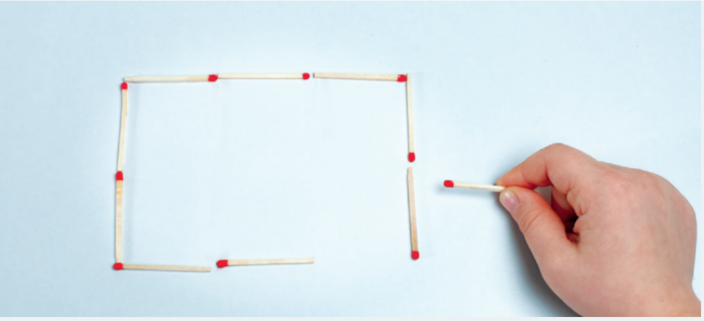
7 Optimieren



→ Legen Sie mit genau 16 Streichhölzern möglichst viele verschiedene Rechtecke. Ermitteln Sie jeweils den Flächeninhalt (1 LE = 1 Streichholzlänge).
→ Stellen Sie die Seitenlängen und den jeweiligen Flächeninhalt in einer Tabelle zusammen. Welches der Rechtecke hat den größten Flächeninhalt?

Bei wissenschaftlichen, technischen und wirtschaftlichen Anwendungen besteht die Aufgabe häufig darin, das Optimum einer bestimmten Größe zu bestimmen z. B. den kürzesten Weg, den geringsten Materialverbrauch oder den größten Gewinn. Die zu optimierende Größe wird **Zielgröße** genannt. Diese Aufgaben werden **Optimierungsaufgaben** genannt. Ist ein kleinster Wert gesucht, spricht man von einem **Minimumproblem**. Ist ein größter Wert gesucht, spricht man von einem **Maximumproblem**. Häufig ist der zugehörige Funktionsterm zunächst unbekannt und muss erst anhand der Problemstellung ermittelt werden.

Von dieser Funktion werden also Extremstellen und Extremwerte ermittelt. Liegt ein Schaubild der Funktion vor, so können diese Stellen und Werte am Schaubild abgelesen werden. Oft verwendet man zum Berechnen die Methoden der Differenzialrechnung d. h. man ermittelt die 1. Ableitung und die 2. Ableitung der Funktion. Mithilfe der 1. Ableitung bestimmt man mögliche Extremstellen, mithilfe der 2. Ableitung untersucht man, ob ein Maximum oder ein Minimum vorlegt.

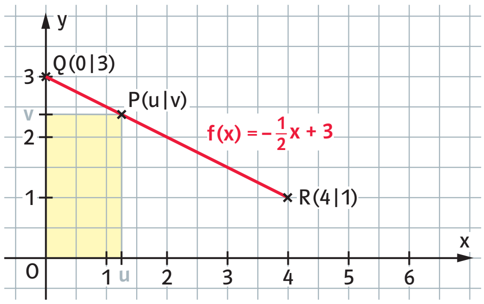
Ist die Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$, so betrachtet man auch das Verhalten für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$.

Ist der Definitionsbereich der zu untersuchenden Funktion ein Intervall [a; b], so müssen auch die Funktionswerte an den Rändern a und b des Intervalls betrachtet werden, um entscheiden zu können, an welcher Stelle das absolute Maximum bzw. das absolute Minimum angenommen wird.

Durch den Punkt P(u | v) auf der Geraden, die durch Q und R geht, wird ein Rechteck mit den Seitenlängen u und v festgelegt. Der Flächeninhalt dieses Rechtecks hängt davon ab, wie man u wählt.
Ist z. B. $u = 1$, dann beträgt er $A = 1 \cdot 2{,}5 = 2{,}5$;
ist z. B. $u = 2$, dann beträgt er $A = 2 \cdot 2 = 4$.
Wie muss man u wählen, damit der Flächeninhalt dieses Rechtecks möglichst groß ist?

$\boxed{1}$ Der Flächeninhalt A des Rechtecks ist die Zielgröße. Für diesen gilt $A = u \cdot v$.

$\boxed{2}$ A hängt von den Variablen u und v ab. Diese Variablen sind nicht unabhängig voneinander. P liegt auf der Geraden durch Q und R, also gilt die **Nebenbedingung** $v = -\frac{1}{2}u + 3,\ 0 \leqq u \leqq 4$ ist die Definitionsmenge.



Quellen: Nitsche, Katje, Hamburg; Grafik: Imprint, Zusmarshausen

Seite aus: Lambacher Schweizer
ISBN-13: 978-3-12-732000-8
ISBN-13: 978-3-12-732006-0

Man stellt eine Gleichung $A(u) = \ldots$ auf, wenn die Nebenbedingung $v = \ldots$ lautet oder man stellt eine Gleichung $A(v) = \ldots$ auf, wenn die Nebenbedingung $u = \ldots$ lautet, dabei wird eine Variable eliminiert.

3 Setzt man die Nebenbedingung 2 in 1 ein, so erhält man für den Flächeninhalt A die sogenannte **Zielfunktion**: $A(u) = u \cdot v$ | einsetzen $v = -\frac{1}{2}u + 3$

Die Variable v „verschwindet“: $A(u) = u \cdot \left(-\frac{1}{2}u + 3\right)$ d.h.

$A(u) = -\frac{1}{2}u^2 + 3u$ mit Definitionsmenge $0 \leqq u \leqq 4$.

Der Flächeninhalt A hängt damit nur noch von der Variablen u ab.

4 Die Zielfunktion A wird in ihrer Definitionsmenge auf Extremwerte untersucht. Die Abbildung zeigt das Schaubild von A in Abhängigkeit von u. Die Ableitungen sind:

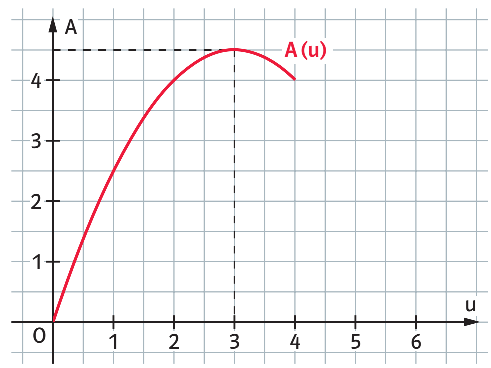
$A'(u) = -u + 3$; $A''(u) = -1$.

Die Gleichung $A'(u) = 0$ d.h.

$-u + 3 = 0$ hat die Lösung $u = 3$.

Es ist $A''(3) = -1 < 0$, also hat A an der Stelle $u = 3$ ein lokales Maximum.

Das Maximum beträgt $A(3) = 4{,}5$.



An den Rändern der Definitionsmenge $0 \leqq u \leqq 4$ gilt $A(0) = 0$ bzw. $A(4) = 4$.

Es ist $4 < 4{,}5$; somit ist das lokale Maximum 4,5 auch ein globales Maximum.

5 Das Ergebnis der Optimierungsaufgabe lautet: Die Maße des Rechtecks mit maximalem Flächeninhalt betragen $u = 3$ und $v = 1{,}5$. Der Flächeninhalt beträgt 4,5.

Merke

Strategie für das **Lösen von Extremwertproblemen:**

1 Zielgröße durch einen Term beschreiben (mit einer oder mehreren Variablen).

2 Nebenbedingungen und Definitionsmenge ermitteln.

3 Nebenbedingungen einsetzen; Zielfunktion mit nur einer Variablen bestimmen.

4 Zielfunktion auf Extremwerte (auch an den Rändern) untersuchen.

5 Ergebnis formulieren.

Beispiel

Die Koordinaten bei den Punkten werden mit u und v bezeichnet, also $Q(u|v)$.

1 Innerer Extremwert

Der Punkt $Q(u|v)$ liegt zwischen den Achsenschnittpunkten C und D des Schaubilds von f mit $f(x) = 4e^{-x} - \frac{1}{2}$.

Die Punkte $O(0|0)$; $P(u|0)$; $Q(u|v)$ und $R(0|v)$ bilden ein achsenparalleles Rechteck.

Wie muss u gewählt werden, damit der Umfang des Rechtecks minimal ist?

Lösung:

1 Zielgröße: Umfang $U = 2u + 2v$.

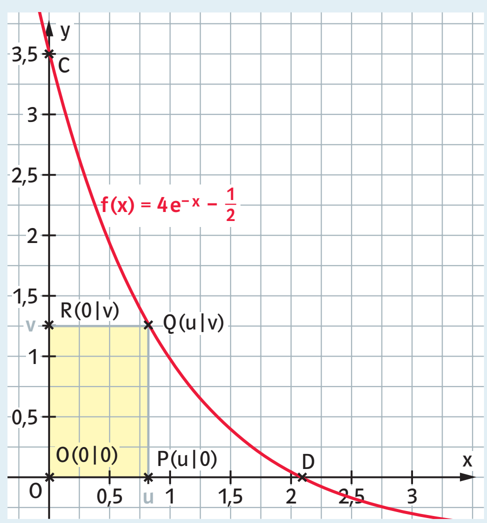
2 Nebenbedingung; Definitionsmenge:

Es ist $v = f(u)$ d.h. $v = 4e^{-u} - \frac{1}{2}$.

Punkt D: $f(x) = 0$ d.h. $4e^{-x} - \frac{1}{2} = 0$

hat die Lösung $x = -\ln\left(\frac{1}{8}\right)$, d.h.

$x = \ln(8)$. Nullstelle $D(0|\ln(8))$. Definitionsmenge ist das Intervall $0 \leqq u \leqq \ln(8)$.



Quellen:
Grafik: Imprint, Zusmarshausen

Seite aus: Lambacher Schweizer
ISBN-13: 978-3-12-732000-8
ISBN-13: 978-3-12-732006-0

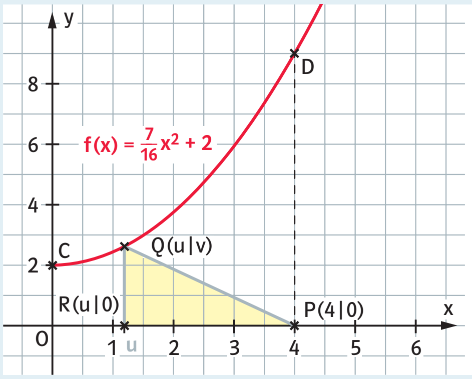
$\boxed{3}$ Zielfunktion ist $U(u) = 2u + 8e^{-u} - 1$; $u \in [0; \ln(8)]$.

$\boxed{4}$ Extremwert bestimmen:
Ableitungen bestimmen: $U'(u) = 2 - 8e^{-u}$; $U''(u) = 8e^{-u}$.
Die Gleichung $U'(u) = 0$ d.h. $2 - 8e^{-u} = 0$ hat die Lösung $u = \ln(4)$.
Es ist $U''(\ln(4)) = 8e^{-\ln(4)} = 2 > 0$; es liegt ein Minimum vor.
Es ist $U(\ln(4)) = 2\ln(4) + 1 \approx 3{,}77$.
Randwerte sind: $U(0) = 7$; $U(\ln(8)) = 6\ln(2) \approx 4{,}16$.
Die Funktion U hat in der Definitionsmenge an der Stelle $u = \ln(4)$ ein absolutes Minimum.

$\boxed{5}$ Der Umfang des Rechtecks OPQR ist minimal für $u = \ln(4)$. Der Umfang des kleinsten Rechtecks beträgt etwa 3,77.

2 Randextremwert

Die Kurve vom Punkt C zum Punkt D gehört zum Schaubilds der Funktion f mit $f(x) = \frac{7}{16}x^2 + 2$. Bestimmen Sie u so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks RPQ maximal ist.



Lösung:

$\boxed{1}$ Zielgröße: Flächeninhalt
$A = \frac{1}{2}(4 - u) \cdot v$.

$\boxed{2}$ Nebenbedingung und Definitionsmenge: Es ist $v = f(u)$, d.h.
$v = \frac{7}{16}u^2 + 2$. Definitionsmenge ist das Intervall $0 \leqq u \leqq 4$.

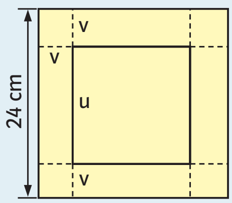
$\boxed{3}$ Zielfunktion: $A(u) = \frac{1}{2}(4 - u) \cdot \left(\frac{7}{16}u^2 + 2\right)$ d.h. $A(u) = -\frac{7}{32}u^3 + \frac{7}{8}u^2 - u + 4$; $u \in [0; 4]$.

$\boxed{4}$ Extremwert bestimmen: Es ist $A'(u) = -\frac{21}{32}u^2 + \frac{7}{4}u - 1$; $A''(u) = -\frac{21}{16}u + \frac{7}{4}$.
Die Gleichung $A'(u) = 0$ d.h. $-\frac{21}{32}u^2 + \frac{7}{4}u - 1 = 0$ hat die Lösungen $u_1 \approx 0{,}83$ und $u_2 \approx 1{,}84$.
Wegen $A''(u_1) \approx 0{,}66 > 0$ und $A''(u_2) \approx -0{,}66 < 0$ liegt bei u_1 ein lokales Minimum mit $A(u_1) \approx 3{,}65$ und bei u_2 liegt ein lokales Maximum mit $A(u_2) \approx 3{,}76$ vor. Untersuchung der Ränder: Es ist $A(0) = 4$ und $A(4) = 0$. Also hat A an der Stelle $u = 0$ ein globales Maximum.

$\boxed{5}$ Der Inhalt des Dreiecks RPQ ist für $u = 0$ maximal. Er beträgt 4.

3 Maximales Volumen

Aus einem quadratischen Stück Pappe der Kantenlänge 24 cm werden an den Ecken Quadrate der Kantenlänge v (in cm) so ausgestanzt, dass aus der restlichen Pappe eine nach oben offene Schachtel gebogen werden kann.
Wie muss v gewählt werden, damit eine Schachtel mit maximalem Volumen entsteht?



Quellen:
Grafik: Imprint, Zusmarshausen;
Rudolf Hungreder, Leinfelden-Echterdingen

Seite aus: Lambacher Schweizer
ISBN-13: 978-3-12-732000-8
ISBN-13: 978-3-12-732006-0

Lösung:

1 Das Volumen V soll maximal werden: $V = u^2 \cdot v$.

2 Nebenbedingung: $2v + u = 24$, d.h. $v = 12 - \frac{1}{2}u$.
Die Definitionsmenge ist das Intervall $0 \leqq u \leqq 24$.

3 Zielfunktion: $V(u) = u^2 \cdot \left(12 - \frac{1}{2}u\right)$, d.h. $V(u) = 12u^2 - \frac{1}{2}u^3$; $u \in [0; 24]$

4 Extremwerte bestimmen: $V'(u) = 24u - \frac{3}{2}u^2$; $V''(u) = 24 - 3u$.
Aus $V'(u) = 0$, d.h. $24u - \frac{3}{2}u^2 = 0$ folgt $u\left(24 - \frac{3}{2}u\right) = 0$, d.h. $u_1 = 0$; $u_2 = 16$.
Wegen $V''(u_1) = 24 > 0$ hat V bei $u_1 = 0$ ein lokales Minimum $V(0) = 0$.
Wegen $V''(u_2) = -24 < 0$ hat V bei $u_2 = 16$ ein lokales Maximum $V(16) = 1024$.
Randwerte sind $V(0) = 0$ und $V(24) = 0$. V hat an der Stelle $u_2 = 16$ globales Maximum.

5 Schneidet man Quadrate mit der Seitenlänge 4 cm ab, so wird das Schachtelvolumen maximal, nämlich $1024\,cm^3$.

GE bedeutet Geldeinheiten;
ME steht für Mengeneinheiten.

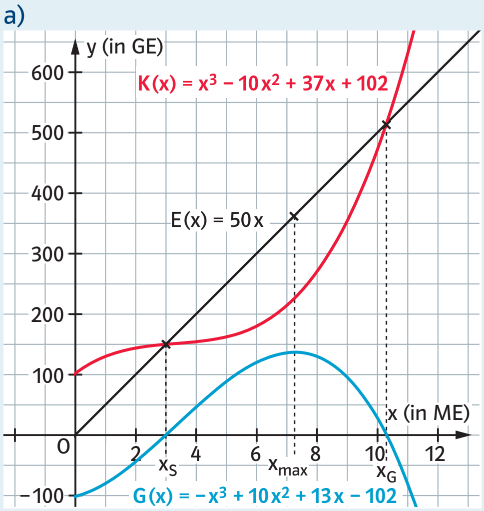
4 Gewinnmaximum

Die Kosten K eines Produkts (in GE) sind abhängig von der Produktionsmenge x (in ME) gegeben durch $K(x) = x^3 - 10x^2 + 37x + 102$; der Erlös E wird berechnet mit $E(x) = 50x$; $0 \leqq x \leqq 11$.

a) Skizzieren Sie die Schaubilder von K und E in ein Koordinatensystem.
b) Bei welcher Produktionsmenge wird der maximale Gewinn erwirtschaftet?
c) Skizzieren Sie das Schaubild der Gewinnfunktion in dasselbe Koordinatensystem

Lösung:

a)



b) 1 Gewinn = Erlös − Kosten
Der Gewinn soll maximal werden.
Gesucht ist das globale Maximum der Funktion G mit
$G(x) = E(x) - K(x)$.

2 Eine Nebenbedingung gibt es bei dieser Aufgabe nicht.
Die Definitionsmenge ist das Intervall $0 \leqq x \leqq 11$.

3 Zielfunktion G:
Es ist
$G(x) = 50x - (x^3 - 10x^2 + 37x + 102)$
d.h. $G(x) = -x^3 + 10x^2 + 13x - 102$;
$0 \leqq x \leqq 11$.

4 Extremwert bestimmen:
$G'(x) = -3x^2 + 20x + 13$; $G''(x) = -6x + 20$
$G'(x) = 0$ d.h. $-3x^2 + 20x + 13 = 0$ hat die Lösungen $x_1 \approx 7{,}26$ und $x_2 \approx -0{,}6$;
x_2 liegt nicht in der Definitionsmenge. Es ist $G''(x_1) \approx -23{,}6 < 0$.
An der Stelle x_1 liegt ein lokales Maximum $G(x_1) \approx 136{,}8$.
Randwerte betrachten: $G(0) = -102$; $G(11) = -80$.
Die Funktion G hat an der Stelle x_1 ein globales Maximum.

5 Für ca. 7,26 ME ergibt sich ein Gewinnmaximum von ca. 136,8 GE.

Quellen:
Grafik: Imprint, Zusmarshausen

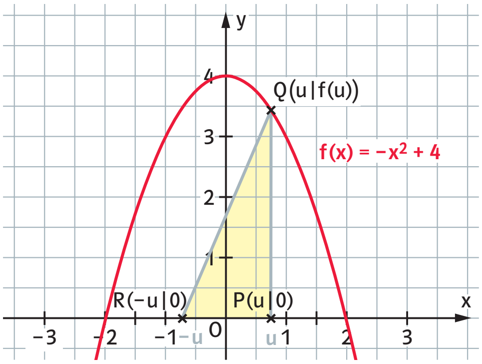
Seite aus: Lambacher Schweizer
ISBN-13: 978-3-12-732000-8
ISBN-13: 978-3-12-732006-0

Aufgaben

1 Im Schaubild der Funktion f mit $f(x) = -x^2 + 4$ werden die Punkte $P(u\,|\,0)$, $Q(u\,|\,f(u))$ und $R(-u\,|\,0)$ eingetragen. Diese drei Punkte bilden ein Dreieck.

a) Berechnen Sie für $u = 0{,}5$ und $u = 1{,}5$ den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

b) Bestimmen Sie u so, dass der Flächeninhalt dieses Dreiecks maximal ist. Geben Sie den maximalen Flächeninhalt an.



2 Eine rechteckige Hühnerwiese soll mit 50 m Drahtzaun angelegt werden; die umzäunte Wiese soll möglichst groß sein.

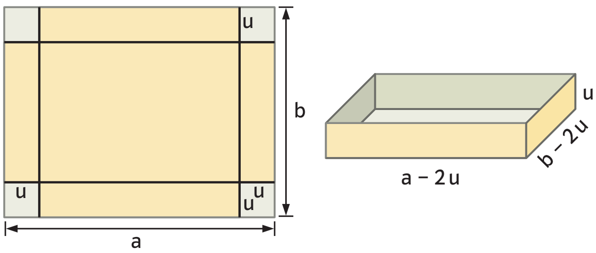
a) Wie groß ist die Wiese, wenn sie ganz umzäunt wird?

b) Wie groß ist diese Wiese, wenn eine 10 m lange Mauer zur Umrandung der Wiese dazu genommen wird?

3 Aus einem rechteckigen Stück Pappe mit den Kantenlängen $a = 16\,\text{cm}$ und $b = 10\,\text{cm}$ werden an den Ecken Quadrate der Kantenlänge u ausgestanzt, so dass aus der restlichen Pappe eine nach oben offene Schachtel hergestellt werden kann.

a) Berechnen Sie das Schachtelvolumen für $u = 1\,\text{cm}$; $u = 2\,\text{cm}$; $u = 3\,\text{cm}$; $u = 4\,\text{cm}$ und $u = 5\,\text{cm}$.

b) Wie muss u gewählt werden, damit eine Schachtel mit maximalem Volumen entsteht?



4 Gegeben sind die beiden Funktionen f mit $f(x) = x^2 + 2$ und g mit $g(x) = 2x + 0{,}5$.

a) Skizzieren sie die beiden Schaubilder in ein gemeinsames Koordinatensystem.

b) Die Gerade mit der Gleichung $x = u$ mit $-1 \leqq u \leqq 2$ schneidet das Schaubild von g im Punkt P und das Schaubild von f im Punkt Q. Bestimmen Sie u so, dass die Länge der Strecke $\overline{PQ}$ möglichst klein ist.

5 Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = 5\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$ mit $x \in [-\pi;\, \pi]$ schließt mit der x-Achse eine Fläche ein. In diese Fläche wird ein zur y-Achse symmetrisches Rechteck einbeschrieben, von dem zwei Eckpunkte auf der x-Achse, die anderen beiden Eckpunkte auf dem Schaubild von f liegen.

Aufgaben

a) Skizzieren Sie den Sachverhalt in einem Koordinatensystem.

b) Bestimmen Sie das Rechteck mit dem größten Umfang.

Quellen: Thinkstock (Zoonar RF), München
Grafik: Imprint, Zusmarshausen; Uwe Alfer, Waldbreitbach

Seite aus: Lambacher Schweizer
ISBN-13: 978-3-12-732000-8
ISBN-13: 978-3-12-732006-0

6 Die Kosten für die Herstellung eines Produkts werden mit der Kostenfunktion K beschrieben. $K(x) = x^3 - 6{,}125x^2 + 12{,}5x + 10{,}25$; (x in ME, K(x) in GE) mit $0 \leqq x \leqq 6$. Der Erlös je Einheit beträgt 9,375 GE.

a) Skizzieren Sie die Schaubilder der Kostenfunktion K und der Erlösfunktion E in ein gemeinsames Koordinatensystem.

b) Ermitteln Sie den maximalen Gewinn.

Haltepunkt

7 Bestimmen Sie diejenige Stelle im Intervall $I = [0; 2]$, an der die Schaubilder von f mit $f(x) = e^x$ und g mit $g(x) = 2x$ den geringsten senkrechten Abstand voneinander haben. Geben Sie den minimalen Abstand an.

Den Begriff **Gewinnzone** finden Sie im Schülerbuch auf Seite 45.

8 In einem Betrieb zur Herstellung von Hundefutter werden die Gesamtkosten K durch $K(x) = 0{,}05x^2 + 0{,}03x + 1{,}1$ beschrieben. Die Erlösfunktion E ist $E(x) = -0{,}4x^2 + 4x - 4$. Die Kapazitätsgrenze liegt bei 9 ME.

a) Skizzieren Sie die Schaubilder der beiden Funktionen in ein Koordinatensystem.

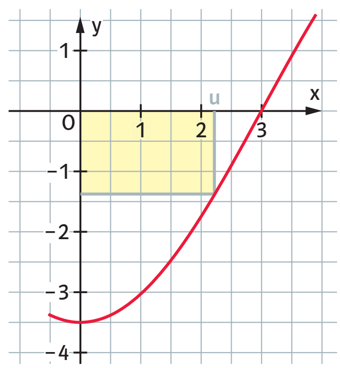
b) Bestimmen Sie die Gewinnzone.

c) Ermitteln Sie, bei welcher Produktionsmenge der maximale Gewinn erzielt wird.

9 Es ist $f(x) = -3{,}5\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)$ (siehe Abbildung).

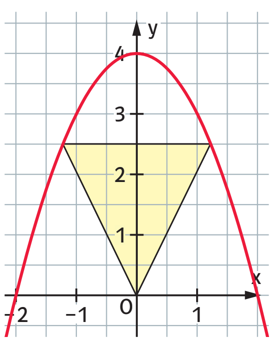
a) Bestimmen Sie den Wert u mit $0 \leqq u \leqq 3$ so, dass das achsenparallele Rechteck einen möglichst großen Umfang hat. Wie groß ist dieser Umfang?

b) Bestimmen Sie den Wert u mit $0 \leqq u \leqq 3$ so, dass das achsenparallele Rechteck einen möglichst geringen Umfang hat. Warum liefert das berechnete Ergebnis kein Rechteck?

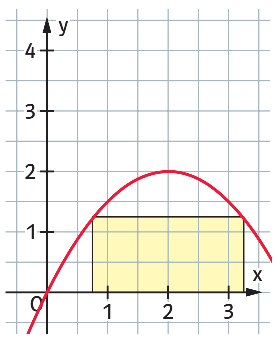


10 Formulieren Sie eine Optimierungsaufgabe, die zu der Abbildung passt, und geben Sie eine dazu passende Zielfunktion an.

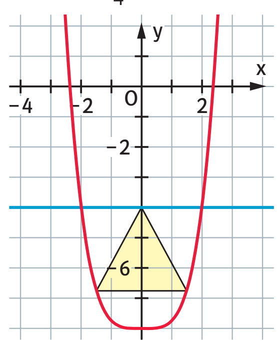
a) $f(x) = -x^2 + 4$



b) $f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 2$



c) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 8$



Quellen:
Grafik: Imprint, Zusmarshausen

Seite aus: Lambacher Schweizer
ISBN-13: 978-3-12-732000-8
ISBN-13: 978-3-12-732006-0