

Aufgabe: Schnittmenge zweier Ebenen

Lösungsvorschlag:

Man gibt die Gleichungen von e1 und den Vektorterm von e2 ein.

Die Gleichung der Ebene E_2 ist äquivalent zu der Vektor-Nullgleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung wird erzeugt und mit Drag&Drop in die vorbereitete geschweifte Klammer für Gleichungssysteme gezogen. Als vierte Gleichung wird e2 eingegeben.

Man erhält x , y und z in Abhängigkeit des Parameters t .

Die Lösung kann vektoriell in folgender Form geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Daran sieht man, dass die Schnittmenge eine Gerade ist.

3x-4y+z=1 → e1

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow e2$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - e2$$

$$\begin{cases} x-t-1 \\ y-3 \cdot s+t-2 \\ z-2 \cdot s+t-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-t-1 \\ y-3 \cdot s+t-2 \\ z-2 \cdot s+t-1 \end{cases} \quad \begin{matrix} x, y, z, s \\ x=t+1, y=\frac{8 \cdot t+5}{10}, z=\frac{t}{5}, s=\frac{t}{5} \end{matrix}$$

Algeb Standard Real Bog

Alternativ kann man auch die Ebene E_2 auf Koordinatenform bringen und die beiden Koordinatengleichungen nach y und z auflösen.

Die Lösung kann man vektoriell in folgender Form schreiben:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{10} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Auch hier erhält man als Schnittmenge eine Gerade.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - e2$$

$$\begin{cases} x-t-1 \\ y-3 \cdot s+t-2 \\ z-2 \cdot s+t-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-t-1 \\ y-3 \cdot s+t-2 \\ z-2 \cdot s+t-1 \end{cases} \quad \begin{matrix} s, t, x \\ t=2 \cdot y-3 \cdot z-1, x=2 \cdot y-3 \cdot z \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x=2 \cdot y-3 \cdot z \\ e1 \end{cases} \quad \begin{matrix} y, z \\ \left\{ y=\frac{8 \cdot x-3}{10}, z=\frac{x-1}{5} \right\} \end{matrix}$$

Algeb Standard Real Bog

Aufgabe: Schnittmenge zweier Ebenen

Die beiden Lösungen haben den gleichen Richtungsvektor.

Es wird nun überprüft, ob es sich um die gleichen Geraden handelt.

Dazu genügt es nachzuweisen, dass der Punkt $P\left(1 \mid \frac{1}{2} \mid 0\right)$ auf der

$$\text{Geraden } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{10} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} \text{ liegt.}$$

(Auch ohne CAS sieht man, dass für $x = 1$ die Geradengleichung den Punkt P liefert.)

