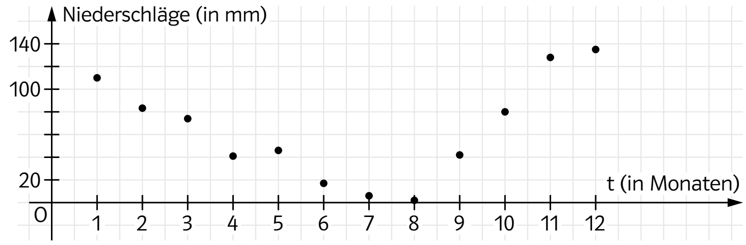


Vermutung: $T(t) = a \cdot e^{-k \cdot t}$
Wählt man zur Bestimmung z.B. die Wertepaare $(10|31{,}1)$ und $(50|4{,}3)$ bzw. $(10|31{,}1)$ und $(60|2{,}9)$, so ergibt sich
$T(t) = 51{,}0 \cdot e^{-0{,}049 \cdot t}$ bzw. $T^*(t) = 50{,}0 \cdot e^{-0{,}047 \cdot t}$.

b) T: Der Tee war beim Eingießen etwa 51,0 °C heiß.

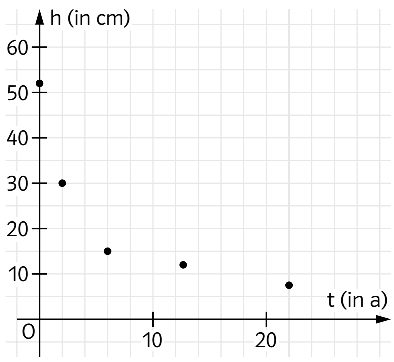
c) T*: Der Tee war beim Eingießen etwa 50,0 °C heiß.

7



Mögliche Wahl der Parameter: $a = 60$, $c = 2$ und $d = 60$.
Allerdings beträgt hierbei die maximale Abweichung von den tatsächlichen Monatsniederschlägen etwa 38 (mm) (Monat November).
Legt man z. B. eine Tabellenkalkulation mit den Eingabewerten a, c und d und dem Ausgabewert „maximale Abweichung“ an, so lassen sich einige Werte-Tripel durchprobieren. Die maximale Abweichung lässt sich verbessern: Mit $a = 57$, $c = 2{,}5$ und $d = 65$ beträgt die maximale Abweichung etwa 23 (mm) (Monat November).

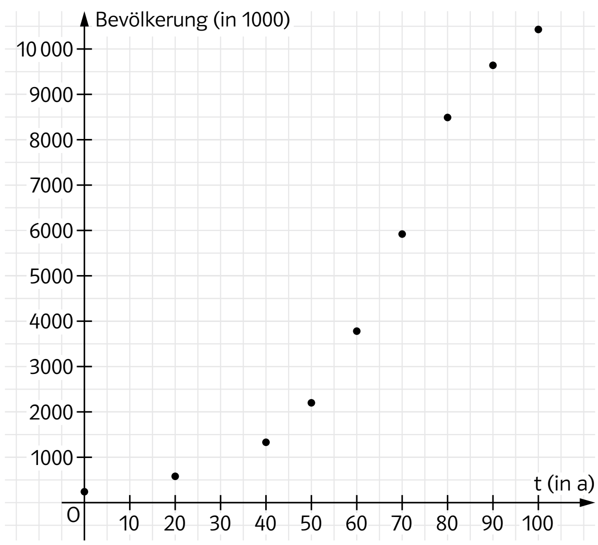
8 a) Transformation der Messwerte: $t = 0$ entspricht dem Jahr 1936.



Ansatz: $d(t) = \frac{a}{t+b}$
Wählt man zur Bestimmung z. B. die Wertepaare $(0|52)$ und $(13|12)$ bzw. $(3|30)$ und $(22|7{,}5)$, so ergibt sich
$d(t) = \frac{202{,}8}{t+3{,}9}$ bzw. $d^*(t) = \frac{190}{t+3{,}3}$.

b) $d(34) \approx 5{,}35$ (h); $d(41) \approx 4{,}52$ (h)
$d^*(34) \approx 5{,}09$ (h); $d^*(41) \approx 4{,}29$ (h)
Für die Jahre nach 1958 wird die Abweichung vom tatsächlichen Wert immer größer, d. h. die Flugzeiten nehmen nicht mehr gemäß einer gebrochen rationalen Funktion ab.

9 Transformation der Messwerte: $t = 0$ entspricht dem Jahr 1900.



Ansatz: $f(t) = a \cdot e^{-k \cdot t}$
Wählt man zur Bestimmung z. B. die Wertepaare $(0|240)$ und $(50|2200)$ bzw. $(0|240)$ und $(60|3780)$, so ergibt sich $f(t) = 240 \cdot e^{0{,}0043 \cdot t}$ bzw. $f^*(t) = 240 \cdot e^{0{,}0459 \cdot t}$
(t in Jahren ab 1900; $f(t)$, $f^*(t)$ in 1000).

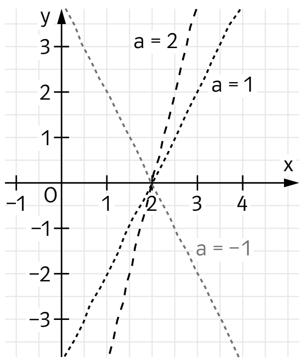
Zeitraum 1900 – 1980:
Wählt man zur Bestimmung z. B. die Wertepaare $(0|240)$ und $(70|5820)$ bzw. $(0|240)$ und $(80|8490)$, so ergibt sich
$g(t) = 240 \cdot e^{0{,}0458 \cdot t}$ bzw.
$g^*(t) = 240 \cdot e^{0{,}0446 \cdot t}$
(t in Jahren ab 1900; $g(t)$, $g^*(t)$ in 1000).
$f(100) \approx 20144$; $f^*(100) \approx 23639$;
$g(100) \approx 23403$; $g^*(100) \approx 20757$

Bei allen Funktionsanpassungen ist die Abweichung sehr groß; den besten Wert liefert jedoch f.
Das Wachstum war in den letzten Jahren von 1960 bis 1980 besonders stark. Inzwischen sind aber Abflachungen im Wachstum sichtbar.

10 a) Transformation der Messwerte: $t = 0$ entspricht dem Jahr 1907.
Ansatz: $f(t) = a \cdot e^{k \cdot t}$
Wählt man zur Bestimmung z. B. das Wertepaar $(0\,|\,15)$ und $(32\,|\,1427)$, so ergibt sich
$f(t) = 15 \cdot e^{0{,}1424 \cdot t}$ (t in Jahren ab 1907; f(t) in 1000).
Mit $k \approx 0{,}1424$ folgt $p = 100 \cdot (e^k - 1) \approx 15{,}30$ als jährliche prozentuale Zunahme.

b) Eine Funktionsanpassung mit einer linearen Funktion erscheint angemessen. Der Funktionsterm lautet h mit z. B. $h(t) = 938{,}025 \cdot t + 4803$ (t in Jahren ab 1960; h(t) in 1000) oder z. B.
$h^*(t) = 938{,}025 \cdot t - 44\,912$ (t in Jahren ab 1907; $h^*(t)$ in 1000).
Erwarteter Bestand im Jahr 2020: $h(60) = 61\,084{,}5$ (in 1000).

11 $f_a'(x) = 2a(x-2) = 2ax - 4a$
f_a hat ein Extremum bei $(2\,|\,1)$.
Skizze der Graphen der Ableitung für $a = -1; 1; 2$:

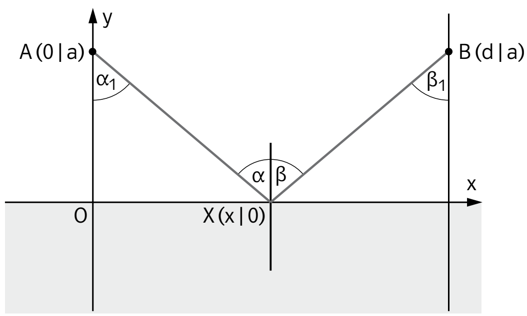


Der Graph der Ableitung ist eine Gerade, die für $a < 0$ fallend und für $a > 0$ steigend ist. Somit erfolgt bei $x = 2$ im Falle $a < 0$ ein Vorzeichenwechsel der Ableitung von „+“ nach „–“. Demnach ist für $a < 0$ das Extremum ein Maximum.

Thema: „Licht läuft optimal“

S. 219

1



Gesamtlaufzeit: $T(x) = \frac{\overline{AX}}{c} + \frac{\overline{XB}}{c} = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{c} + \frac{\sqrt{(d-x)^2+a^2}}{c}$

Kürzeste Laufzeit: $T'(x) = \frac{2x}{c \cdot 2\sqrt{a^2+x^2}} + \frac{-2(d-x)}{c_1 \cdot 2\sqrt{(d-x)^2+a^2}}$

Aus $T'(x) = 0$ erhält man: $\frac{x}{c \cdot \overline{AX}} - \frac{d-x}{c \cdot \overline{XB}} = 0$.

Mit $\sin\alpha_1 = \frac{x}{\overline{AX}}$ und $\sin\beta_1 = \frac{d-x}{\overline{XB}}$ folgt: $\frac{\sin\alpha_1}{c} - \frac{\sin\beta_1}{c} = 0$.

Da α und α_1 sowie β und β_1 jeweils Wechselwinkel an Parallelen sind, also $\alpha = \alpha_1$ und $\beta = \beta_1$, erhält man $\sin\alpha = \sin\beta$ und damit das Reflexionsgesetz $\alpha = \beta$.