2 Rechnen

Grundbegriffe

Rechenart	Rechenzeichen	Name des Ergebnisses	Name der einzelnen Terme
Addition	$a + b$	Summe	a, b: Summanden
Subtraktion	$a - b$	Differenz	a: Minuend, b: Subtrahend
Multiplikation	$a \cdot b$	Produkt	a, b: Faktoren
Division	$a : b = \frac{a}{b}$	Quotient	a: Dividend, b: Divisor a: Zähler, b: Nenner
Potenzieren	a^n	Potenz	a: Basis (Grundzahl) n: Exponent (Hochzahl)
Wurzel ziehen	$\sqrt{a}$	Wurzel	a: Radikand

Rechnen mit Klammern

Auflösen von Klammern

$a + (b + c) = a + b + c$
$a + (b - c) = a + b - c$
$a - (b + c) = a - b - c$
$a - (b - c) = a - b + c$

Beispiele

$23 + (-13 + 7) = 23 - 13 + 7 = 17$
$44 + (-13 - 17) = 44 - 13 - 17 = 14$
$56 - (-49 + 11) = 56 + 49 - 11 = 94$
$79 - (-45 - 23) = 79 + 45 + 23 = 147$

Eine **Plusklammer** löst man auf, indem man das Pluszeichen vor der Klammer und die Klammer weglässt.
Eine **Minusklammer** löst man auf, indem man bei den Termen in der Klammer die Pluszeichen zu Minuszeichen und die Minuszeichen zu Pluszeichen ändert und das Minuszeichen vor der Klammer sowie die Klammer weglässt.

Ausmultiplizieren

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ $\quad$ $6 \cdot 17 = 6 \cdot (10 + 7) = 6 \cdot 10 + 6 \cdot 7 = 60 + 42 = 102$

$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$ $\quad$ $23 \cdot 9 = 23 \cdot (10 - 1) = 23 \cdot 10 - 23 \cdot 1 = 230 - 23 = 207$

$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$ $\quad$ $(10 + 7) \cdot (30 + 4) = 10 \cdot 30 + 10 \cdot 4 + 7 \cdot 30 + 7 \cdot 4 = 578$

Sind mehrere Klammern ineinander geschachtelt, so löst man die Klammern von innen nach außen auf.

Ausklammern

$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$ $\quad$ $0{,}5 \cdot 6 + 0{,}5 \cdot 8 = 0{,}5 \cdot (6 + 8) = 7$
$a \cdot b - a \cdot c = a \cdot (b - c)$ $\quad$ $9 \cdot 8 - 9 \cdot 28 = 9 \cdot (8 - 28) = 9 \cdot (-20) = -180$

Binomische Formeln

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $\quad$ $(x + 2y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 2y + (2y)^2 = x^2 + 4xy + 4y^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $\quad$ $(5 - 3c)^2 = 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3c + (3c)^2 = 25 - 30c + 9c^2$

$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$ $\quad$ $81 \cdot 79 = (80 + 1) \cdot (80 - 1) = 6400 - 1 = 6399$

Die binomischen Formeln werden sowohl „von links nach rechts“ als auch „von rechts nach links“ verwendet.

Zerlegung nach Vieta

$(x + a) \cdot (x + b) = x^2 + \underbrace{(a + b)}_{p} \cdot x + \underbrace{a \cdot b}_{q}$

Wenn $x^2 + p \cdot x + q$ in das Produkt zweier Klammern $(x + a) \cdot (x + b)$ zerlegt werden kann, dann gilt: $a + b = p$ und $a \cdot b = q$.

$(x + 3) \cdot (x + 4) = x^2 + 7 \cdot x + 12$

$p = 3 + 4$ $\quad$ $q = 3 \cdot 4$

Man beginnt am besten damit, das Absolutglied q in zwei Faktoren zu zerlegen. Diese müssen als Summe den Vorfaktor p ergeben.

Basiswissen

Aufgaben

1 Lösen Sie die Klammern auf und fassen Sie möglichst weit zusammen.

a) $4a - 2b - (3a + b)$
b) $2(x - 4y) - 3(6x - 3y)$
c) $-3(u + 4) + 2(u - 5) - (2 - 6u)$
d) $5a(2a - 3) - 4a^2$
e) $3a(4 - 2(4a - 3b)) - 5(-a(b - 3a) - 2a)$
f) $3(-5(v - u) + 4u(4 - 2v)) - 4u(-3(u + 2v))$

2 Multiplizieren Sie die Klammern aus und fassen Sie zusammen.

a) $-6a(2a - 3b) + 5a^2 - 8a(b - 3a)$
b) $4x(-2x + 7y) - 10(x^2 + 4x) - 7x(-3x + 4y - 7)$

3 Klammern Sie aus und stellen Sie den Term als Produkt dar

a) $x^2 + 5x$
b) $9x^2 - 3xy + 6xz$
c) $12a^2u^2 + 6au + 2u - 8u^2$
d) $\frac{3}{4}uv^2 - \frac{1}{4}u^2v$

4 Formen Sie mithilfe der binomischen Formeln um.

a) $(3a + 7b)^2$
b) $(9x - 5y)^2$
c) $(-2u + 5v)(-2u - 5v)$
d) $9x^2 - 12xy + 4y^2$
e) $144m^2 + 24m + 1$
f) $16u^2v^2 - 81w^2$
g) $(-x^2 - 2y)(-x^2 + 2y)$
h) $49r^2s^2 - 28rst + 4t^2$

5 Ergänzen Sie die fehlenden Terme, sodass sich eine binomische Formel ergibt.

a) $(\blacktriangle + \blacksquare)^2 = 9x^2 + \bullet + 16y^2$
b) $(6a^2 - \blacktriangle)^2 = \blacksquare - 24a^2b + \bullet$
c) $(\blacktriangle + 5s)^2 = \frac{r^2}{4} + \blacksquare + \bullet$
d) $(\blacktriangle - \blacksquare)^2 = \bullet - xy^2 + \frac{y^4}{16}$
e) $\left(\frac{a}{3} + \blacktriangle\right)^2 = \blacksquare + \bullet + 81$
f) $(-4x - \blacktriangle)^2 = \blacksquare - 16x + \bullet$

6 Faktorisieren Sie mithilfe der Zerlegung nach Vieta.

a) $a^2 + 9a + 14$
b) $x^2 - 6x + 5$
c) $u^2 - u - 12$
d) $x^2 + 6ax + 8a^2$
e) $2x^2 - 20x + 18$
f) $ax^2 + 4abx + 3ab^2$
g) $-y^2 + 5y - 6$
h) $a^2x^2 + 8ax + 12$

Rechnen mit Brüchen

Erweitern

$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k}$ mit $k \neq 0$

Beispiele

$\frac{3}{4}$ erweitert mit 5 ergibt $\frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{15}{20}$.

Kürzen

$\frac{a}{b} = \frac{a:k}{b:k}$ mit $k \neq 0$

$\frac{24}{56}$ gekürzt mit 8 ergibt $\frac{24:8}{56:8} = \frac{3}{7}$.

Addition und Subtraktion bei gleichen Nennern

$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$

$\frac{4}{9} + \frac{11}{9} = \frac{4 + 11}{9} = \frac{15}{9}$; $\frac{4}{9} - \frac{11}{9} = \frac{4 - 11}{9} = -\frac{7}{9}$

Addition und Subtraktion bei verschiedenen Nennern

$c \cdot d$ ist der einfachste, aber nicht immer der kleinste Nenner.

$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{d} = \frac{a \cdot d}{c \cdot d} \pm \frac{b \cdot c}{d \cdot c} = \frac{a \cdot c \pm b \cdot c}{c \cdot d}$

$\frac{4}{9} + \frac{11}{4} = \frac{4 \cdot 4}{9 \cdot 4} + \frac{11 \cdot 9}{4 \cdot 9} = \frac{4 \cdot 4 + 11 \cdot 9}{9 \cdot 4} = \frac{115}{36}$

$\frac{4}{9} - \frac{11}{4} = \frac{4 \cdot 4}{9 \cdot 4} - \frac{11 \cdot 9}{4 \cdot 9} = \frac{4 \cdot 4 - 11 \cdot 9}{9 \cdot 4} = -\frac{83}{36}$

Multiplikation

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

$\frac{4}{3} \cdot \frac{9}{5} = \frac{4 \cdot 9}{3 \cdot 5} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 5} = \frac{12}{5}$

Division

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

$\frac{-4}{3} : \frac{8}{5} = \frac{-4}{3} \cdot \frac{5}{8} = \frac{-4 \cdot 5}{3 \cdot 8} = \frac{-5}{3 \cdot 2} = -\frac{5}{6}$