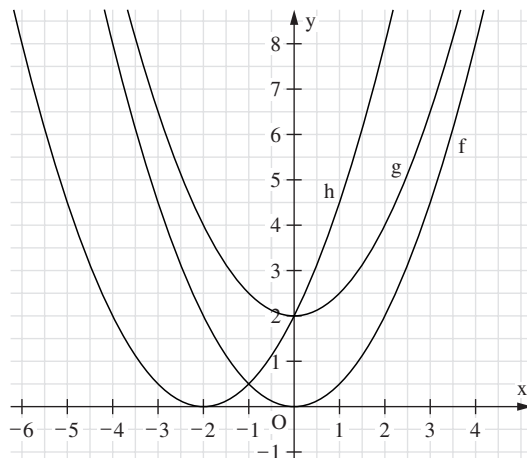


## VI Eigenschaften von Funktionen und ihre Graphen

### 1 Verschieben von Funktionsgraphen

S. 126

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)	12,5	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8
g(x)	14,5	10	6,5	4	2,5	2	2,5	4	6,5	10
h(x)	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8	12,5	18



Die Graphen von f und g sind genauso weit geöffnet. Der Graph von g ist im Vergleich zu demjenigen von f lediglich um 2 Einheiten nach oben verschoben. Beide Parabeln haben ihren Scheitelpunkt auf der y-Achse.

Auch die Graphen von f und h sind genauso weit geöffnet. Der Graph von h ist im Vergleich zu demjenigen von f lediglich um 2 Einheiten nach links verschoben. Beide Parabeln haben ihren Scheitelpunkt auf der x-Achse.

S. 129

- 2 a)  $g(x) = (x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$   
 $h(x) = (x-2)^2 = x^2 - 4x + 2$   
 b)  $g(x) = (x+3)^2 - 2(x+3) = x^2 + 7x + 9$   
 $h(x) = (x-1)^3 - 2(x-1)^2 - 2 = x^3 - 5x^2 + 7x - 5$

3  $f(x) = \frac{2}{3}x$ ,  $g(x) = \frac{2}{3}x + 2$

Kuni: Verschiebung des Graphen von f um 2 Einheiten nach oben:

$$f(x) + 2 = \frac{2}{3}x + 2 = g(x)$$

Bert: Verschiebung des Graphen von f um 3 Einheiten nach links:

$$f(x+3) = \frac{2}{3}(x+3) = \frac{2}{3}x + 2 = g(x)$$

Folglich haben beide recht.



- 4 Hinweis zum Knacken des Lösungsworts: Die Lösungsbuchstaben müssen im Alphabet noch geeignet verschoben werden.



- i)  $f_3$  (W)      ii)  $f_7$  (X)      iii)  $f_1$  (V)      iv)  $f_9$  (E)      v)  $f_4$  (X)  
 vi)  $f_8$  (I)      vii)  $f_2$  (K)      viii)  $f_6$  (M)      ix)  $f_5$  (I)

Verschieben um jeweils vier Buchstaben nach vorne ergibt das Lösungswort: STRATEGIE.

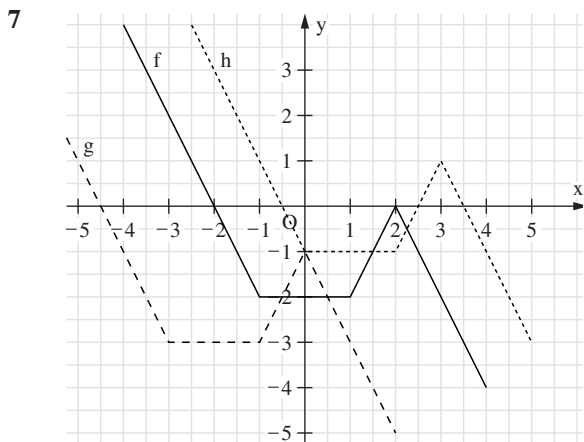


- 5 a)  $g(x) = f(x+2) - 3 = \frac{-3x-5}{x} + 2$   
 b)  $g(x) = f(x-3) + 1,5 = x^2 - 6x + 11,5$   
 c)  $g(x) = f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2 = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2$

S. 130



- 6 a)  $a = -2$ ,  $b = -2$       b) Nein      c)  $a = -2$ ,  $b = 3$       d) Nein      e) Nein  
 f)  $a = -1$ ,  $b = 0$       g)  $a = -\pi$ ,  $b = -1$       h) Nein      i)  $a = \frac{\pi}{2}$ ,  $b = 0$



Der Graph von g ist im Vergleich zu dem von f um 2 Einheiten nach links und eine Einheit nach unten verschoben worden. Der Graph von h ist im Vergleich zu dem von f um eine Einheit nach rechts und um eine Einheit nach oben verschoben worden.

S. 131



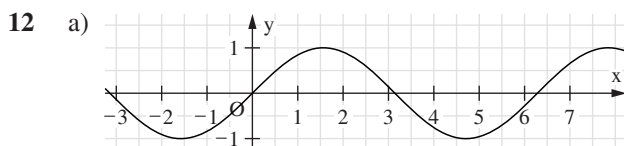
- 8 a)  $z = \pm \frac{\pi}{8}; \pm \frac{3\pi}{8}; \pm \frac{5\pi}{8}; \pm \frac{7\pi}{8}; \dots$ ; allgemein:  $z^k = \left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$   
 b)  $x_1 = -0,5; x_2 = 2$  c) keine Nullstellen d)  $z = \frac{3}{4}$   
 e)  $z_1 = -\frac{1}{2}; z_2 = \frac{1}{2}$  f)  $x = -\frac{\lg 2}{\lg 3} \approx -0,63$



- 9 a)  $x = 5,8$  b)  $x = \frac{\lg 12}{\lg 1,5} \approx 6,13$  c)  $x = 1$   
 d)  $x = \pm \frac{\pi}{3}; \pm \frac{5\pi}{3}; \pm \frac{7\pi}{3}; \pm \frac{11\pi}{3}; \pm \frac{13\pi}{3}; \pm \frac{17\pi}{3}; \dots$   
 e)  $x_1 = -3$  f)  $x_1 = -1; x_2 = 2$  g)  $x_1 = 0; x_2 = \frac{2}{3}$

- 10 a) blau:  $g: x \mapsto \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$  rot:  $h: x \mapsto \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$   
 b) blau:  $g: x \mapsto 2 \cdot \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + 1$  rot:  $x \mapsto 2 \cdot \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) - 1$

- 11 a)  $g(x) = 1,5x + 2 = f(x)$   
 Dre Funktionsterm von g ist gleich dem Funktionsterm von f.  
 b) Z. B. i) Verschiebung um 3 Einheiten nach oben und um 2 Einheiten nach rechts.  
 ii) Verschiebung um 1,5 Einheiten nach oben und um eine Einheit nach rechts.  
 c) Z. B. Verschiebung um p-Einheiten in y-Richtung ( $p > 0$ : nach oben;  $p < 0$ : nach unten) und um eine Einheit in x-Richtung nach rechts.



Der Graph der Funktion f ist gleich dem Graphen der Funktion  $x \mapsto \sin x$ .

- b) Die Amplitude der Funktion g beträgt 1. Da der Graph von g im Vergleich zu demjenigen der Kosinuskurve um 2 Einheiten nach unten verschoben ist, beträgt die Wertemenge von g  $W_g = [-3; -1]$ . Somit besitzt g keine Nullstellen.  
 c)  $a_k = \left(-\frac{3}{4} - 2k\right) \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$

- 13 Hier ist es sinnvoll, den Graphen von f vorher zu skizzieren sowie die Schnittpunkte der Funktion mit den Koordinatenachsen zu berechnen.

Nullstellen:  $x_1 = -1; x_2 = 1; x_3 = 2$   
 Schnittpunkt mit der y-Achse:  $S_y(0|2)$

- a) Z. B. Verschiebung des Graphen von f um 2 Einheiten nach unten

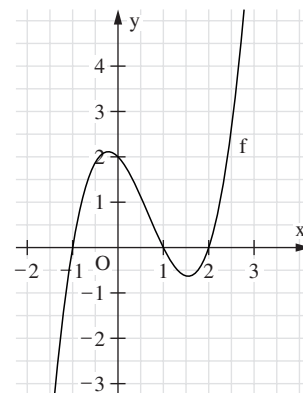
$$\Rightarrow g: x \mapsto x^3 - 2x^2 - x$$

Es gibt mehrere Möglichkeiten.

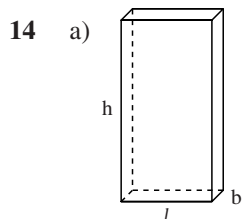
- b) Z. B. Verschiebung des Graphen von f um eine Einheit nach rechts

$$\Rightarrow g: x \mapsto x^3 - 5x^2 + 6x$$

Es gibt mehrere Möglichkeiten.



- c) Z. B. Verschiebung des Graphen von  $f$  um 3 Einheiten nach links  
 $\Rightarrow g: x \mapsto x^3 + 7x^2 + 14x + 8$   
 Es gibt mehrere Möglichkeiten.
- d) Es gibt keine solche Funktion, die nur durch Verschiebung des Graphen von  $f$  entsteht.
- e) Z. B. Verschiebung des Graphen von  $f$  um 8 Einheiten nach unten  
 $\Rightarrow g: x \mapsto x^3 + x^2 - 2x - 8$   
 Es gibt mehrere Möglichkeiten.
- f) Z. B. Verschiebung des Graphen von  $f$  um eine Einheit nach links  
 $\Rightarrow g: x \mapsto x^3 + x^2 - 2x$   
 Es gibt mehrere Möglichkeiten.
- g) Es gibt keine solche Funktion.

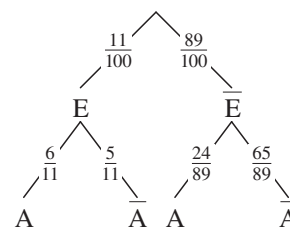
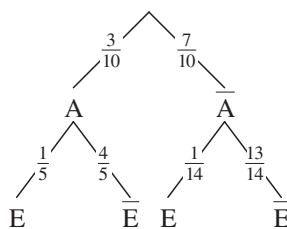


b) Breite:  $b = \frac{1}{4}l$ ; Höhe:  $h = 2l$   
 Volumen:  $V = l \cdot b \cdot h = l \cdot \frac{1}{4}l \cdot 2l = \frac{1}{2}l^3$   
 Oberflächeninhalt:  
 $O = 2 \cdot (l \cdot b + l \cdot h + b \cdot h) = \frac{11}{2}l^2$

c)  $d_R = \sqrt{l^2 + b^2 + h^2} = \frac{9}{4}l$

15 E: „isst Ei“; A: „Amerikaner“

	A	$\bar{A}$	
E	$\frac{3}{50}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{11}{100}$
$\bar{E}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{13}{20}$	$\frac{89}{100}$
	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{10}$	1



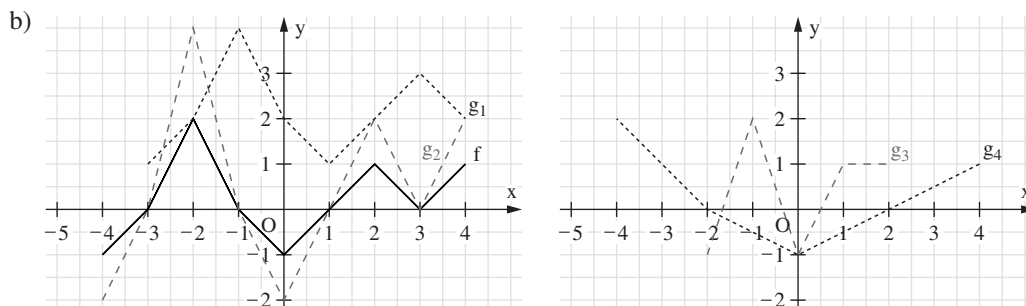
$P_E(A) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{6}{11}$

## 2 Strecken und Spiegeln von Funktionsgraphen

S. 132

1 a)

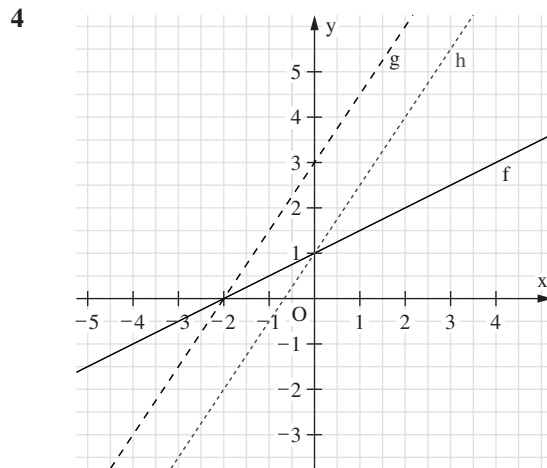
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)	-1	0	2	0	-1	0	1	0	1
$g_1(x)$	-	1	2	4	2	1	2	3	2
$g_2(x)$	-2	0	4	0	-2	0	2	0	2
$g_3(x)$	-	-	-1	2	-1	1	1	-	-
$g_4(x)$	2	-	0	-	-1	-	0	-	1



- 2 Der Graph der Funktion  $1,5 \cdot \sin x$  ist gegenüber demjenigen der Funktion  $\sin x$  in y-Richtung (von der x-Achse aus) mit dem Faktor 1,5 gestreckt.  
 Der Graph der Funktion  $\sin(1,5 \cdot x)$  ist gegenüber demjenigen der Funktion  $\sin x$  in x-Richtung (von der y-Achse aus) mit dem Streckungsfaktor  $\frac{1}{1,5} = \frac{2}{3}$  gestreckt.

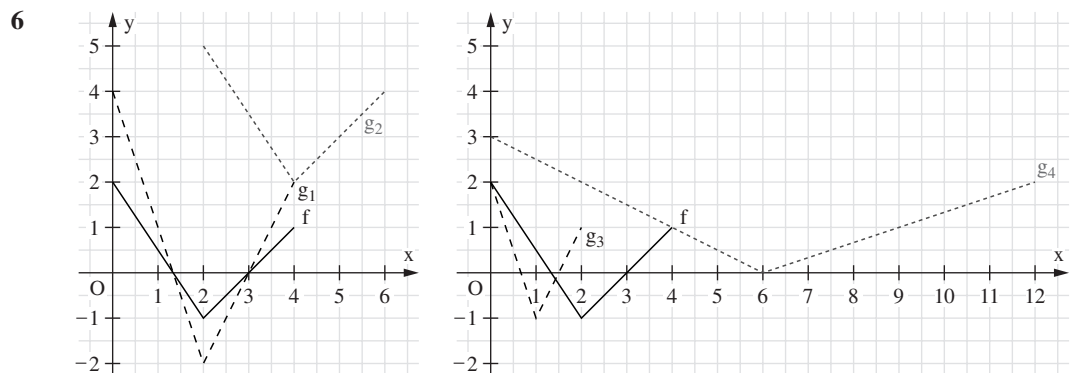
S. 135

- 3 a)  $g(x) = \frac{1}{2-x}$ ;  $h(x) = -\frac{1}{2-x}$     b)  $g(x) = -x^4 + 2x^2 - 3x - 5$ ;  $h(x) = x^4 - 2x^2 - 3x + 5$   
 c)  $g(x) = -2^x$ ;  $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$     d)  $g(x) = -\sin x = h(x)$



5

	f(x)	g(x) (rot)	h(x) (blau)
a)	$x^2$	$x^2 - 6x + 7$	$-x^2 - 2x$
b)	$x^3$	$x^3 - 6x^2 + 12x - 7$	$-x^3 - 3x - 3$
c)	$x^2$	$4x^2 - 16x + 17$	$\frac{1}{16}x^2 - 1$
d)	$\frac{1}{x}$	$\frac{-x+3}{x-2}$	$\frac{2}{x+1}$
e)	$2^x$	$2^{x+2}$	$\frac{2}{x+1}$
f)	$\sqrt{x}$	$\sqrt{4x-4}$	$\sqrt{-x+2}$



- a)  $x \in [0; 4]$     b)  $x \in [2; 6]$     c)  $x \in [0; 2]$     d)  $x \in [0; 12]$



7

	x	Der Graph ist im Vergleich zu dem von f
a)	0,7	in x-Richtung mit dem Streckungsfaktor $\frac{1}{2}$ gestreckt.
b)	15	in x-Richtung mit dem Streckungsfaktor 10 gestreckt.
c)	3,5	um 2 Einheiten nach rechts verschoben.
d)	6	in x-Richtung mit dem Streckungsfaktor 4 gestreckt.
e)	$\frac{\lg(3^{1,5}-1)}{\lg 3} \approx 1,31^x$	um eine Einheit nach oben verschoben.
f)	$\frac{1,5 \cdot \lg 3 - \lg 2}{\lg 3} \approx 0,87$	In y-Richtung mit dem Streckungsfaktor 2 gestreckt.

8	$g(x) = -x^3 + 2x^2 - 4x + 1$	Spiegelung des Graphen von $f$ an der $x$ -Achse
	$h(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 1$	Spiegelung des Graphen von $g$ an der $y$ -Achse
	$k(x) = -x^3 - 2x^2 - 4x - 1$	Spiegelung des Graphen von $h$ an der $x$ -Achse
	$t(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 1 = f(x)$	Spiegelung des Graphen von $k$ an der $y$ -Achse

$t(x) = f(x)$ , d. h. nach der Verkettung von obigen vier Achsenspiegelungen ist wieder der ursprüngliche Funktionsgraph entstanden. Der Graph von  $f$  wurde also um  $360^\circ$  um den Koordinatenursprung gedreht.

$$9 \quad f\left(\frac{3}{2}\right) \cdot x - 1 = \frac{3}{2 \cdot \frac{3}{2}x + 4} - 1 = \frac{3 - 3x - 4}{3x + 4} = \frac{-3x - 1}{3x + 4} = g(x)$$

Die Asymptoten von  $f$  sind  $x = -2$  und  $y = 0$ , die Asymptoten von  $g$  sind  $x = \frac{2}{3} \cdot (-2) = -\frac{4}{3}$  (Streckung) und  $y = 0 - 1 = -1$  (Verschiebung).

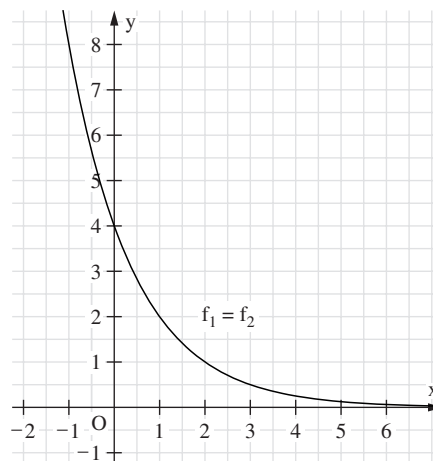
S. 136

10 a)  $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ ,  $g(x) = 2x^2$   
 Felizitas:  $g(x) = \frac{1}{2} \cdot 4x^2 = \frac{1}{2} \cdot (2x)^2 = f(2x)$   
 $\Rightarrow$  Streckungsfaktor in  $x$ -Richtung:  $\frac{1}{2}$   
 Benjamin:  $g(x) = 4 \cdot \frac{1}{2}x^2 = 4 \cdot f(2x)$   
 $\Rightarrow$  Streckungsfaktor in  $y$ -Richtung: 4

b)  $h(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$ ,  $k(x) = 2x^2 - 2$   
 Felizitas:  $k(x) = \frac{1}{2} \cdot 4x^2 - 2 = \frac{1}{2} \cdot (2x)^2 - 2 = h(2x)$   
 $\Rightarrow$  Streckungsfaktor in  $x$ -Richtung:  $\frac{1}{2}$   
 Benjamin:  $k(x) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right) \neq 4 \cdot h(x)$

Somit trifft für die Parabeln  $h$  und  $k$  nur noch Felizitas Aussage zu.

11 a)  $f_1(x) = 0,5^{x-2}$ ,  
 $f_2(x) = 4 \cdot 0,5^x = \frac{1}{0,5^2} \cdot 0,5^x = 0,5^{x-2} = f_1(x)$   
 b) z. B.  $g_1(x) = 2^{x-2}$ ,  $g_2(x) = \frac{1}{4} \cdot 2^x$ ;  
 $h_1(x) = 2^{x+2}$ ,  $h_2(x) = 4 \cdot 2^x$



12 i)  $f_8$       ii)  $f_4$       iii)  $f_2$       iv)  $f_1$       v)  $f_3$   
 vi)  $f_9$       vii)  $f_6$       viii)  $f_5$       ix)  $f_7$   
 Lösungswort: GEHEIMNIS

13 a) nicht lösbar      b)  $\mathbb{L} = \left\{ \left( \frac{5}{6}; \frac{3}{4} \right) \right\}$

14 a) 140  
 b) Nein. Der Würfel wird jeweils um 25 % länger, breiter und höher, doch sein Volumen nimmt um mehr als 25 % zu.  
 c)  $V_{\text{klein}} = 1 \text{ cm}^3$ ,  $V_{\text{groß}} = (1,25 \text{ cm})^3 \approx 1,953 \text{ cm}^3$   
 $\frac{\Delta V}{V_{\text{klein}}} \approx 0,953 \approx 95,3 \%$   
 Das Volumen des größeren Würfels ist um etwa 95,3 % größer als das Volumen des kleineren Würfels.

### 3 Symmetrie von Funktionsgraphen

S. 137

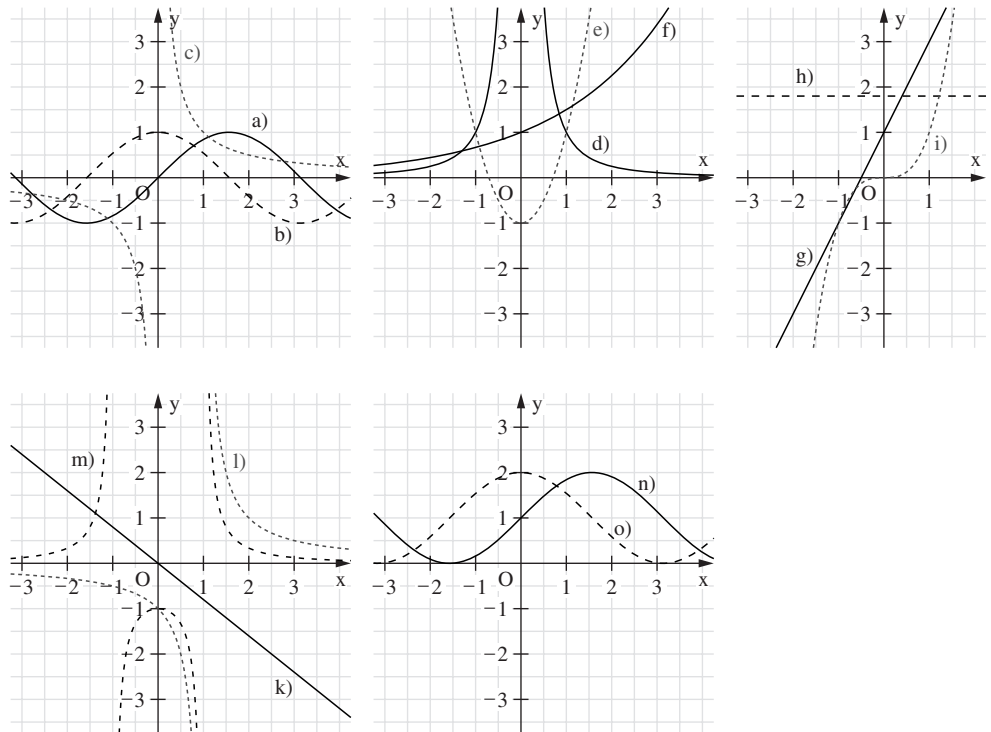
- 1 a)  Die beiden Punkte unterscheiden sich in der x-Koordinate nur durch das Vorzeichen, die y-Koordinate ist gleich.

- b)  $f(1) = 0 = f(-1)$ ,  $f(2) = 18 = f(-2)$   
 $\Rightarrow$  Der Graph von  $f$  könnte achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse sein.  
 $g(1) = 0 = g(-1)$ ,  $g(2) = 6$ ,  $g(-2) = -6$   
 $\Rightarrow$  Der Graph von  $g$  könnte punktsymmetrisch zum Ursprung sein.  
 $h(1) = 2$ ;  $h(-1) = 0$ ,  $h(2) = 12$ ,  $h(-2) = -4$   
 $\Rightarrow$  Der Graph von  $h$  weist keine Symmetrie auf.

- 2  $G_f$ : 4 Nullstellen; achsensymmetrisch zur y-Achse  
 $G_g$ : 3 Nullstellen; punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung  
 $G_h$ : eine Nullstelle  
 Aufgrund der Achsensymmetrie zur y-Achse bzw. Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung lassen sich die Graphen von  $f$  und  $g$  einfach beschreiben, auch wenn man sie nur im I. und IV. Quadranten zeichnet.

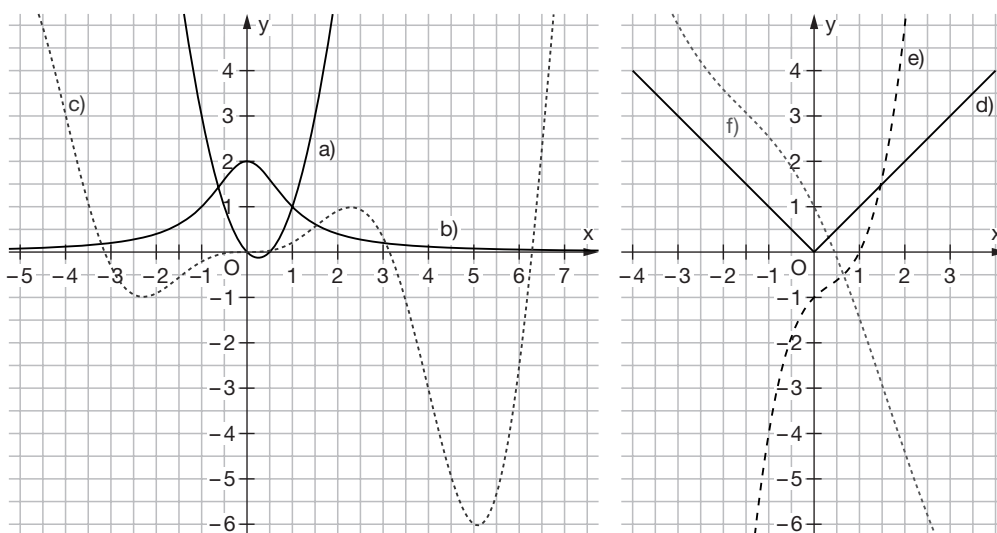
S. 139

- 3 Punktsymmetrisch bzgl. des Koordinatenursprungs: a), c), i), k)  
 Achsensymmetrisch bzgl. der y-Achse: b), d), e), h), m), o)





- 4 Achsensymmetrisch bzgl. der y-Achse: b), d)  
 Punktsymmetrisch bzgl. des Koordinatenursprungs: c)  
 Keine Symmetrie: a), e), f)



S. 140

- 5 Gerade Funktionen: ERLE  
 Ungerade Funktionen: ESEL  
 Weder gerade noch ungerade Funktionen: BIENE

- 6 f: Der Graph von f steigt für negative x-Werte zunächst stark an, fällt danach stark ab, bis er schließlich über die y-Achse hinweg die Steigung Null besitzt. Anschließend steigt der Graph für positive x-Werte, fällt erneut etwas ab und steigt schließlich wieder.  
 g: Der Graph von g steigt für negative x-Werte zunächst stark an, fällt dann über den Koordinatenursprung hinweg, bis er für positive x-Werte wieder ansteigt. Der Graph scheint punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung zu sein.

- 7 a) z. B.  $f(x) = x^2 - 4$       b) z. B.  $f(x) = x^3 - 4x$



- 8 a) Eine ungerade Funktion besitzt immer eine Nullstelle im Koordinatenursprung. Da der Graph an gleich weit vom Koordinatenursprung entfernten x-Werten betragsgleiche Funktionswerte besitzt, gibt es zu jeder Nullstelle eine weitere, nämlich ihre Gegenzahl. Somit ergibt sich für die Gesamtanzahl an Nullstellen stets eine ungerade Zahl.  
 b) Da der Graph an gleich weit vom Koordinatenursprung entfernten x-Werten gleiche Funktionswerte besitzt, gibt es zu jeder Nullstelle eine weitere, nämlich ihre Gegenzahl. Damit besitzt eine gerade Funktion links und rechts vom Koordinatenursprung immer die gleiche Anzahl an Nullstellen. Hinzukommen kann auch eine Nullstelle im Koordinatenursprung selbst. Somit kann eine gerade Funktion sowohl eine gerade als auch eine ungerade Anzahl an Nullstellen besitzen. Allerdings gibt es auch gerade Funktionen ohne Nullstellen. Ein einfaches Unterscheidungsmerkmal zwischen den beiden Fällen ist der Koordinatenursprung. Bei ungeraden Funktionen ist er stets eine Nullstelle, bei geraden Funktionen kann er eine Nullstelle sein.
- 9 a) Punktsymmetrisch bzgl. des Koordinatenursprungs nur für  $t = 0$ .  
 b) Achsensymmetrisch bzgl. der y-Achse für alle  $t \in \mathbb{R}$ .  
 c) Achsensymmetrisch bzgl. der y-Achse nur für  $t = 0$ .  
 d) Achsensymmetrisch bzgl. der y-Achse nur für  $t = 0$ .

- 10 a) Falsch, da z. B. für  $f: x \mapsto x^2 + 1$   $f(0) = 1$  gilt.  
 b) Richtig, da eine ungerade Funktion kein konstantes Glied im Funktionsterm besitzt, gilt immer  $f(0) = 0$ .  
 c) Falsch, da z. B. für  $f: x \mapsto x^3 - x$   $f(1) = f(-1) = 0$  gilt.  
 d) Richtig. Allerdings erfüllt dies nur die Nullfunktion  $f(x) = 0$  (y-Achse), da mit  $f(x) = f(-x) = -f(x)$   $f(x) = -f(x)$  folgt.  
 e) Falsch, da bei einer Verschiebung in y-Richtung die Achsensymmetrie erhalten bleibt.  
 f) Richtig, da nach einer Verschiebung in y-Richtung der Funktionswert an der Stelle 0 nicht mehr gleich 0 ist.  
 g) Richtig, da eine Streckung in y-Richtung die Achsensymmetrie einer geraden Funktion erhält.

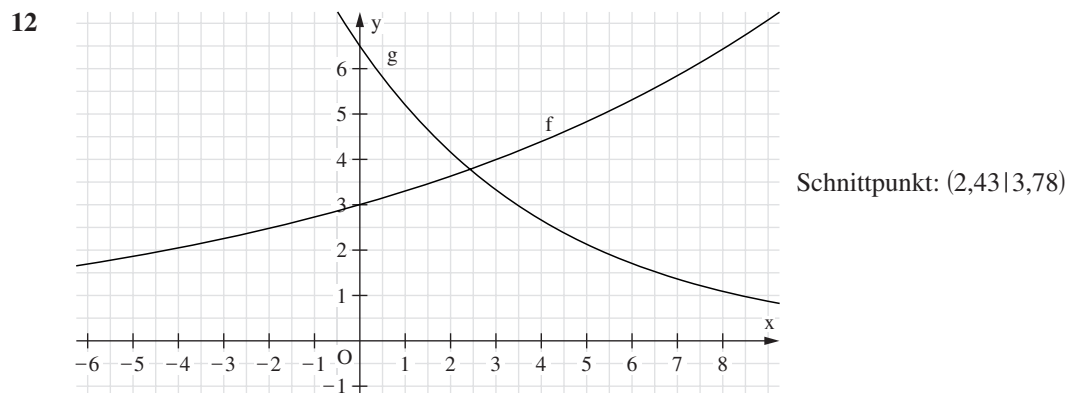


- 11 **Hinweis:** Für diese Aufgabe empfiehlt sich zur Kontrolle die Verwendung eines Funktionsplotters.
- a) Verschiebung des Graphen von  $f$  um eine Einheit nach rechts, um den Term  $x^2$  zu eliminieren:  

$$f'(x) = f(x-1) = \frac{1}{3}(x-1)^5 + (x-1)^2 + 5(x-1) + 15 = \frac{1}{3}x^3 + 4x + 10\frac{2}{3}$$
 Verschiebung des Graphen von  $f'$  um  $10\frac{2}{3}$  Einheiten nach unten:  

$$g(x) = f'(x) - 10\frac{2}{3} = \frac{1}{3}x^3 + 4x + 10\frac{2}{3} - 10\frac{2}{3} = \frac{1}{3}x^3 + 4x$$
 Der Graph von  $f$  ist punktsymmetrisch zum Punkt  $(-1 | 10\frac{2}{3})$ .
- b) Verschiebung des Graphen von  $f$  um eine Einheit nach links, um den Term  $-8x^3$  zu eliminieren:  

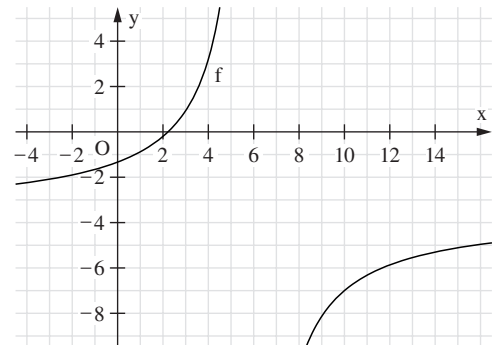
$$g(x) = f(x+1) = 2(x+1)^4 - 8(x+1)^3 + 9(x+1)^2 - 2(x+1) = 2x^4 - 3x^2 + 2$$
 Weil dabei auch der lineare Term wegfällt, ist der Graph von  $g$  achsensymmetrisch bzgl. der y-Achse. Der Graph von  $f$  ist daher achsensymmetrisch bzgl. der Achse  $x = 1$ .



## 4 Grenzwerte im Unendlichen

S. 141

- 1 Mit Blick auf den Ausschnitt möchte man annehmen, dass die Funktionswerte von  $f$  für immer größer werdende  $x$ -Werte ebenfalls immer größer werden. Allerdings ist  $f$  eine gebrochene rationale Funktion mit einer Definitionslücke bei  $x = 6$ . Da im Ausschnitt der Bereich für  $x > 6$  fehlt, lässt sich über das dortige Verhalten des Graphen von  $f$  keine Aussage machen. Anhand der Skizze lässt sich erkennen, dass die Funktionswerte gegen eine negative reelle Zahl streben, da  $f$  nur bei  $x = 2$  eine Nullstelle besitzt.





- 2 a) Temperaturunterschied:  $D(0) = 25$ ,  $D(1) = 22,5$ ,  $D(2) = 20,2$ ,  $D(3) = 17,2$ ,  $D(4) = 15,5$   
 $\frac{D(1)}{D(0)} \approx \frac{D(2)}{D(1)} \approx \frac{D(3)}{D(2)} \approx \frac{D(4)}{D(3)} \approx 0,9 = a$

Somit nimmt der Temperaturunterschied pro Minute um etwa 10% ab.

$$\Rightarrow D(t) = D(0) \cdot a^t = 25 \cdot 0,9^t$$

Für die Temperatur gilt also:  $T(t) = 30 - 25 \cdot 0,9^t$

- b)  $0,9^t > 0$  für alle  $t$ , da diese Exponentialfunktion die  $t$ -Achse zur Asymptote hat. Damit wird immer ein minimaler Temperaturunterschied bleiben, auch wenn dieser verschwindend gering ist.

- 3 a) 0                      b) 0                      c) 0                      d) existiert nicht                      e) 0  
 f) 1                      g) 0                      h) existiert nicht                      i) existiert nicht                      k) 0

- 4 Der Graph von  $f$  ist punktsymmetrisch bzgl. des Koordinatenursprungs und es gilt

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0.$$

$$f(x) = \frac{3}{x} = 0,1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{0,1} = 30 \quad \text{und} \quad x = -30$$

$$\Rightarrow \quad \text{für } x < -30 \quad \text{und} \quad x > 30$$

$$f(x) = \frac{3}{x} = 0,01 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{0,01} = 300 \quad \text{und} \quad x = -300$$

$$\Rightarrow \quad \text{für } x < -300 \quad \text{und} \quad x > 300$$

$$f(x) = \frac{3}{x} = 0,001 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{0,001} = 3000 \quad \text{und} \quad x = -3000$$

$$\Rightarrow \quad \text{für } x < -3000 \quad \text{und} \quad x > 3000$$

$$f(x) = \frac{3}{x} = 0,0001 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{0,0001} = 30000 \quad \text{und} \quad x = -30000$$

$$\Rightarrow \quad \text{für } x < -30000 \quad \text{und} \quad x > 30000$$

- 5 Fehler im *Schülerbuch* (1. Auflage), Teilaufgabe a)

Es muss heißen:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$  statt  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$b) \quad g(x) = 0,25^x = \left(\frac{1}{4}\right)^x$$

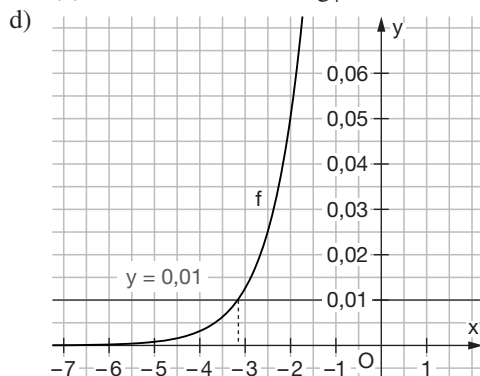
Spiegelt man den Graphen der Exponentialfunktion  $f: x \mapsto 4^x$  an der  $y$ -Achse, so erhält man den Graphen von  $g: x \mapsto \left(\frac{1}{4}\right)^x$  und umgekehrt.

$$c) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$f(x) = 4^x = 0,1 \quad \Rightarrow \quad \log_4 0,1 \approx -1,66 \quad \Rightarrow \quad \text{für } x < -1,66$$

$$f(x) = 4^x = 0,01 \quad \Rightarrow \quad \log_4 0,01 \approx -3,32 \quad \Rightarrow \quad \text{für } x < -3,32$$

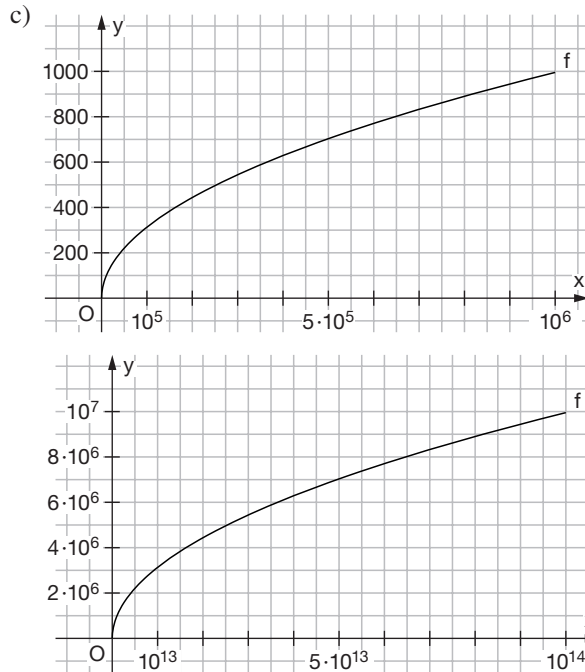
$$f(x) = 4^x = 0,001 \quad \Rightarrow \quad \log_4 0,001 \approx -4,98 \quad \Rightarrow \quad \text{für } x < -4,98$$



Es lässt sich ablesen:  
 $f(x) < 0,01 \Rightarrow x < -3,3$



- 6 a) Individuelle Vermutung, z. B.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$   
 $f(1000) \approx 31,6, f(1\,000\,000) \approx 1000, f(1\,000\,000\,000) \approx 31\,662,78$   
 $\Rightarrow$  Die Vermutung bestätigt sich.  
 b)  $f(x) = \sqrt{x} > 1000 \Rightarrow x > 1\,000\,000$   
 $f(x) = \sqrt{x} > 1\,000\,000 \Rightarrow x > 1 \cdot 10^{10}$   
 $f(x) = \sqrt{x} > 10^7 \Rightarrow x > 10^{14}$   
 Also übersteigt  $f(x)$  jeden positiven Wert. Es gilt:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$



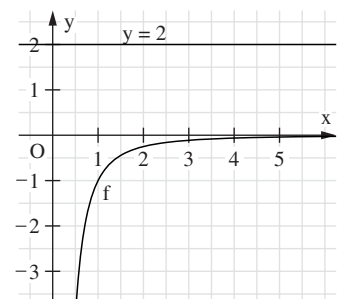
- 7 a)  $y = 0; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$       b)  $y = \frac{3}{2}; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{3}{2}$   
 c)  $y = 3; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$       d)  $y = 0; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$



- 8 Sie hat nicht recht.  
 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$ , da das Verhalten für betragsmäßig große  $x$ -Werte durch den Faktor  $0,001$  an  $x^4$  bestimmt wird.

- 9 a) Z. B.  $f(x) = \frac{1}{x} + 1$  mit  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$   
 $f(x) = \frac{1}{x^2} + 1$  mit  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$   
 $f(x) = \frac{x+2}{x}$  mit  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 1$   
 b) Z. B.  $f: x \mapsto 2 + \sin x$   
 c) 2 Nullstellen: z. B.  $f: x \mapsto (1+x)x^2 = x^3 + x^2$   
 3 Nullstellen: z. B.  $g: x \mapsto x(x-1)(x+1) = x^3 - x$   
 4 Nullstellen: z. B.  $h: x \mapsto x^2(x+1)(x-1)(x+2) = x^5 + 2x^2 - x^3 - 2x^2$

- 10 Gegenbeispiel: Der Graph von  $f: x \mapsto -\frac{1}{x^2}$  ist in ganz  $\mathbb{R}^+$  steigend und liegt unterhalb der Gerade  $y = 2$ .  
 Dennoch gilt:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$





- 11 a)  $D_{\max} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$   
 b) Der Graph von  $f$  ist punktsymmetrisch bzgl. des Koordinatenursprungs.  
 c) Durch den Vorfaktor verringert sich die Amplitude der Kosinuskurve auf den  $x$ -ten Teil, d. h. die Schwankungsbreite um die  $x$ -Achse wird umso kleiner, je größer  $|x|$  wird. Allerdings hat die Kosinuskurve durch den Vorfaktor auch die  $y$ -Achse als Asymptote.  
 d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$   
 e)  $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \cos x < 0,01$   
 Hier ist nur eine Abschätzung möglich. Da  $|\cos x|$  maximal den Wert 1 annehmen kann, muss für diesen Fall gelten:  $\frac{1}{|x|} < 0,01$  bzw.  $|x| > 100$ . Somit weichen für  $x > 100$  bzw.  $x < -100$  alle Funktionswerte um weniger als 0,01 vom Grenzwert ab.  
 f)  $D_{\max} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$   
 Der Graph von  $g$  weist keine Symmetrie auf. Es handelt sich um eine um  $\frac{1}{x}$  Einheiten in  $y$ -Richtung verschobene Kosinuskurve, welche die  $y$ -Achse als Asymptote hat.  
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$  existiert nicht.
- 12  $V \approx 109,75 \text{ dm}^3$ ,  $O \approx 134,92 \text{ dm}^2$

## 5 Funktionsuntersuchungen

S. 146

- 1 Lineare Funktionen: violett, gelb  
 Eigenschaften:  $D_{\max} = \mathbb{R}$ ;  $W = \mathbb{R}$ ; Graph: Gerade; maximal eine Nullstelle; konstante Steigung  
 Quadratische Funktionen: schwarz, rot  
 Eigenschaften:  $D_{\max} = \mathbb{R}$ ; Graph: Parabel; achsensymmetrisch bzgl. einer Geraden  $x = k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ ; maximal 2 Nullstellen; besitzt einen Scheitelpunkt  
 Gebrochen rationale Funktion: grün  
 Eigenschaften: kann Definitionslücken besitzen; Graph: kann waagrechte und senkrechte Asymptoten besitzen  
 Exponentialfunktion: blau  
 Eigenschaften:  $D_{\max} = \mathbb{R}$ ;  $W = \mathbb{R}^+$ ; Graph: durchgehend steigend oder fallend; Asymptote:  $y = 0$ ; keine Nullstellen



- 2 Fehler im *Schülerbuch* (1. Auflage), grünes Kärtchen  
 Es muss heißen: Scheitel bei  $S(-2|-1)$

Funktion	Eigenschaft	Begründung
f	Wertemenge $W = [3; 3]$	Die Sinuskurve wurde um den Streckungsfaktor 3 in $x$ -Richtung gestreckt.
p	Asymptote $y = 1$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} p(x) = 1$
k	Schnittpunkt mit der $y$ -Achse bei $(0 1)$	$k(0) = 1$
h	Nullstelle bei $x = 10$	$h(x) = 0 \Rightarrow x = 10$
g	Scheitel bei $S(-2 -1)$	g liegt in Scheitelpunktsform vor.
r	vier verschiedene Nullstellen	$r(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ (doppelte Nullstelle), $x_2 = 4$ ; $x_3 = 1$ , $x_4 = -1$

S. 149

- 3**
- a)  $f: x \mapsto x^3$   
 –  $D_{\max} = \mathbb{R}; W = \mathbb{R}$   
 – Graph: Verlauf „von links unten nach rechts oben“, punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung  
 –  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$   
 – Nullstelle:  $x = 0$  (dreifach)
- b)  $f: x \mapsto x^4$   
 –  $D_{\max} = \mathbb{R}; W = \mathbb{R}_0^+$   
 – Graph: Verlauf „von links oben nach rechts oben“, achsensymmetrisch zur x-Achse  
 –  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$   
 – Nullstelle:  $x = 0$  (vierfach)
- c)  $f: x \mapsto \frac{1}{x}$   
 –  $D_{\max} = \mathbb{R} \setminus \{0\}; W = \mathbb{R} \setminus \{0\}$   
 – Asymptoten:  $x = 0, y = 0$   
 – Graph: punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung, fallend  
 –  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$   
 – Nullstelle: keine
- d)  $f: x \mapsto \sin x$   
 –  $D_{\max} = \mathbb{R}; W = [-1; 1]$   
 – Graph: punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung  
 – Amplitude: 1; Periode:  $2\pi$   
 – Nullstellen:  $x_k = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- e)  $f: x \mapsto 2^x$   
 –  $D_{\max} = \mathbb{R}; W = \mathbb{R}^+$   
 – Graph: durchgehend steigend  
 – Asymptote:  $y = 0$  (für  $x \rightarrow -\infty$ )  
 – Nullstelle: keine  
 –  $f(0) = 1$
- 4**
- a)  $s_1 = \frac{0,5 - \sqrt{4,25}}{2} \approx -0,78, s_2 = 0, s_3 = \frac{0,5 + \sqrt{4,25}}{2} \approx 1,28$     b)  $t = -1$   
 c)  $x_k = k\pi, k \in \mathbb{Z}$     d)  $t = -5$     e)  $x = 2$     f) keine    g)  $x_1 = 3; x_1 = 0$   
 h)  $s_1 = 0$  (doppelt),  $s_2 = 0,5$     i)  $t_1 = -1, t_2 = -0,5$  (doppelt),  $t_3 = 1, t_4 = 4$   
 k)  $x_1 = -2, x_2 = -1, x_3 = 1, x_4 = 2$

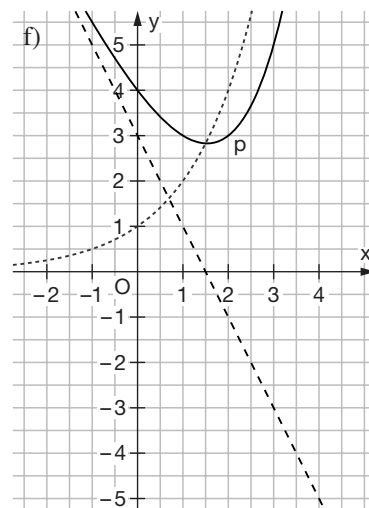
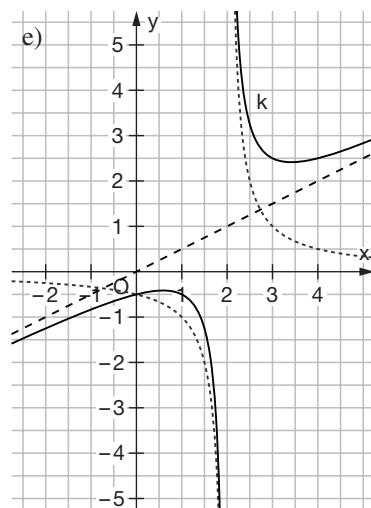
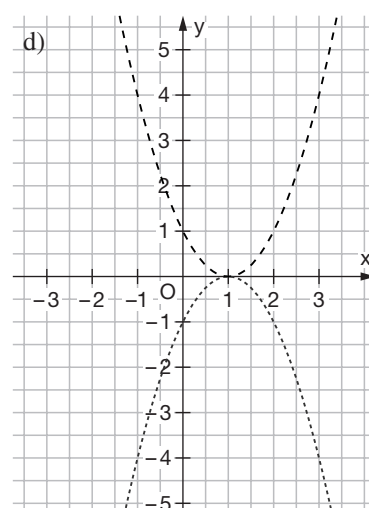
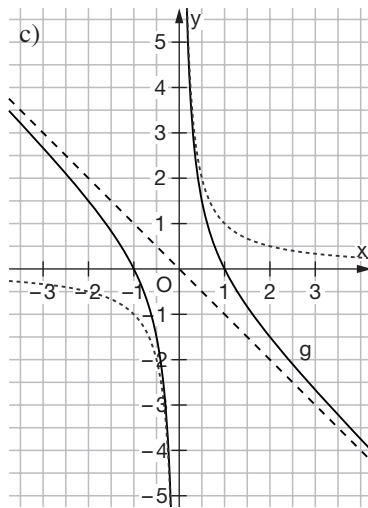
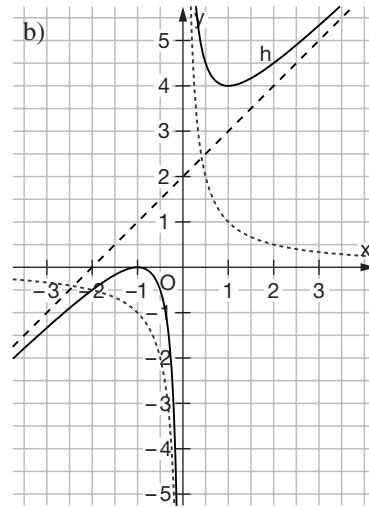
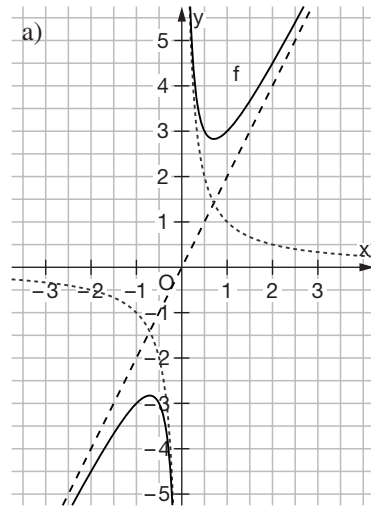


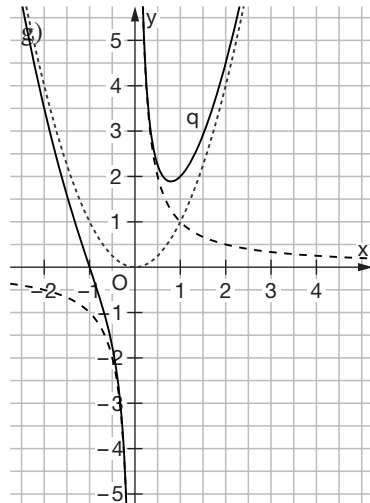
- 5** Lineare Funktion: f, k  
 Quadratische Funktion: w  
 Ganzrationale Funktion höheren Grades: b, i, j, n, s, t  
 Gebrochen rationale Funktion: d, h, l, o, p, u, y, z  
 Trigonometrische Funktion: a, m, q, v  
 Exponentialfunktion: c, g  
 Wurzelfunktion: e, r
- Zuordnung:  $1 \rightarrow E, 2 \rightarrow S, 3 \rightarrow U, 4 \rightarrow A, 5 \rightarrow P$   
 Lösungswort (rückwärts gelesen): PAUSE



- 6** Individuelle Lösungen

7





S. 150



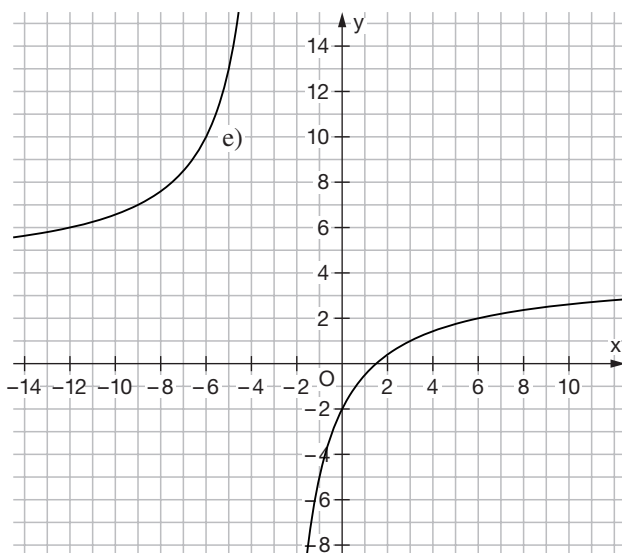
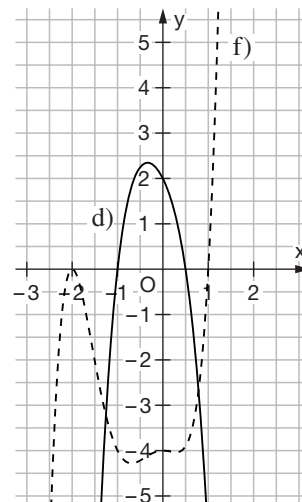
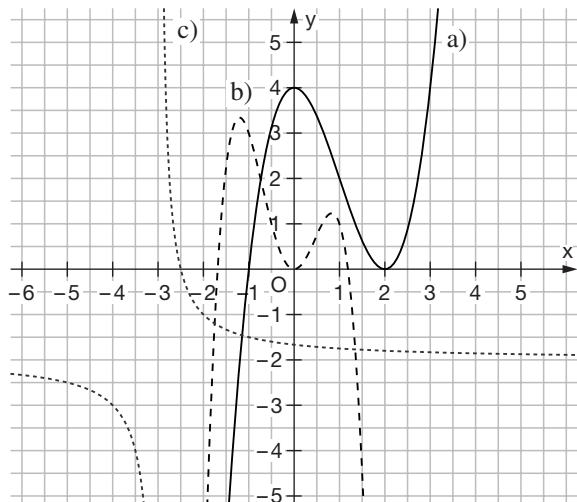
- 8 a) f: Gebrochen rationale Funktion  
 $D_{\max} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ;  $W = \mathbb{R} \setminus \{0,5\}$ ; Asymptoten:  $x = -1$ ,  $y = 0,5$ ;  
 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0,5$ ; Nullstelle:  $x = -3$
- b) g: Lineare Funktion  
 $D_{\max} = \mathbb{R}$ ;  $W = \mathbb{R}$ ; durchgehend fallender Graph;  
 Steigung:  $m = -0,5$ ;  $t = f(0) = 1$ ; Nullstelle:  $x = 2$
- h: Exponentialfunktion  
 $D_{\max} = \mathbb{R}$ ;  $W = \mathbb{R}^+$ ; durchgehend steigender Graph;  
 Asymptote:  $y = 0$  (für  $x \rightarrow -\infty$ ); Nullstelle: keine;  $f(0) = 1$
- k: Quadratische Funktion  
 $D_{\max} = \mathbb{R}$ ;  $W = ]-\infty; 2[$ ; Graph: Nach unten offene Parabel, die enger als die Normalparabel ist; Nullstellen:  $x_1 = 0,5$ ,  $x_2 = 2,5$ ;  $f(0) = 2,5$ ;  
 Scheitel:  $(1,5|2)$ ; achsensymmetrisch bzgl. der Geraden  $x = 1,5$
- $f(x) = \frac{0,5x+1,5}{x} + 1$                        $g(x) = -0,5x + 1$   
 $h(x) = 1,5^x$                                $k(x) = -2x^2 + 6x - 2,5$



9 Individuelle Lösungen



	Definitionslücken	Nullstellen	$f(x) > 0$	$f(x) < 0$
a)	keine	$x_1 = -1$ $x_2 = 2$ (doppelt)	$x \in ]-1; +\infty[ \setminus \{2\}$	$x \in ]-\infty; -1[$
b)	keine	$x_1 = 0$ (doppelt) $x_{2/3} = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{4}$ also $x_2 \approx -1,69$ $x_3 \approx 1,19$	$x \in ]-1,69; 1,19[$	$x \in \mathbb{R} \setminus ]-1,69; 1,19[$
c)	$x = -3$	$x = -2,5$	$x \in ]-3; -2,5[$	$x \in ]-\infty; -3[$ $\cup ]-2,5; +\infty[$
d)	keine	$x_1 = -1$ ; $x_2 = 0,5$	$x \in ]-1; 0,5[$	$x \in \mathbb{R} \setminus ]-1; 0,5[$
e)	$x = -3$	$x = 1,5$	$x \in ]-\infty; -3[$ $\cup ]1,5; +\infty[$	$x \in ]-3; 1,5[$
f)	keine	$x_1 = -2$ (doppelt) $x_2 = 1$	$x \in ]1; +\infty[$	$x \in ]-\infty; 1[ \setminus \{-2\}$

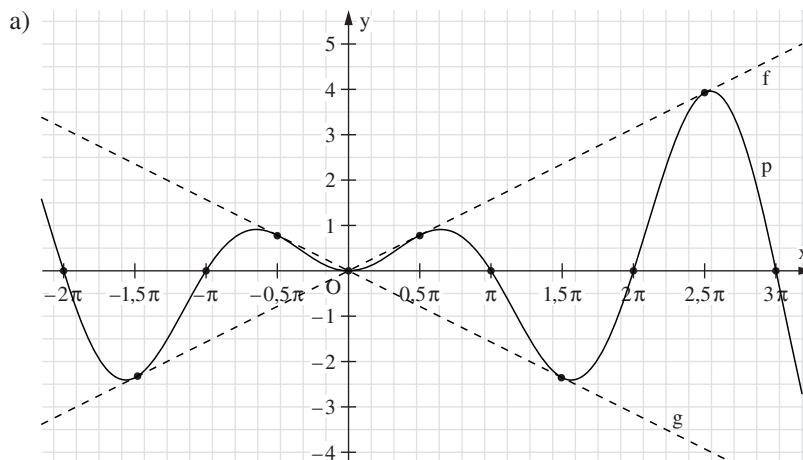


11

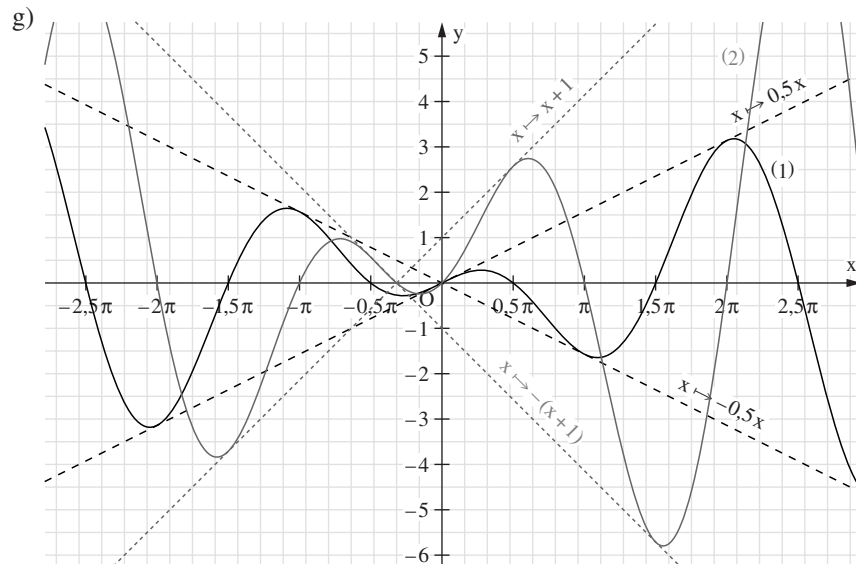
	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
$\lim_{x \rightarrow +\infty}$	0	0	0	0	0,05	1	0
$\lim_{x \rightarrow -\infty}$	$-\infty$	$+\infty$	0	$-\infty$	0,05	-	-



12

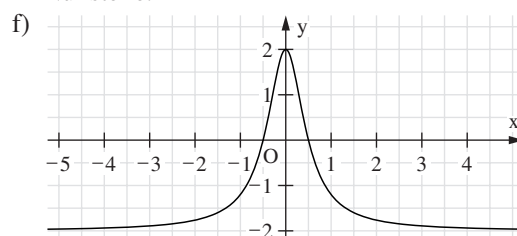


- b)  $p$  und  $h$  besitzen die gleichen Nullstellen  $x_k$ , da  $p(x) = f(x) \cdot h(x) = 0$  genau dann, wenn  $f(x) = 0$  oder  $h(x) = 0$  gilt.  
Also:  $x_k = k \cdot \pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}_0^+$
- c) Für die angegebenen  $x$ -Werte besitzt die Funktion  $h$  jeweils den Funktionswert 1.  
Mit  $p(x) = f(x) \cdot h(x)$  folgt, dass für diese  $x$ -Werte  $p(x) = f(x)$  gilt.  
Da außerdem mit  $\sin x \in ]-1; 1[$   $f(x) \cong p(x)$  für  $x \cong 0$  gilt, berühren sich die beiden Graphen an den entsprechenden  $x$ -Werten, schneiden sich aber nicht.  
Für  $x = 1,5\pi; 3,5\pi; 5,5\pi; \dots$  berührt der Graph von  $p$  den Graphen von  $g$ .
- d) – f) Siehe Zeichnung



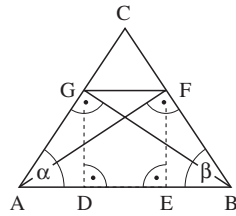
S. 151

- 13  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1,5 \cdot \sqrt{x - \frac{1}{2}}\right) = +\infty$ ;  $x = 1$ ;  $y = 1$   
Somit gehört der rechte Graph zur angegebenen Funktion.
- 14 Die angegebene Funktion ist weder linear, noch besitzt sie eine Definitionslücke. Ihr Graph ist jedoch punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung. Daher gehört der blaue Graph zur Funktion.
- 15 a)  $x^2 > 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$   
 $\Rightarrow x^2 + 0,25 > 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$   
 $\Rightarrow D_{\max} = \mathbb{R}$
- b)  $f(-x) = \frac{1}{(-x)^2 + 0,25} - 2 = \frac{1}{x^2 + 0,25} - 2 = f(x)$   
 $\Rightarrow$  Der Graph von  $f$  ist achsensymmetrisch zur  $y$ -Achse.
- c) Für  $x = 0$  nimmt der Nenner  $x^2 + 0,25$  den kleinstmöglichen Wert und der Quotient  $\frac{1}{x^2 + 0,25}$  den größtmöglichen Wert an. Somit ergibt sich dort der größtmögliche Funktionswert  $f(0) = 2$ .
- d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$
- e) Da  $f$  bei  $x = 0$  den größtmöglichen Funktionswert besitzt, für  $x > 0$  fällt und  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$  gilt, besitzt  $f$  für  $x > 0$  genau eine Nullstelle.  
Aufgrund der Achsensymmetrie von  $f$  bzgl. der  $y$ -Achse ergibt sich für  $x < 0$  eine weitere Nullstelle.





🕒 👤 **16** Individuelle Lösungen

**17**

Für die beiden Dreiecke  $ABG$  und  $ABF$  gilt:

$\alpha = \beta$ ,  $[AB]$  ist gemeinsame Dreiecksseite,

$\sphericalangle AGB = \sphericalangle AFB = 90^\circ$ .

Damit sind die beiden Dreiecke nach dem SWW-Satz

kongruent und es gilt  $\overline{DE} = \overline{EF}$ .

Somit folgt:  $AB \parallel GF$ .