Terme und Gleichungen (zu den Grundwissenaufgaben in Kapitel I)

Terme umformen (Aufgaben 1 und 2)
Terme kann man mithilfe der folgenden Rechenregeln vereinfachen.

Kommutativgesetze

$a + b = b + a$	(KG +)
$a \cdot b = b \cdot a$	(KG ·)

Assoziativgesetze

$a + (b + c) = a + (b + c)$	(AG +)
$a \cdot (b \cdot c) = a \cdot (b \cdot c)$	(AG ·)

Distributivgesetz

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	(DG)

Binomische Formeln (Aufgabe 2)

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(4 - x)^2 = 16 - 8x + x^2$
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$	$(x + 7)(x - 7) = x^2 - 49$

Lineare Gleichungen (Aufgabe 3)
Lineare Gleichungen löst man durch Äquivalenzumformungen:
- Auf beiden Seiten die Terme umformen.
- Auf beiden Seiten dieselbe Zahl oder denselben Term addieren oder subtrahieren.
- Beide Seiten mit derselben Zahl (ungleich 0) multiplizieren oder durch dieselbe Zahl (ungleich 0) dividieren.

$$\begin{aligned} & -7x - 15 = 13 && \mid +15 \\ \Leftrightarrow\ & -7x = 28 && \mid :(-7) \\ \Leftrightarrow\ & x = -4 \end{aligned}$$

Lösung: $x = -4$.

Satz vom Nullprodukt (Aufgabe 4)
Ein Produkt ist genau dann gleich null, wenn einer der Faktoren null ist.

$$\begin{aligned} & 3x^2 - 5x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x \cdot (3x - 5) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x = 0 \text{ oder } 3x - 5 = 0 \end{aligned}$$

Lösungen: $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{5}{3}$.

Quadratische Gleichungen (Aufgabe 5)
Lösungen der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ sind
$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

$2x^2 + 7x - 4 = 0$

$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 32}}{4} = \frac{-7 \pm 9}{4}$

Lösungen: $x_1 = \frac{1}{2}$ und $x_2 = -4$.

Grundwissen Test

Lösungen | Seite 399

1 Vereinfachen Sie.
a) $5x - 3 + x - 7$
b) $5(2x - 3) - (6 - x)$
c) $(3 + x) \cdot (2x - 1) + 3x - 2x^2$
d) $x^2 - 3 \cdot (2 - 3x) + 6$
e) $\frac{4 + 6x}{2}$
f) $\frac{x - 2}{4x - 8}$ $(x \neq 2)$

2 Vereinfachen Sie mithilfe einer binomischen Formel.
a) $(x + 2)^2 - 3x - 5$
b) $6a^2 + (2a - 7)^2$
c) $(3x - 6) \cdot (3x + 6) - 20$
d) $\frac{x^2 - 10x + 25}{x - 5}$ $(x \neq 5)$
e) $\frac{u^2 - 9}{u - 3}$ $(u \neq 3)$
f) $\frac{121 + 9z^2 - 66z}{3z - 11}$ $\left(z \neq \frac{11}{3}\right)$
g) $\frac{x^2 - 169}{x + 13}$ $(x \neq -13)$
h) $\frac{a^2 + 10a + 25}{a^2 - 25}$ $(a \neq \pm 5)$

3 Lösen Sie die Gleichung.
a) $3x - 11 = 4$
b) $1 = -3x - 5$
c) $\frac{2}{3}x + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$
d) $2x - 5 = 3x - 4$
e) $10 + 3x = 5 \cdot (2 - x)$
f) $5 \cdot (2x - 3) = 3 \cdot (2 + x)$
g) $x^2 + 7 + 8x = 3 + x^2$
h) $(2x + 1)^2 = 4 \cdot (x^2 - 1)$

4 Lösen Sie die Gleichung.
a) $x \cdot (x - 3) = 0$
b) $2x^2 + 8x = 0$
c) $15x - 5x^2 = 0$
d) $(2x - 12) \cdot (x + 7) = 0$
e) $4x \cdot (x^2 - 9) = 0$
f) $(3x - 21) \cdot (x^2 + 2) = 0$
g) $2x^2 - x = 3x$
h) $(x^2 - 5) \cdot (x^2 - x) = 0$

5 Lösen Sie die Gleichung.
a) $x^2 + 3x - 10 = 0$
b) $3x = 28 - x^2$
c) $5x^2 + 5 = x^2 + 12x$
d) $2x^2 = 6x - 10$
e) $2x^2 + 12x = -16$
f) $x \cdot (2x + 15) = 7 \cdot (x + 6)$
g) $11x^2 - 4x = -3x^3$
h) $(3x - 4) \cdot (8x^2 - 2x) = 0$

Seite aus: Lambacher Schweizer Baden-Württemberg 10
ISBN: 978-3-12-735310-5

Substitution (Aufgabe 6)
Aus einer biquadratischen Gleichung
$a x^4 + b x^2 + c = 0$ entsteht durch die Substitution
$u = x^2$ eine quadratische Gleichung
$a u^2 + b u + c = 0$.
Diese kann man wie auf Seite 302 gezeigt lösen.
Ist $u_1 \geq 0$ eine Lösung dieser Gleichung, so sind
$x_1 = -\sqrt{u_1}$ und $x_2 = \sqrt{u_1}$ Lösungen der biquadratischen Gleichung.

$2x^4 + 6x^2 - 20 = 0$
Substitution: $u = x^2$
$2u^2 + 6u - 20 = 0$
$u_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 160}}{4} = \frac{-6 \pm 14}{4}$
$u_1 = -5$ und $u_2 = 2$
Lösungen: $x_1 = -\sqrt{2}$ und $x_2 = \sqrt{2}$.

Logarithmus (Aufgabe 7)
$\log_b(a)$ ist diejenige Zahl, mit der man b potenzieren muss, um a zu erhalten: $b^x = a \Leftrightarrow \log_b(a) = x$
$(a, b > 0;\ b \neq 1)$.

$\log_2(16) = 4$ $\qquad \log_5\left(\frac{1}{25}\right) = -2$ $\qquad \log(10\,000) = 4$

Exponentialgleichungen (Aufgabe 8)
$b^x = a$ hat die Lösung $x_1 = \log_b(a) = \frac{\log(a)}{\log(b)}$.

$$
\begin{aligned}
& 2 \cdot 3^x - 8 = 17 - 3^{x+1} \\
\Leftrightarrow\ & 2 \cdot 3^x = 25 - 3 \cdot 3^x \\
\Leftrightarrow\ & 5 \cdot 3^x = 25 \\
\Leftrightarrow\ & 3^x = 5
\end{aligned}
$$

Lösung: $x_1 = \log_3(5) \approx 1{,}465$.

Grundwissen Test Lösungen | Seite 399

6 Lösen Sie die Gleichung.
a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$
b) $x^4 = 6x^2 + 27$
c) $11x^2 + 20 = 3x^4$
d) $x^4 + 20 = 9x^2$
e) $2x^6 = 18x^3 - 16$
f) $x^6 + 2x^3 = 35$

7 Vereinfachen Sie.
a) $\log_8(64)$
b) $\log_3(81)$
c) $\log_3\left(\frac{1}{27}\right)$
d) $\log_5(\sqrt{5})$
e) $\log_{10}(1\,000\,000)$
f) $\log_{10}(0{,}000\,000\,1)$

8 Lösen Sie die Gleichung.
a) $2^x + 4 = 12$
b) $12 - 3^{2x} = -69$
c) $3 \cdot 2^{2x} + 2 = 50$
d) $6 \cdot 2^x = 50 + 2^x$
e) $2^{2x} = 32$
f) $3^{2x} - 6 \cdot 3^x = 27$

Seite aus: Lambacher Schweizer
Baden-Württemberg 10
ISBN: 978-3-12-735310-5