IV Approximation

Bestimmen einer ganzrationalen Funktion mit vorgegebenen Eigenschaften

1. Aufstellen des allgemeinen Funktionsterms und gegebenenfalls Angeben der Ableitungen.
2. Formulieren der gegebenen Bedingungen mit f, f′, f″ usw.
3. Aufstellen des linearen Gleichungssystems.
4. Lösen des linearen Gleichungssystems.
5. Gegebenenfalls überprüfen, ob alle angegebenen Bedingungen erfüllt sind.

Der Graph einer ganzrationale Funktion vom Grad 3 hat in $T(0|0)$ einen Tiefpunkt und in $W(2|4)$ einen Wendepunkt.

1. Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
   $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
   $f''(x) = 6ax + 2b$
2. $f(0) = 0$; $f'(0) = 0$; $f(2) = 4$; $f''(2) = 0$
3. $d = 0$
   $c = 0$
   $8a + 4b + 2c + d = 4$
   $12a + 2b = 0$
4. $\left(-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}; 0; 0\right)$
   $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2$
5. $f''(0) = \frac{4}{3} > 0$ also Tiefpunkt erfüllt.
   $f'''(0) \neq 0$ also Wendepunkt erfüllt.

Interpolation mit ganzrationalen Funktionen

Kennt man von einer Kurve einige Punkte, dann kann man den Graphen einer ganzrationalen Funktion durch die gegebenen Punkte legen.
Aus der Funktionsgleichung der ganzrationalen Funktion kann man die Koordinaten beliebiger Punkte der Kurve näherungsweise bestimmen – man sagt interpolieren.
Das Interpolationsverfahren kann man durch weitere vorgegebene Eigenschaften des Graphen erweitern.

Interpolation der y-Koordinate des Punktes $P(1|y)$ zwischen T und W.
$y = f(1) = -\frac{1}{4} + \frac{3}{2} = \frac{5}{4}$

Regression

Die Darstellung von Wertepaaren als Punkte $P_1(x_1|y_1)$, $P_2(x_2|y_2)$, …, $P_n(x_n|y_n)$ in einem Koordinatensystem heißt **Punktwolke**.
Es gibt genau eine Gerade $y = mx + b$, für die die Summe der Fehlerquadrate

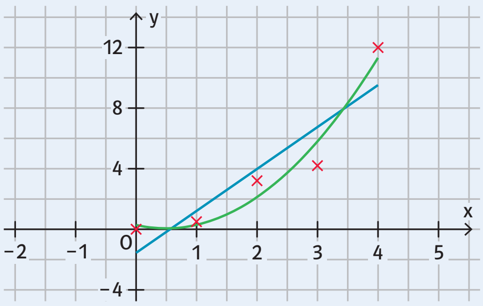
$$(mx_1 + b - y_1)^2 + (mx_2 + b - y_2)^2 + \ldots + (mx_n + b - y_n)^2$$

am kleinsten ist.
Diese Gerade heißt **Ausgleichsgerade** oder **Regressionsgerade**.

Mit Tabellenkalkulationsprogrammen und entsprechend ausgestatteten Taschenrechnern kann man für eine Punktwolke neben einer linearen Regression die Punktwolke auch durch Graphen anderer Funktionstypen annähern.

Der **Korrelationskoeffizient** r oder das **Bestimmtheitsmaß** r^2 ist ein Maß für die Passgenauigkeit einer Regression.
Für $|r| = 1$ liegen alle Punkte der Punktwolke auf dem Graphen.
Für $|r| \geq 0{,}8$ spricht man von hoher Korrelation. Die Punkte streuen wenig.
Für $0{,}3 \leq |r| \leq 0{,}8$ spricht man von schwacher Korrelation. Die Punkte streuen stark.
Ist $|r| < 0{,}3$, dann korreliert die Regression nicht mit den Punkten.

Gegeben ist die Punktwolke
$(0|0)$; $(1|0{,}5)$; $(2|3{,}2)$; $(3|4{,}2)$; $(4|12)$



Die Regressionsgerade hat die Gleichung
$y = 2{,}77x - 1{,}56$.

Der Korrelationskoeffizient beträgt 0,91, d.h. die Punkte streuen wenig.

Eine quadratische Regression ergibt mit derselben Punktwolke die Gleichung
$y = 0{,}92x^2 - 0{,}92x + 0{,}28$ mit dem Korrelationskoeffizienten 0,98. D.h., die Werte korrelieren besser mit einer quadratischen Regression.

Seite aus: Lambacher Schweizer
Qualifikationsphase Hessen Analysis
ISBN: 978-3-12-735741-7