Funktionen (zu den Grundwissenaufgaben in Kapitel I)

Definition (Aufgabe 1 und 2)
Eine Zuordnung f, die jedem x aus einer Definitionsmenge D genau einen Wert f(x) zuordnet, heißt Funktion. f(x) heißt Funktionswert von x oder an der Stelle x. Definitionsmenge: Menge aller Zahlen, für die es einen Funktionswert gibt.
Wertemenge: Menge aller Funktionswerte.

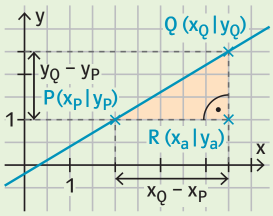
Tabelle – Graph – Gleichung (Aufgaben 2–4)
Wertetabelle: Liste von Wertepaaren (x; f(x))
Graph: Alle Punkte $(x \mid f(x))$ mit $x \in D$.
Funktionsgleichung: Beschreibung der Funktion mithilfe eines Funktionsterms.

Intervalle (Aufgabe 4)
Definitionsmengen sind oft Intervalle wie z. B.
$[a;\, b] = \{x \mid a \le x \le b\}$; $[a;\, b) = \{x \mid a \le x < b\}$
$(a;\, \infty) = \{x \mid x > a\}$.

Lineare Funktion (Aufgaben 5 und 6)
Gleichung: $f(x) = mx + b$ mit reellen Zahlen m und b.
Graph: Gerade mit der Steigung m und dem y-Achsenabschnitt b.
Eine Gerade im Abstand a parallel zur y-Achse ist kein Graph einer Funktion, sie wird durch die Gleichung $x = a$ beschrieben.

Steigungsdreieck (Aufgabe 6)
Steigung aus den Koordinaten zweier Punkte $P(x_P \mid y_P)$ und $Q(x_Q \mid y_Q)$ des Graphen mithilfe eines Steigungsdreiecks PRQ bestimmen:

$m = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$



Quadratische Funktion (Aufgabe 7–9)
Gleichung: $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit reellen Zahlen $a \neq 0$, b, c.
Graph: Parabel
Normalparabel: $a = 1$
Nullstellen: $ax^2 + bx + c = 0$ durch a dividieren ergibt $x^2 + px + q = 0$ mit $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$.
Lösungen der Gleichung:

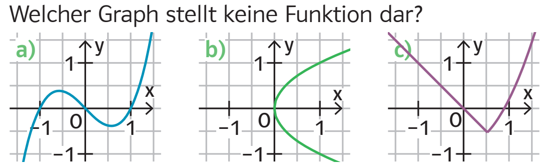
$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$, falls $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \ge 0$.

Scheitelpunkt: $S\left(-\frac{p}{2} \,\middle|\, a \cdot \left(q - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right)\right)$

Grundwissen Test

Lösungen | Seite 218

1 Welcher Graph stellt keine Funktion dar?



2 Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge.
a) $f(x) = x - \sqrt{x}$ b) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ c) $f(x) = \frac{1}{1 - x^2}$

3 Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f.
a) $f(x) = x^3 - x$ b) $f(x) = \sqrt{x} - 1$ c) $f(x) = 0{,}5^x$

4 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2 - x^2$ und der Definitionsmenge $D = [-3;\, 3]$.
a) Berechnen Sie die Funktionswerte an den Stellen 1 und −1 sowie f(1,5).
b) Erstellen Sie eine Wertetabelle von f mit Schrittweite 0,5 und skizzieren Sie den Graphen von f.
c) An welchen Stellen ist der Funktionswert 0 bzw. 1? Für welche u gilt $f(u) = 3$?
d) Bestimmen Sie die Wertemenge von f.

5 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{3}x - 1$.
a) Zeichnen Sie den Graphen für $x \in [-5;\, 5]$.
b) $P(2 \mid y)$ und $Q(u \mid 2)$ sind Punkte auf dem Graphen von f. Berechnen Sie y und u.
c) Liegt $R(3{,}6 \mid 0{,}3)$ auf dem Graphen von f?

6 Die Gerade g verläuft durch die Punkte $P(-3 \mid 2)$ und $Q(2 \mid -1)$.
a) Ermitteln Sie die Steigung und den y-Achsenabschnitt sowie die Gleichung von g.
b) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes von g mit der Geraden zu $x = 4$.

7 Skizzieren Sie den Graphen.
a) $f(x) = x^2 + 2x - 1$ b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$

8 Berechnen Sie Nullstellen und Scheitelpunkt.
a) $f(x) = x^2 - 10x + 9$ b) $f(x) = 4x^2 + 12x + 5$
c) $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{15}{16}$ d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 9x + 36$

9 Berechnen Sie Schnittpunkte der Graphen.
a) $f(x) = 6x - 15$; $g(x) = 3x + 5$
b) $f(x) = x^2 + 3x - 7$; $g(x) = 2x - 1$
c) $f(x) = -x^2 - 6x - 15$; $g(x) = -3x^2 + 5$

Seite aus: Lambacher Schweizer Qualifikationsphase Hessen Analysis
ISBN: 978-3-12-735741-7

Ganzrationale Funktion (Aufgabe 10)
Gleichung:
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ mit reellen Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ($n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$).
Die Zahl n heißt Grad der Funktion f.
Lineare Funktion ($n = 1$) und quadratische Funktion ($n = 2$) sind Sonderfälle.

Verhalten für $x \to \pm\infty$ (Aufgabe 11)
Für $x \to \pm\infty$ wird das Verhalten einer ganzrationalen Funktion vom Summanden mit der größten Potenz von x bestimmt:
Für betragsgroße x gilt $f(x) \approx a_n x^n$.

Nullstellen (Aufgaben 12, 14, 15)
Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$.
Eine ganzrationale Funktion vom Grad n hat höchstens n Nullstellen.
Exakte Berechnung mithilfe von Verfahren, die auf Gleichungen führen, deren Lösung man berechnen kann (wie z. B. lineare oder quadratische Gleichungen):
- Ausklammern, wenn alle Summanden des Funktionsterms die Variable x enthalten, z. B. $f(x) = x^4 - 3x^3 = x^3 \cdot (x - 3) = 0$, genau dann wenn $x = 0$ oder $x = 3$ (Satz vom Nullprodukt).
- Substitution, wenn der Funktionsterm nur die Potenzen x^2 und x^4 enthält, z. B. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$; Substitution $z = x^2$ liefert $z^2 - 3z + 2 = 0$.
- Ermitteln der Nullstellen, wenn der Funktionsterm Linearfaktoren enthält, z. B. hat f mit $f(x) = 2 \cdot (x + 3) \cdot (x - 1) \cdot (x^2 - 4)$ die Nullstellen $x_1 = -3$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$, $x_4 = 2$.

Wenn diese Verfahren nicht zum Ziel führen, kann man Nullstellen mithilfe eines Näherungsverfahrens bestimmen.

Schnittstellen (Aufgabe 13)
Lösung der Gleichung $f(x) = g(x)$, wobei f und g zwei ganzrationale Funktionen sind.
Man formt die Gleichung um und bestimmt die Lösung von $f(x) - g(x) = 0$ wie oben.
Z. B. führt die Berechnung der Schnittstellen bei f mit $f(x) = x^4 - 3x^3$ und g mit $g(x) = x^4 - 2x^3 + 8$ auf die Gleichung $x^4 - 3x^3 = x^4 - 2x^3 + 8$ bzw. $x^3 + 8 = 0$.

Grundwissen Test

Lösungen | Seite 219

10 Ist die Funktion f ganzrational?
a) $f(x) = x^3 - \sqrt{2} \cdot x$ b) $f(x) = \sqrt{x - 1}$ c) $f(x) = 2^x$

11 Untersuchen Sie, ob $f(x) \to \infty$ oder $f(x) \to -\infty$ für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$ gilt.
Geben Sie jeweils den Grad der Funktion an.
a) $f(x) = x^4 - 1$ b) $f(x) = x^2 - x^5$ c) $f(x) = 1 + x^3$

12 Berechnen Sie die Nullstellen.
a) $f(x) = 2x - 1$
b) $f(x) = x^2 - 2x - 1$
c) $f(x) = x \cdot (x - 3)$
d) $f(x) = 2x^2 + 8x$
e) $f(x) = x^2 - 2x + 2$
f) $f(x) = x^4 + 2x^2$
g) $f(x) = 4x \cdot (x^2 - 9)$
h) $f(x) = (3x - 21) \cdot (x^2 + 2)$
i) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$
j) $f(x) = x^4 + 2x^2 - 3$
k) $f(x) = (x^2 + 2) \cdot (x + 5) \cdot (x^2 - 25)$
l) $f(x) = x^5 - 3x^3 + 2x$

13 Berechnen Sie die Schnittstellen.
a) $f(x) = x^2$; $g(x) = 6x + 27$
b) $f(x) = x^4 + 36$; $g(x) = -13x^2$
c) $f(x) = 11x^2 + 20$; $g(x) = 3x^4$
d) $f(x) = x^4 + 20$; $g(x) = 9x^2$
e) $f(x) = 2x^6$; $g(x) = 18x^3 - 16$
f) $f(x) = x^3 + 2x^2$; $g(x) = 35x$

14 Geben Sie je ein Beispiel für eine ganzrationale Funktion f mit der Eigenschaft an
a) f hat keine Nullstellen.
b) f hat den Grad 2 und die Nullstellen −2 und 1.
c) f hat den Grad 3 und hat 3 Nullstellen.
d) f hat den Grad 4 und nur die Nullstelle $x_1 = 2$.
e) f hat eine Nullstelle weniger als ihr Grad.
f) f hat mindestens vier Nullstellen.

15 Wahr oder falsch?
a) Jede lineare Funktion mit $m \neq 0$ hat eine Nullstelle.
b) Eine Funktion, deren Grad eine gerade Zahl ist, hat auch eine gerade Anzahl von Nullstellen.
c) Jede ganzrationale Funktion hat mindestens eine Nullstelle, wenn ihr Grad eine ungerade Zahl ist.
d) Für jeden Grad gibt es eine ganzrationale Funktion, welche keine Nullstelle besitzt.

Seite aus: Lambacher Schweizer Qualifikationsphase Hessen Analysis
ISBN: 978-3-12-735741-7