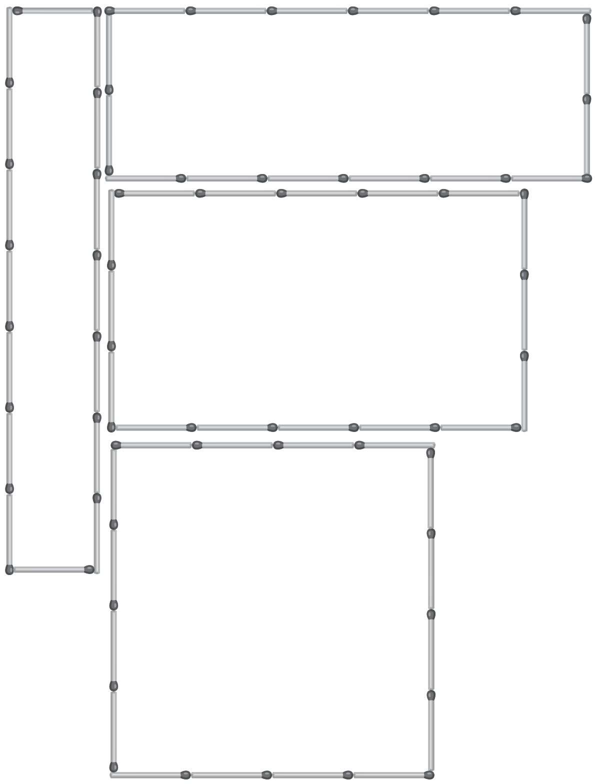
VII Untersuchung von Funktionen

VII Optimieren, Seite 215 a

Einstiegsaufgabe

→ mögliche Rechtecke sind:



→

u (in LE)	v (in LE)	2u + 2v	Flächeninhalt
7	1	16	7
6	2	16	12
5	3	16	15
4	4	16	16
3	5	16	15
2	6	16	12
1	7	16	7

Das Quadrat mit 4 Streichhölzern als Seitenlänge hat den größten Flächeninhalt.

Beachten Sie $u \cdot v = v \cdot u$.

Seite 215 e

1 a) Der Flächeninhalt A vom Dreieck RPQ beträgt $A = \frac{1}{2} \cdot \overline{RP} \cdot \overline{PQ}$.

$u = 0{,}5$: $A = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0{,}5 \cdot f(0{,}5)$ d.h. $A = 1{,}875$.

$u = 1{,}5$: $A = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1{,}5 \cdot f(1{,}5)$ d.h. $A = 2{,}625$.

b) $\boxed{1}$ Zielgröße ist der Flächeninhalt des Dreiecks RPQ $A = \frac{1}{2} \cdot \overline{RP} \cdot \overline{PQ}$.

$\boxed{2}$ Nebenbedingungen sind $\overline{RP} = 2u$ und $\overline{PQ} = f(u)$.

$\boxed{3}$ Zielfunktion ist $A(u) = \frac{1}{2} \cdot 2u \cdot f(u)$ d.h. $A(u) = -u^3 + 4u$.

Definitionsmenge von A: $0 \leqq u \leqq 2$.

$\boxed{4}$ Extremwerte von A bestimmen:

$A'(u) = -3u^2 + 4$; $A''(u) = -6u$

$A'(u) = 0$ d.h. $-3u^2 + 4 = 0$.

Die Gleichung hat die Lösungen

$u_1 = -\frac{2}{3}\sqrt{3} \approx -1{,}15$ und $u_2 = \frac{2}{3}\sqrt{3} \approx 1{,}15$.

$\sqrt{\frac{4}{3}} = 2\sqrt{\frac{1}{3}} = 2\sqrt{\frac{3}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

Nur u_2 liegt in der Definitionsmenge von A(u).

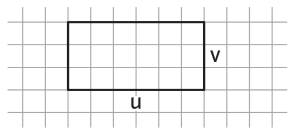
Wegen $A''(u_2) = A''\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = -4\sqrt{3} \approx -6{,}92 < 0$ hat A an der Stelle u_2 ein lokales Maximum.

Randwerte sind $A(0) = 0$ und $A(2) = 0$.

Somit hat A an der Stelle $u_2 = \frac{2}{3}\sqrt{3} \approx 1{,}15$ ein absolutes Maximum.

$\boxed{5}$ Der maximale Flächeninhalt beträgt $A(u_2) = A\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = \frac{16}{9}\sqrt{3} \approx 3{,}08$.

2 a) Skizze:



$\boxed{1}$ Zielgröße ist der Flächeninhalt des Rechtecks d.h. $A = u \cdot v$.

$\boxed{2}$ Nebenbedingung: Umfang $2u + 2v = 50$

Die Länge vom Drahtzaun entspricht dem Umfang.

$\boxed{3}$ Zielfunktion:

Aus der Gleichung der Nebenbedingung ergibt sich $v = 25 - u$.

Also ist $A(u) = u \cdot (25 - u)$ d.h.

$A(u) = -u^2 + 25u$.

Definitionsmenge von A: $0 \leqq u \leqq 25$

Manchmal ist es geschickter, die Definitionsmenge erst im Schritt $\boxed{3}$ festzulegen.

$\boxed{4}$ Extremwerte von A bestimmen:

$A'(u) = -2u + 25$ und $A''(u) = -2$.

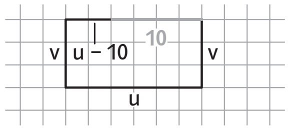
$A'(u) = 0$ d.h. $-2u + 25 = 0$ hat die Lösung $u_1 = 12{,}5$.

Wegen $A''(u_1) = A''(12{,}5) = -2 < 0$ hat A an der Stelle u_1 ein lokales Maximum. Die Randwerte sind $A(0) = 0$ und $A(25) = 0$. Somit hat A an der Stelle $u_1 = 12{,}5$ ein absolutes Maximum.

$\boxed{5}$ Das flächengrößte Rechteck ist somit ein Quadrat mit der Seitenlänge 12,5 m. Der maximale Flächeninhalt beträgt 156,25 m^2.

Quellen:
Grafik: Imprint, Zusmarshausen

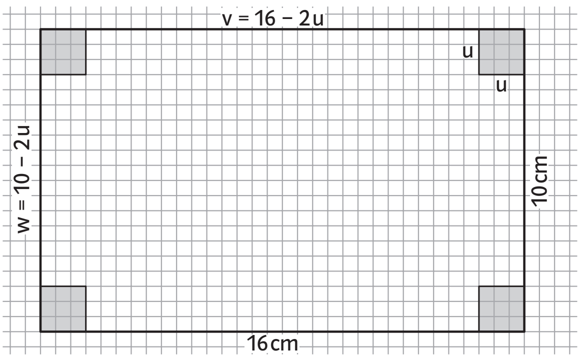
Seite aus: Lambacher Schweizer
ISBN-13: 978-3-12-732000-8
ISBN-13: 978-3-12-732006-0

b) 

1 Zielgröße ist der Flächeninhalt des Rechtecks $A = u \cdot v$.
2 Nebenbedingung:
Umfang $u + (u - 10) + 2v = 50$
d.h. $2u + 2v = 60$.
3 Zielfunktion:
Aus der Nebenbedingung ergibt sich $v = 30 - u$.
Also ist $A(u) = u \cdot (30 - u)$ d.h.
$A(u) = -u^2 + 30u$
Definitionsmenge von A: $0 \leqq u \leqq 30$.
4 Extremwerte von A bestimmen:
$A'(u) = -2u + 30$; $A''(u) = -2$
$A'(u) = 0$ d.h. $-2u + 30 = 0$ hat die Lösung $u_1 = 15$.
Wegen $A''(u_1) = A''(15) = -2 < 0$ hat A an der Stelle u_1 ein lokales Maximum.
Die Randwerte sind $A(0) = 0$ und $A(30) = 0$.
Somit hat A an der Stelle $u_1 = 15$ ein absolutes Maximum.
5 Das flächengrößte Rechteck hat die Seitenlängen $u = 15\,\text{m}$ und $v = 15\,\text{m}$ und ist somit ein Quadrat. Der maximale Flächeninhalt beträgt $225\,\text{m}^2$.

Jedes Quadrat ist auch ein Rechteck.

3 a) Skizze:



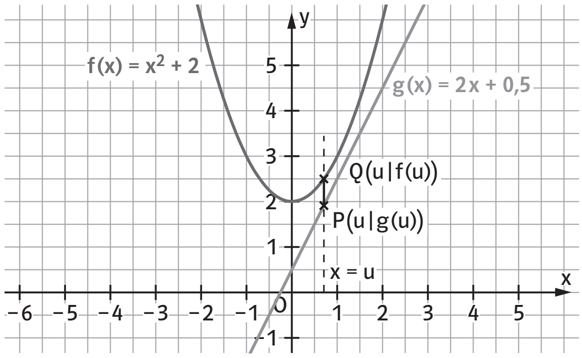
u = 1 cm:
$V = (16 - 2) \cdot (10 - 2) \cdot 1\,\text{cm}^3$ d.h. $V = 112\,\text{cm}^3$
u = 2 cm:
$V = (16 - 4) \cdot (10 - 4) \cdot 2\,\text{cm}^3$ d.h. $V = 144\,\text{cm}^3$
u = 3 cm:
$V = (16 - 6) \cdot (10 - 6) \cdot 3\,\text{cm}^3$ d.h. $V = 120\,\text{cm}^3$
u = 4 cm:
$V = (16 - 8) \cdot (10 - 8) \cdot 4\,\text{cm}^3$ d.h. $V = 64\,\text{cm}^3$
u = 5 cm:
$V = (16 - 10) \cdot (10 - 10) \cdot 5\,\text{cm}^3$ d.h. $V = 0\,\text{cm}^3$

b) 1 Zielgröße: Volumen $V = u \cdot v \cdot w$
2 Nebenbedingungen:
$v = 16 - 2u$ und $w = 10 - 2u$

Die Variablen v und w werden mithilfe der Variablen u beschrieben, dadurch hat man in der Gleichung für das Volumen nur die Variable u.

3 Zielfunktion:
Aus den Nebenbedingungen ergibt sich
$V(u) = u \cdot (16 - 2u) \cdot (10 - 2u)$ d.h.
$V(u) = 4u^3 - 52u^2 + 160u$.
Die Definitionsmenge von V ergibt sich daraus, dass die kürzere Seite der Grundfläche der Schachtel $10 - 2u$ ist; die Definitionsmenge ist also $0 \leqq u \leqq 5$.
4 Extremwerte von V bestimmen:
$V'(u) = 12u^2 - 104u + 160$; $V''(u) = 24u - 104$
$V'(u) = 0$ d.h. $12u^2 - 104u + 160 = 0$ hat die Lösungen $u_1 = 2$ und $u_2 = \frac{20}{3} \approx 6{,}66$. Wegen $u_2 > 5$ liegt u_2 nicht in der Definitionsmenge.
Wegen $V''(u_1) = V''(2) = -56 < 0$ hat V an der Stelle u_1 ein lokales Maximum.
Randwerte sind $V(0) = 0$ und $V(5) = 0$.
Somit hat die Funktion V an der Stelle $u_1 = 2$ ein absolutes Maximum.
5 Die optimale Schachtel hat die Maße
$u = 2\,\text{cm}$, $v = 12\,\text{cm}$ und $w = 6\,\text{cm}$.
$V = 2 \cdot 12 \cdot 6 = 144$
Das maximale Volumen beträgt $144\,\text{cm}^3$.

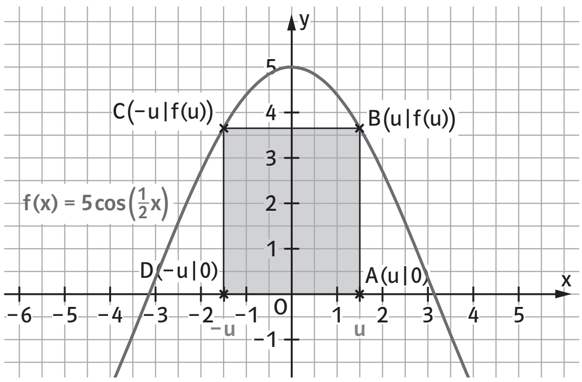
4 a)



b) 1 Zielgröße: Abstand $d = \overline{PQ}$
2 Nebenbedingung: die Koordinaten von P sind $P(u \mid g(u))$ und die von Q sind $Q(u \mid f(u))$.
3 Zielfunktion:
$d(u) = f(u) - g(u)$ d.h. $d(u) = u^2 - 2u + 1{,}5$
Definitionsmenge: $-1 \leqq u \leqq 2$.
4 Extremwerte von d:
$d'(u) = 2u - 2$; $d''(u) = 2$
Die Gleichung $d'(u) = 0$ d.h. $2u - 2 = 0$ hat die Lösung $u_1 = 1$. Wegen $d''(u_1) = d''(1) = 2 > 0$, hat d an dieser Stelle ein Minimum. Da das Schaubild der Funktion d eine nach oben geöffnete Parabel ist, handelt es sich hier um ein absolutes Minimum.
5 Die Funktion d hat an der Stelle 1 ein absolutes Minimum. Die minimale Länge der Strecke $\overline{PQ}$ beträgt 0,5 LE.

Quellen:
Grafik: Imprint, Zusmarshausen
Seite aus: Lambacher Schweizer
ISBN-13: 978-3-12-732000-8
ISBN-13: 978-3-12-732006-0

5 a)



b) $\boxed{1}$ Zielgröße: Umfang $U = 2\overline{DA} + 2\overline{AB}$

$\boxed{2}$ Nebenbedingungen: $\overline{DA} = 2u$; $\overline{AB} = f(u)$

$\boxed{3}$ Zielfunktion:

$U(u) = 2 \cdot 2u + 2f(u)$ d.h.

$U(u) = 4u + 10 \cdot \cos\left(\frac{1}{2}u\right)$

Die Definitionsmenge ist das Intervall $I = [0; \pi]$.

$\boxed{4}$ Extremwerte von U bestimmen:

$U'(u) = 4 - 5\sin\left(\frac{1}{2}u\right)$; $U''(u) = -\frac{5}{2}\cos\left(\frac{1}{2}u\right)$

$U'(u) = 0$ d.h. $\sin\left(\frac{1}{2}u\right) = \frac{4}{5}$ hat im Intervall $I = [0; \pi]$ die Lösung $u_1 \approx 1{,}85$.

Wegen $U''(u_1) = -1{,}5 < 0$ hat U an der Stelle u_1 ein lokales Maximum; es ist $U(u_1) = U(1{,}85) \approx 13{,}42$.

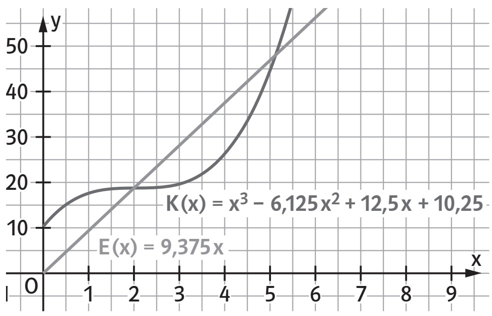
Randwerte sind $U(0) = 10$ und $U(\pi) = 4\pi \approx 12{,}57$.

Somit hat U an der Stelle $u_1 \approx 1{,}85$ ein absolutes Maximum.

$\boxed{5}$ Seitenlängen dieses umfanggrößten Rechtecks sind $\overline{DA} \approx 3{,}7$ und $\overline{AB} \approx 3{,}01$.

Seite 215 f

6 a) Erlösfunktion $E(x) = 9{,}375 \cdot x$.



b) Gewinnfunktion G mit $G(x) = E(x) - K(x)$ d.h. $G(x) = -x^3 + 6{,}125x^2 - 3{,}125x - 10{,}25$.

Definitionsmenge ist $I = [0; 6]$.

Extremwert von G bestimmen:

$G'(x) = -3x^2 + 12{,}25x - 3{,}125$

$G''(x) = -6x + 12{,}25$

Die Gleichung $G'(x) = 0$ d.h. $-3x^2 + 12{,}25x - 3{,}125 = 0$ hat die Lösungen $x_1 \approx 0{,}27$ und $x_2 \approx 3{,}81$.

Es ist $G''(x_1) \approx 10{,}63 > 0$ und $G''(x_2) \approx -10{,}63 < 0$.

Somit hat G an der Stelle $x_2 \approx 3{,}81$ ein lokales Maximum.

An den Schaubildern der Funktionen E und K kann man erkennen, dass der Gewinn nur zwischen ca. 2 und ca. 5,2 positiv ist. Somit hat G an der Stelle $x_2 \approx 3{,}81$ ein absolutes Maximum. Der maximale Gewinn beträgt $G(3{,}81) \approx 11{,}45$ GE.

Gewinn entsteht, wenn der Erlös größer ist als die Kosten.

Haltepunkt, Seite 215 f

7 Die Schritte $\boxed{1}$ bis $\boxed{3}$ zusammengefasst:

Zielfunktion ist:

$d(u) = f(u) - g(u)$ d.h. $d(u) = e^u - 2u$

Definitionsmenge: $0 \leqq u \leqq 2$.

$\boxed{4}$ Extremwert von d:

$d'(u) = e^u - 2$ und $d''(u) = e^u$

Die Gleichung $d'(u) = 0$ d.h. $e^u = 2$ hat die Lösung $u_1 = \ln(2)$.

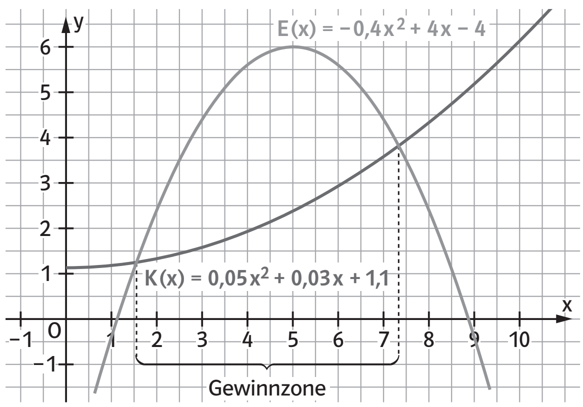
Wegen $d''(u_1) = d''(\ln(2)) = 2 > 0$ hat d an dieser Stelle ein Minimum. Es ist $d(u_1) = d(\ln(2)) = 2 - 2\ln(2) \approx 0{,}61$.

Randwerte sind $d(0) = 1$ und $d(2) = e^2 - 4 \approx 3{,}39$.

Somit hat d an der Stelle u_1 ein absolutes Minimum.

$\boxed{5}$ Die Funktion d hat an der Stelle $u_1 = \ln(2)$ ein absolutes Minimum. (Der geringste senkrechte Abstand zwischen den beiden Funktionen im Intervall I beträgt etwa 0,61 LE).

8 a)



b) Die Gleichung $K(x) = E(x)$ d.h. $0{,}05x^2 + 0{,}03x + 1{,}1 = -0{,}4x^2 + 4x - 4$ also $0{,}45x^2 - 3{,}97x + 5{,}1 = 0$ hat die Lösungen $x_1 \approx 1{,}56$ und $x_2 \approx 7{,}26$

Gewinnzone ist das Intervall $x_1 < x < x_2$ mit $x_1 \approx 1{,}56$ ME und $x_2 \approx 7{,}26$ ME.

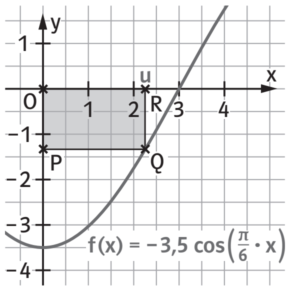
Quellen:
Grafik: Imprint, Zusmarshausen

Seite aus: Lambacher Schweizer
ISBN-13: 978-3-12-732000-8
ISBN-13: 978-3-12-732006-0

Im Bereich von 1,56 ME bis 7,26 ME Hundefutter wird Gewinn erzielt.

c) Gewinn G bestimmen:
$G(x) = E(x) - K(x)$ d.h.
$G(x) = -0{,}4x^2 + 4x - 4 - (0{,}05x^2 + 0{,}03x + 1{,}1)$
$G(x) = -0{,}45x^2 + 3{,}97x - 5{,}1$
maximalen Gewinn bestimmen:
$G'(x) = -0{,}9x + 3{,}97$ und $G''(x) = -0{,}9$
Die Gleichung $G'(x) = 0$ d.h. $-0{,}9x + 3{,}97 = 0$ hat die Lösung $x_3 \approx 4{,}41$. $G(x_3) \approx 3{,}66$
Da das Schaubild von G eine nach unten geöffnete Parabel ist, handelt es sich hier um ein absolutes Maximum.
Maximaler Gewinn ist 3,66 GE bei 4,41 ME Hundefutter.

9 a) Skizze



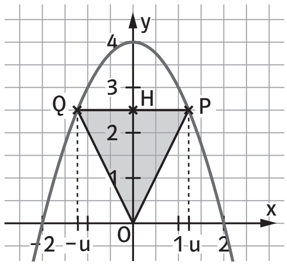
O(0 | 0)
P(0 | f(u))
Q(u | f(u))
R(u | 0)

$\boxed{1}$ Zielgröße: Umfang $U = 2\overline{OR} + 2\overline{RQ}$
$\boxed{2}$ Nebenbedingungen: $u = \overline{OR}$ und $\overline{RQ} = -f(u)$
$\boxed{3}$ Zielfunktion:
Aus den Nebenbedingungen ergibt sich
$U(u) = 2u + 7\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)$;
Definitionsmenge $I = [0; 3]$
$\boxed{4}$ Extremwerte von U bestimmen:
$U'(u) = 2 - 7\cdot\frac{\pi}{6}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)$ und
$U''(u) = -7\cdot\left(\frac{\pi}{6}\right)^2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)$
$U'(u) = 0$ d.h. $\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) = \frac{12}{7\pi}$ hat im Intervall $0 \leqq u \leqq 3$ die Lösung $u_1 \approx 1{,}1$.
Wegen $U''(u_1) \approx -1{,}61 < 0$ hat U an der Stelle u_1 ein lokales Maximum:
$U(u_1) \approx 8{,}07$.
Randwerte sind $U(0) = 7$ und $U(3) = 6$.
Somit hat die Funktion U an der Stelle $u_1 \approx 1{,}1$ ein absolutes Maximum.
$\boxed{5}$ Das Rechteck mit dem Seitenlängen $u_1 \approx 1{,}1$ und $-f(u_1) = -f(1{,}1) \approx 2{,}94$ hat maximalen Umfang $U \approx 8{,}08$.

b) Da die Funktion U nur ein Maximum im Intervall $I = [0; 3]$ hat, liegen mögliche Minima am Rand. Wie der Vergleich der obigen Randwerte zeigt, hat U an der Stelle $u = 3$ ein absolutes Minimum. Das Rechteck hätte die Seitenlängen 3 LE und ca. 0 LE und somit keinen Flächeninhalt.

10 individuelle Lösungen

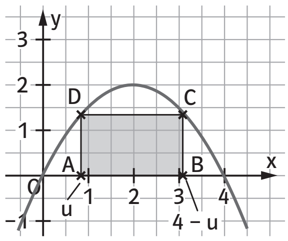
a) z. B. Flächeninhalt des Dreiecks



H(0 | f(−u))
O(0 | 0)
P(u | f(u))
Q(−u | f(−u))

$\boxed{1}$ Zielgröße: Flächeninhalt $A = \frac{1}{2}\overline{PQ}\cdot\overline{OH}$
$\boxed{2}$ Nebenbedingungen:
$\overline{PQ} = 2u$ und $f(-u) = f(u)$; $\overline{OH} = f(u)$
$\boxed{3}$ Zielfunktion:
Aus den Nebenbedingungen ergibt sich
$A(u) = \frac{1}{2}\cdot 2u\cdot f(u)$ d.h. $A(u) = -u^3 + 4u$.
Definitionsmenge: $0 \leqq u \leqq 2$.

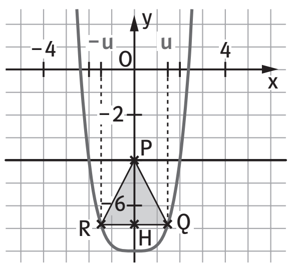
b) z. B. Flächeninhalt des Rechtecks



A(u | 0)
B(4 − u | 0)
C(4 − u | f(4 − u))
D(u | f(u))

$\boxed{1}$ Zielgröße: Flächeninhalt $A = \overline{AB}\cdot\overline{BC}$
$\boxed{2}$ Nebenbedingungen: $\overline{BC} = f(4 - u)$; $f(4 - u) = f(u)$
$\boxed{3}$ Zielfunktion:
Aus den Nebenbedingungen ergibt sich
$A(u) = (4 - 2u)\cdot f(u)$ d.h. $A(u) = u^3 - 6u^2 + 8u$.
Definitionsmenge $I = [0; 2]$

c) z. B. Flächeninhalt des Dreiecks



H(0 | f(u))
P(0 | −4)
Q(u | f(u))
R(−u | f(−u))

$\boxed{1}$ Zielgröße: Flächeninhalt $A = \frac{1}{2}\overline{RQ}\cdot\overline{PH}$
$\boxed{2}$ Nebenbedingungen:
$\overline{PH} = -f(u) - 4$ und $f(-u) = f(u)$; $\overline{RQ} = 2u$
$\boxed{3}$ Zielfunktion:
Aus den Nebenbedingungen ergibt sich
$A(u) = \frac{1}{2}\cdot 2u\cdot(-f(u) - 4)$ d.h.
$A(u) = -\frac{1}{4}u^5 + 4u$.
Definitionsmenge bestimmen d.h. die Schnittstellen des Schaubilds der Funktion f mit der Geraden $x = -4$ bestimmen.
$f(x) = -4$ d.h. $\frac{1}{4}x^4 - 8 = -4$.
Lösungen sind $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$.
Definitionsmenge: $0 \leqq u \leqq 2$.

Quellen:
Grafik: Imprint, Zusmarshausen
Seite aus: Lambacher Schweizer
ISBN-13: 978-3-12-732000-8
ISBN-13: 978-3-12-732006-0