

V Ganzrationale Funktionen

1 Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten

S. 108

- 1 $f(2r) = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (2r)^3 = 8 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi r^3 \Rightarrow$ Volumen verachtfacht sich;
 analog: $f\left(\frac{r}{2}\right) = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi r^3 \Rightarrow$ Volumen reduziert sich auf den achten Teil.
 Entsprechend wird der Oberflächeninhalt vervierfacht bzw. geviertelt.

S. 109

- 2 a) $n = 2$ b) $n = 3$ c) n beliebig d) $n = 5$
- 3 a) $n = 2, a = 2;$ „von links oben nach rechts oben“
 b) $n = 2, a = -\frac{1}{8};$ „von links unten nach rechts unten“
 c) $n = 3, a = \frac{1}{8};$ der prinzipielle Verlauf kann allein durch Kenntnis der Punkte R und S **nicht** angegeben werden.
 d) $n = 4, a = 8;$ der prinzipielle Verlauf kann allein durch Kenntnis der Punkte R und S **nicht** angegeben werden.
 e) $n = 5, a = -0,1;$ „von links oben nach rechts unten“

i

- 4 $n = 8$
Hinweis: Hier ist Strategie gefragt! Am besten wohl die Strategie „Zielgerichtetes Probieren“: Es kann ob des Verlaufes des Graphen nur eine geradzahlige Lösung sein. Einen guten Anhaltspunkt liefert der Punkt $(1,25|6)$, der nahezu auf dem Graphen liegt: Testet man $1,25^4, 1,25^6, 1,25^8$ so erkennt man: $1,25^8 = 5,960\dots$; alle anderen Potenzen liefern keine Werte in der Nähe von 6. Also erhält man als Lösung $n = 8$.
 Analytisch kann man hier nicht vorgehen, da es keinen sinnvollen Gitterpunkt gibt, der auf dem Graphen liegt.

i

- 5 Nachweis für Q: $0,5 \cdot 2^3 = 0,5 \cdot 8 = 4;$ Nachweis für P: $0,5 \cdot (-1)^3 = 0,5 \cdot (-1) = -0,5$
Hinweis: Der anzugebende Term kann nicht der Term einer Potenzfunktion sein, da es nur eine Potenzfunktion durch zwei Punkte geben kann (außer die Punkte $(-1|-1)$ und $(1|1)$), da der Ansatz für einen Potenzfunktionsterm auf zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten führt. Man muss nach anderen Funktionen suchen, z. B. lineare oder quadratische.
 (Für weitere Funktionstypen sind die Lösungsansätze komplexer und werden eher nicht gewählt.)
 Mögliche Lösungen: Lineare Funktion: $g(x) = 1,5x + 1$
 quadratische Funktion: $g(x) = 1,5x^2 - 2$ (Ansatz: $g(x) = ax^2 + c$)

- 6 a) doppelter Radius: $f(2 \cdot r) = (2r)^2 \cdot \pi = 4 \cdot r^2 \pi$ vierfacher Flächeninhalt
 analog: gedrittelter Radius \Rightarrow Flächeninhalt beträgt ein Neuntel des ursprünglichen Flächeninhalts
 doppelter Radius: $f(2 \cdot r) = 2 \cdot (2 \cdot r) \cdot \pi = 2 \cdot 2r\pi$ doppelter Umfang
 analog: gedrittelter Radius \Rightarrow gedrittelter Umfang
- b) Vergrößerung des Radius um 20 %: $V(1,2r) = \frac{4}{3} \cdot (1,2r)^3 \cdot \pi = 1,2^3 \cdot \frac{4}{3} r^3 \cdot \pi$
 Volumen vergrößert sich um das $1,2^3$ -fache.
 analog: gedrittelter Radius \Rightarrow Volumen beträgt $\frac{8}{27}$ des ursprünglichen Volumen.
 Vergrößerung des Radius um 20 %: $O(1,2r) = 4 \cdot (1,2r)^2 \cdot \pi = 1,2^2 \cdot 4r^2 \cdot \pi$
 Oberfläche vergrößert sich um das $1,2^2$ -fache.
 analog: gedrittelter Radius \Rightarrow Oberfläche beträgt $\frac{4}{9}$ der ursprünglichen Oberfläche.

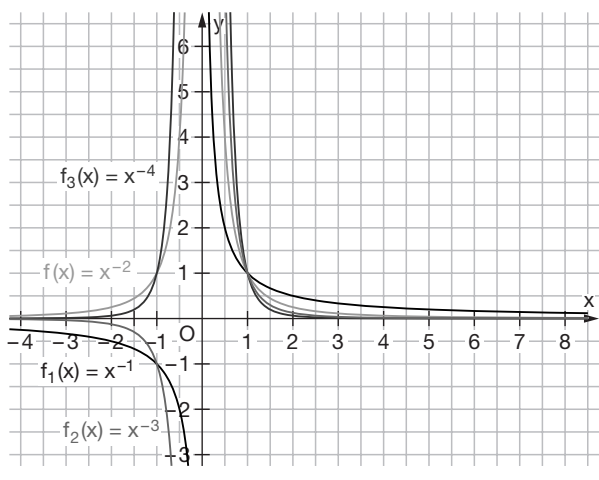
S. 110

- 7 $V_{\text{linkes Glas}} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \frac{d^2}{4} \cdot \pi;$ $V_{\text{rechtes Glas}} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \frac{9}{16} d^2 \cdot \pi = \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot h \cdot \frac{d^2}{4} \cdot \pi$
 also: $V_{\text{rechtes Glas}} = 2,25 \cdot V_{\text{linkes Glas}};$ es passen 125 % mehr in das rechte Glas.

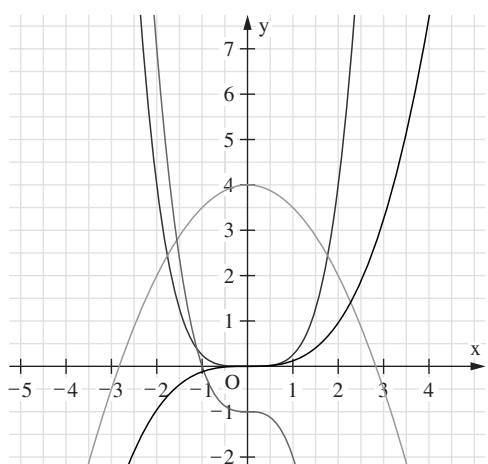
- 8 a) Wahr. $1^n = 1$ für alle n aus \mathbb{N}
 b) Falsch. Z.B. ist der Graph der Funktion $x \mapsto x^2$ achsensymmetrisch.
 c) Wahr. $x \mapsto x^2$ hat die Wertemenge \mathbb{R}_0^+ und $x \mapsto x^3$ hat die Wertemenge \mathbb{R} .
 d) Falsch. Z.B. haben die Graphen der Funktionen $x \mapsto x^2$ und $x \mapsto x^4$ drei Schnittpunkte.
 e) Falsch. Z.B. gibt es für jeden Punkt $(1|2)$ kein n . Denn $1^n = 2$ ist nicht lösbar.
 f) Falsch. Z.B. weisen $x \mapsto x^2$ und $x \mapsto x^3$ für $x < 0$ unterschiedliches Steigungsverhalten auf.

- 9 Allgemeine Potenzfunktion: a^n
 I. $11,2 = a \cdot 4^n$
 II. $34,3 = a \cdot 7^n$ } Lösen des Gleichungssystems führt zu $a = 0,7$ und $n = 2$, also $0,7^2$.
 Überprüfen der restlichen Werte bestätigt die Potenzfunktion.

- 10 $r_{\text{neu}} = 1,053 \cdot r$
 a) $V_{\text{neu}} = \frac{4}{3} \cdot (1,053 \cdot r)^3 \cdot \pi \approx 1,16 \cdot \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$; Volumen vergrößert sich um 16,76%.
 b) $1 : 1,1676 \approx 0,8565$; das Volumen der alten Bälle war um 14,35 % kleiner.
 @ c) Zweck der Vergrößerung war eine Verlangsamung des Spiels und damit eine Steigerung der Attraktivität des Spiels für die Zuschauer.

11 

Steigungsverhalten:
 für ungerade n : für $x < 0$ nehmen mit wachsenden x -Werten die Funktionswerte ab, für $x > 0$ ebenso.
 für gerade n : für $x < 0$ nehmen mit wachsenden x -Werten die Funktionswerte zu, für $x > 0$ ab.
 Wertemenge:
 für ungerade n : $W = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
 für gerade n : $W = \mathbb{R}^+$
 Symmetrie:
 für ungerade n : Punktsymmetrie bezüglich des Ursprungs
 für gerade n : Achsensymmetrie zur y -Achse

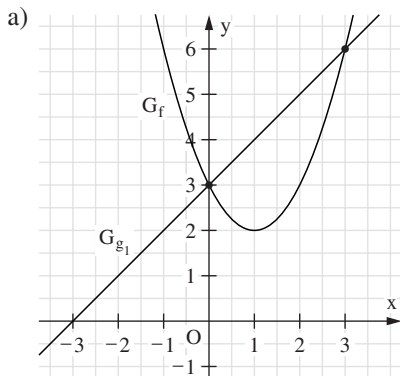
12 

rot: $f(x) = \frac{1}{4}x^4$
 grün: $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4$
 blau: $f(x) = -x^3 - 1$
 schwarz: $f(x) = 0,12x^3$

- 13 a) $2x^2 = 0,1x^4 \Rightarrow 0 = x^2 \cdot (0,1x^2 - 2)$
 für $x \in]-\sqrt{20}; \sqrt{20}[\setminus \{0\}$ verläuft G_f oberhalb von G_n .
 b) $0,5x^3 = 2x^6 \Rightarrow 0 = x^3 \cdot (2x^3 - 0,5)$
 für $x \in]0; \sqrt[3]{0,25}[$ verläuft G_f oberhalb von G_n .

- 14 Z.B. $f(x) \mapsto -x^2+4$ und $g(x) \mapsto x^2-4$
 (allgemein: $f(x) \mapsto -x^2+4+c$ und $g(x) \mapsto -x^2-4+c$)
 oder für $f(x) \mapsto -x^2+5$ und $g(x) \mapsto 1$
 (allgemein: $f(x) \mapsto -x^2+4+c$ und $g(x) \mapsto c$)

15 $f(x) = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$ $g_1(x) = x + 3$



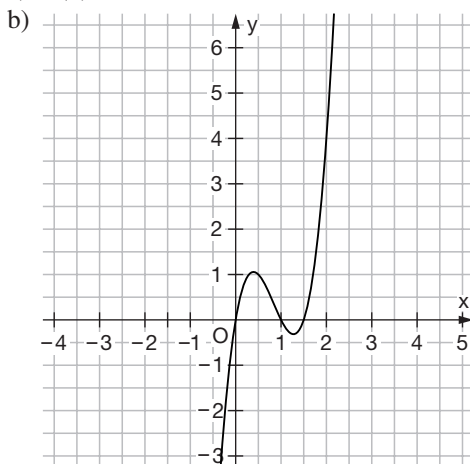
- b) $x^2 - 2x + 3 = x + 3 \Rightarrow x^2 - 3x = 0$ also $S_1(0|3)$; $S_2(3|6)$
 c) $x^2 - 2x + 3 = mx + 3 \Rightarrow x^2 - x(2+m) = 0$;
 ein Berührungspunkt bedeutet Diskriminante = 0, also $\sqrt{(2+m)^2} = 0 \Rightarrow m = -2$
 Berührungspunkt $B(0|3)$.

16 $4 \cdot 1,2^x - 7 \cdot 0,9^x = 0 \Rightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{7}{4} \Rightarrow x = \frac{\lg \frac{7}{4}}{\lg \frac{4}{3}} \approx 1,95$

2 Eigenschaften ganzrationaler Funktionen

S. 111

1 a) $V(x) = l \cdot b \cdot h = (3-2x) \cdot (2-2x) \cdot x = 4x^3 - 10x^2 + 6x$

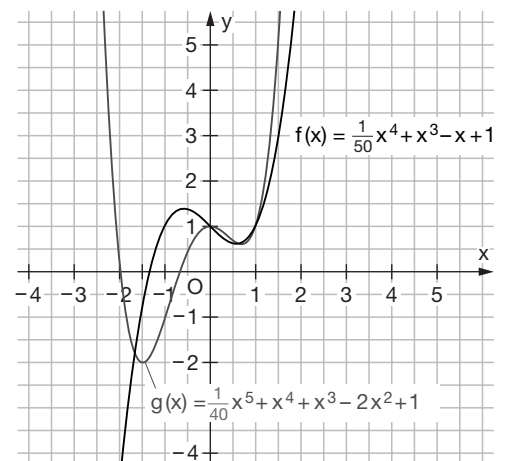


S. 113

- 2 a) Ganzrational mit Grad 5: $a_5 = 1$; $a_3 = -2$; $a_0 = 2$; $a_4 = a_2 = a_1 = 0$
 b) Ganzrational mit Grad 1: $a_1 = \sqrt{5}$; $a_0 = 1$
 c) Nicht ganzrational
 d) Ganzrational mit Grad 5: $a_5 = -1$; $a_1 = -3$; $a_4 = a_3 = a_2 = a_0 = 0$ $d(x) = -x^5 - 3x$
 e) Ganzrational mit Grad 2: $a_2 = 1$; $a_1 = -\frac{1}{3}$; $a_0 = 0$
 f) Nicht ganzrational
 g) Ganzrational mit Grad 3: $a_3 = 1$; $a_2 = -9$; $a_1 = 15$; $a_0 = -7$ $g(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 7$
 h) Nicht ganzrational

- 3 a) Entscheidende Potenz: $-2x^6$ „von links unten nach rechts unten“
 b) $f(x) = -x^5 + x^3$ „von links oben nach rechts unten“
 c) Entscheidende Potenz: x^3 „von links unten nach rechts oben“
 d) Entscheidende Potenz: $10^{-7} \cdot x^7$ „von links unten nach rechts oben“
 e) Entscheidende Potenz: x^4 „von links oben nach rechts oben“
 (Grad des Klammerterms ist 3, deshalb Ausmultiplizieren unnötig)
 f) $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 - 1$ „von links oben nach rechts unten“
 g) $f(x) = -x^n + x^3$
 für $n = 0, 1$ oder 2 : „von links unten nach rechts oben“
 $n = 3$; $f(x) = 0$: kein charakteristischer Verlauf angebar
 $n > 3$: n gerade: „von links unten nach rechts unten“
 n ungerade: „von links oben nach rechts unten“
 h) $f(x) = -x^3 + x^2$ „von links oben nach rechts unten“
 i) $f(x) = 18x^4 - 48x^3 + 32x^2$ „von links oben nach rechts unten“
 k) für $n = 0$; $f(x) = -1$: kein charakteristischer Verlauf angebar
 $n > 0$: „von links oben nach rechts unten“;
 der Exponent ist stets gerade
 l) $f(x) = x^7 + 2x^6 - 4x^5 + x^4 - 4x^3 + 4x^2$ „von links unten nach rechts oben“
 m) $f(x) = -x^{10} + x^8 - 5x^6 - 5x^4 - 6x^2 + 6$ „von links unten nach rechts unten“
- 4 a) „von links oben nach rechts unten“: z. B. $2x - x + 7$; $x^{10} + x^7 - 5x^2$
 „von links unten nach rechts oben“: z. B. $5x^5 - 1$; $1,5x^9 - 5x^8 + 2$
 „von links unten nach rechts unten“: z. B. $-4x^6 - 2x$; $-7x^2 + 1$
 „von links oben nach rechts unten“: z. B. $-6x^3 + 4x^2 + x - 6$; $-x^5 + 3$
 b) Individuelle Lösungen
- 5 Nullstelle bei $x = 0$: e, f, h
 Graph schneidet die x-Achse (ohne Berühren): a, f, p, h, b
 Graph berührt die x-Achse: d, e
 Charakteristischer Verlauf: „von links oben nach rechts oben“: d, e, g
 „von links unten nach rechts oben“: b
 „von links unten nach rechts unten“: p
 „von links oben nach rechts unten“: a, f, h
 Funktion ist ganzrational: a, b, d, e, f, g, h, p
 Graph ist eine Parabel: d, g, p
 Graph ist eine Gerade: h, p
 Graph hat eine Asymptote: c, k

- 6 a) Wird ein normaler Ausschnitt im x-Bereich zum Plotten gewählt (z. B. von -10 bis 10), so sieht der geplottete Ausschnitt des Graphen aus wie der Graph einer ganzrationalen Funktion dritten Grades. Ändert man den x-Bereich passend, so erkennt man, dass f bei etwa -50 eine weitere Nullstelle hat und der Graph in der Tat „von links oben nach rechts oben“ verläuft.
 b) Z. B. $g(x) = \frac{1}{40}x^5 + x^4 + x^3 - 2x^2 + 1$; im Bereich von -10 bis 10 sieht der Graph aus wie der Graph einer ganzrationalen Funktion vierten Grades.



7 $1 \ x \mapsto x^3+x^2+1 \ N$; $2 \ x \mapsto -2x^2+2x+2 \ E$; $3 \ x \mapsto -x^5-3x^2 \ I$; $4 \ x \mapsto -x^3+x+1 \ R$;
 $5 \ x \mapsto x^4-2x^2+1 \ E$; $6 \ x \mapsto x^3+x^2+x \ F$ Lösungswort (von hinten gelesen?): FERIEN

8 a) f hat Grad 4. Grad 5 und 3 kann nicht sein, da f sonst eine dritte Nullstelle haben müsste.
 Da der Graph keine Parabel bzw. keine Gerade ist, scheiden Grad 2 bzw. Grad 1 aus. Also muss es sich um Grad 4 handeln, da der Grad kleiner als 6 ist.

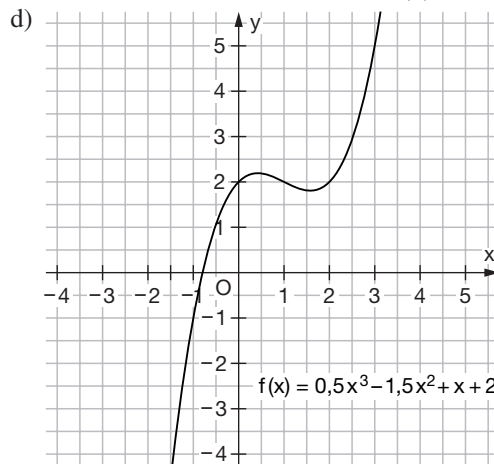
b) $f(x) = 1,5x^4 + 3x^3 - 0,5x^2 + 2$

9 a) klar

b) $d = 2$, da der Graph durch den Punkt $B(0|2)$ verläuft.

$$\left. \begin{array}{l} \text{c) I} \quad -a + b - c + 2 = -1 \\ \text{II} \quad a + b + c + 2 = 2 \\ \text{III} \quad 4a + 2b + c + 1 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow a = 0,5; b = -1,5; c = 1$$

$$f(x) = 0,5x^3 - 1,5x^2 + x + 2$$



10 a) $5a(a-3)$ b) $(r+s)(r-s)$ c) $12t^2r^2(3t+4r)$ d) $8x^3(3x^2-1)$
 e) $(b-2)(b-3)$ f) geht nicht g) $2z(z+1)(z-1)$ h) $2 \cdot (x-1)(x-2)$

3 Nullstellen und Faktorisieren

S. 115

1 $f(0) = 2$; $N_1(2|0)$; $N_2(1|0)$; $N_3(-1|0)$ Skizze klar

S. 119

2 a) $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x_3 = -2$ b) $x_1 = 2$; $x_2 = -1$ c) $t_1 = \sqrt{0,5}$; $t_2 = -\sqrt{0,5}$
 d) $x = 0,2$ e) keine Nullstellen f) $x_1 = x_2 = \sqrt{2}$; $x_3 = x_4 = -\sqrt{2}$
 g) $s_1 = s_2 = 0$; $s_3 = 3$; $s_4 = -3$ h) $x_1 = x_2 = 0$; $x_3 = -\sqrt[3]{0,5}$ i) $r_1 = \sqrt[4]{0,5}$; $r_2 = -\sqrt[4]{0,5}$
 k) $t_1 = 0$; $t_2 = -2$; $t_3 = 4$ l) $t_1 = t_2 = t_3 = 2$; $t_4 = \sqrt[3]{0,4}$ m) $r_1 = \frac{1}{2}$; $r_2 = -4$

3 a) Substitution: $t^2 = z$ $t_1 = \sqrt{3}$; $t_2 = -\sqrt{3}$; $t_3 = \sqrt{2}$; $t_4 = -\sqrt{2}$
 b) Substitution: $x^2 = z$ $x_1 = \sqrt{2}$; $x_2 = -\sqrt{2}$
 c) Substitution: $s^2 = z$ $s_1 = \sqrt{5}$; $s_2 = -\sqrt{5}$; $s_3 = 1$; $s_4 = -1$
 d) Substitution: $v^2 = z$ $v_1 = v_2 = 0$; $v_3 = 4$; $v_4 = -4$
 e) Substitution: $t^2 = z$ $t_1 = 2$; $t_2 = -2$
 f) Substitution: $t^3 = z$ $t_1 = \sqrt[3]{2}$; $t_2 = -\sqrt[3]{4}$
 g) Substitution: $x+1 = z$ $x_1 = 1$; $x_2 = -1$; $x_3 = -4$
 h) Substitution: $(v-1)^2 = z$ $v_1 = 3$; $v_2 = -1$

- 4 a) $f(1) = 0$; $(x^3 + 10x^2 + 7x - 18) : (x - 1) = x^2 + 11x + 18$; $x_1 = 1$; $x_2 = -2$; $x_3 = -9$
 b) $g(4) = 0$; $(x^3 + 5x^2 - 22x - 56) : (x - 4) = x^2 + 9x + 14$; $x_1 = 4$; $x_2 = -7$; $x_3 = -2$
 c) $k(-1 - \sqrt{2}) = 0$; $s_1 = -1 - \sqrt{2}$; $s_2 = -1 + \sqrt{2}$ [keine Polynomdivision notwendig]
 d) $r(-\frac{1}{3}) = 0$; $(3x^3 + 7x^2 - 22x - 8) : (x + \frac{1}{3}) = 3x^2 + 6x - 24$; $x_1 = \frac{1}{3}$; $x_2 = -4$; $x_3 = 2$
 e) $d(-2) = 0$; $(2s^3 + 4,8s^2 + 1,5s - 0,2) : (s + 2) = 2s^2 + 0,8s - 0,1$;
 $s_1 = -2$; $s_2 = 0,1$; $s_3 = -0,5$
 f) $k(0,4) = 0$; $(5x^3 + 3x^2 - 12x + 4) : (x - 0,4) = 5x^2 + 5x - 10$; $x_1 = 0,4$; $x_2 = -2$; $x_3 = 1$

- 5 a) Kosten der Verpackung = $3 \text{ ct} \cdot O_{\text{Dose}} \approx 3 \text{ ct} \cdot 2,83 \text{ dm}^3 \approx 8,48 \text{ ct}$
 $(O_{\text{Dose}} = 2r^2 \cdot \pi + 4 \cdot r \cdot 2 \cdot r \cdot \pi = 10r^2 \cdot \pi$; $r = 0,3 \text{ dm}$)
 Kosten des Inhalts = $15 \text{ ct} \cdot V_{\text{Dose}} \approx 15 \text{ ct} \cdot 0,34 \text{ dm}^3 \approx 5,1 \text{ ct}$
 $(V_{\text{Dose}} = 4r^3 \cdot \pi$; $r = 0,3 \text{ dm}$)
 b) $10r^2 \cdot \pi \cdot 3 \leq 4r^3 \cdot \pi \cdot 15 \Rightarrow r \leq 0,5 \text{ dm}$

- 6 a) $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ b) $g(t) = (t+1)(t+2)(t-2)$
 c) $k(u) = (u-3)^2$ b) $h(a) = (a-3)(a+0,5)^2$
 e) $r(s) = -2(s-4)(s+1)$ f) $d(s) = (x - \sqrt{2+2\sqrt{2}})(x + \sqrt{2+2\sqrt{2}})(x^2 - (2-2\sqrt{2}))$

- 7 orange: drei einfache Nullstellen
 violett: eine einfache und eine doppelte Nullstelle
 rot: eine dreifache Nullstelle

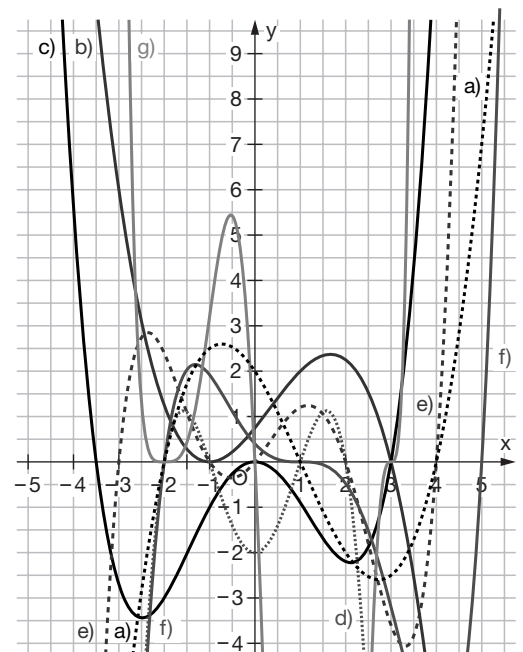
- 8 a) $S_1(1|0)$; $S_2(1 + \frac{1}{2}\sqrt{10} | \frac{1}{4}\sqrt{10})$; $S_3(1 - \frac{1}{2}\sqrt{10} | \frac{3}{4}\sqrt{10})$
 b) $S_1(0|-1)$; $S_2(1|-3)$; $S_3(4|3)$
 c) $S_1(1|-6)$; $S_2(-2|55)$

- 9 a) $f_2(x) = 2x^3 - 2x^2 + 8x$ Nullstelle bei $(0|0)$
 $f_{-10}(x) = 2x^3 + 10x^2 + 8x$ Nullstellen bei $(0|0)$; $(-1|0)$; $(-4|0)$
 b) $|t| > 8$

S. 120

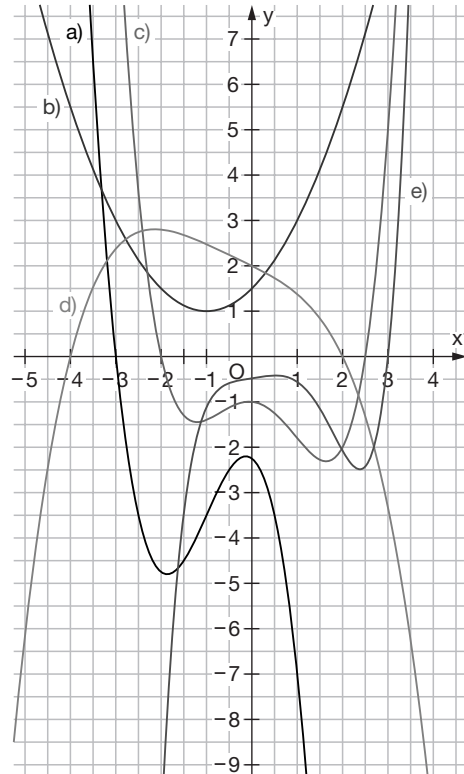
- 10 $f(x) = 0,0025(x+3)^3(x-5)^2$ $g(x) = 0,3 \cdot (x+6)(x+4)(x+2)^2$ $k(x) = 0,4x^3(x-3)$
 $p(x) = -0,02 \cdot (x+3)(x+1)(x-2)^2(x-4)$ $h(x) = 0,2(x-3)^2(x-1)(x-6)$

- 11 a) $a_1 = -2$; $a_2 = 1$; $a_3 = 4$
 VZ wechselt immer
 b) $z_1 = -1$ kein VZW, doppelte NS;
 $z_3 = 3$ VZW
 c) $x_1 = x_2 = 0$ kein VZW;
 $x_3 = 3$; $x_4 = -3,5$ jeweils VZW
 d) $t_1 = -1$; $t_2 = 1$; $t_3 = 2$; $t_4 = -2$
 VZ wechselt immer
 e) $x_1 = 0$; $x_2 = -3$; $x_3 = -1$; $x_4 = 2$; $x_5 = 4$
 VZ wechselt immer
 f) $x_1 = -2$; $x_2 = x_3 = x_4 = 1$; $x_5 = 5$
 VZ wechselt immer
 g) $x_1 = 0$; $x_2 = x_3 = x_4 = 3$ VZ wechselt;
 $x_5 = -2$ vierfache NS \Rightarrow kein VZW
 ((Anmerkung: der Tiefpunkt liegt bei $(1,41 | -38,22)$)

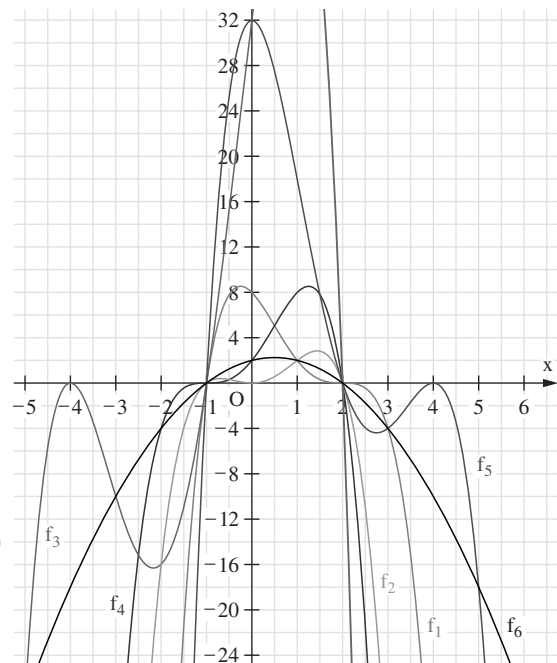


- 12 a) Für $x \in]-2; 0[$ und $x > 2$
 b) Für $x \in]-2; \infty[\setminus \{3\}$
 c) Für $x < \frac{1-\sqrt{41}}{2}$ und $x \in]-2,5; 1[$ und $x > \frac{1+\sqrt{41}}{2}$
 d) Für $x < -1$ und $x \in]2-\sqrt{2}; 2+\sqrt{2}[$
 Hinweis: $(-0,5x^2 + 1,5x^2 + x - 1) : (x + 1) = -0,5x^2 + 2x - 1$
 e) Für $x < -\sqrt{3}$ und $x \in]-1; 1[$ und $x > \sqrt{3}$
 Hinweis: Berechnung der Nullstellen durch Substitution

- 13 f(x) gehört zum grünen Graphen
 g(x) gehört zum gelben Graphen
 (NS bei 2 und -2)
 h(x) gehört zum blauen Graphen
 k(x) gehört zum schwarzen Graphen
 (nach oben geöffnet)
- 14 Individuelle Lösungen
 für die möglichen Verläufe
 Graphen s. Abbildung rechts (?)



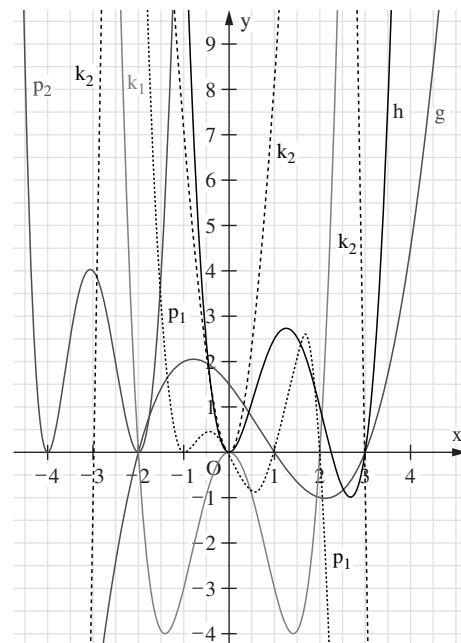
- 15 Fall 1: bei $x = -1$ liegt eine einfache,
 bei $x = 2$ eine dreifache NS vor;
 $f_1(x) = -(x+1)(x-2)^3$
 Fall 2: bei $x = -1$ liegt eine dreifache,
 bei $x = 2$ eine einfache NS vor;
 z. B. $f_2(x) = -(x+1)^3(x-2)$
 Fall 3: bei $x = -1$ und $x = 2$ liegen
 einfache Nullstellen vor und eine
 doppelte NS im ersten weißen
 Bereich;
 z. B. $f_3(x) = -(x+4)^2(x+1)(x-2)$
 Fall 4: wie Fall 3, die doppelte NS liegt
 jetzt im mittleren weißen Bereich;
 z. B. $f_4(x) = -x^2(x+1)(x-2)$
 Fall 5: wie Fall 3, die doppelte NS liegt
 jetzt im rechten weißen Bereich;
 z. B. $f_5(x) = -(x-4)^2(x+1)(x-2)$
 Fall 6: bei $x = -1$ und $x = 2$ liegen
 einfache Nullstellen vor;
 z. B. $f_6(x) = -(x+1)(x-2)$



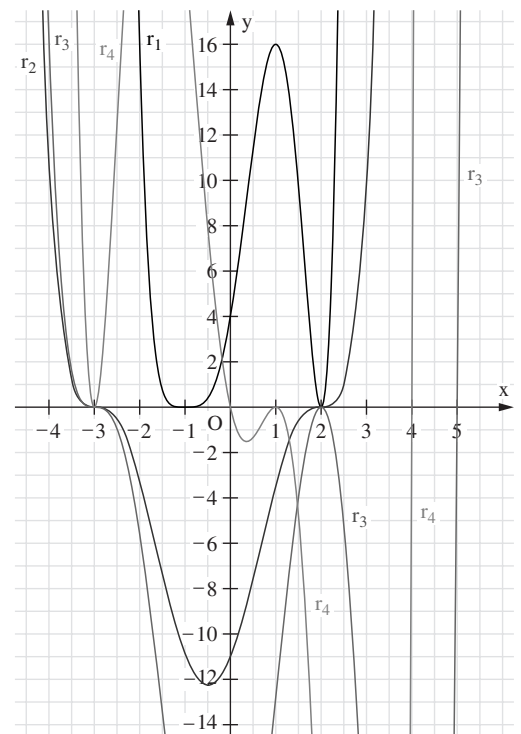
S. 121

- 16 a) Funktion g: $g(x) = 0,25(x+2)(x-1)(x-3)$
 Funktion f: es existiert keine Lösung
 Funktion k: wegen der Symmetrie muss die doppelte Nullstelle bei $x = 0$ liegen; die einfachen NS liegen dann bei $x = a$ und $x = -a$, also $k(x) = x^2(x-a)(x+a)$
 Funktion p: für die eine doppelte Nullstelle muss $(x+a)^2$ gelten.
 Fall 1: der Graph besitzt noch drei weitere einzelne NS
 z. B. $p_1(x) = -(x+3)^2 \cdot x \cdot (x-2)(x-4)$
 Fall 2: der Graph besitzt noch eine weitere doppelte NS
 z. B. $p_2(x) = -(x+4)^2(x+2)^2(x-1)$
 Funktion h: der Graph besitzt eine doppelte und drei einfache Nullstellen
 z. B. $h(x) = x^2(x-3)^2(x-2,25)$
 Funktion r: Fall 1: der Graph besitzt eine zweifache und eine vierfache NS
 z. B. $r_1(x) = (x-2)^2(x+1)^4$
 Fall 2: der Graph besitzt zwei dreifache NS
 z. B. $r_2(x) = 0,05(x+3)^3(x-2)^2$
 Fall 3: der Graph besitzt eine zweifache, eine dreifache, eine einfache NS
 z. B. $r_3(x) = 0,05(x+3)^3(x-2)^2 \cdot (x-5)$
 Fall 4: der Graph besitzt zwei zweifache und zwei einfache NS
 z. B. $r_4(x) = 0,25(x-1)^2(x+3)^2(x-4) \cdot x$

Graphen zu Funktion g–h

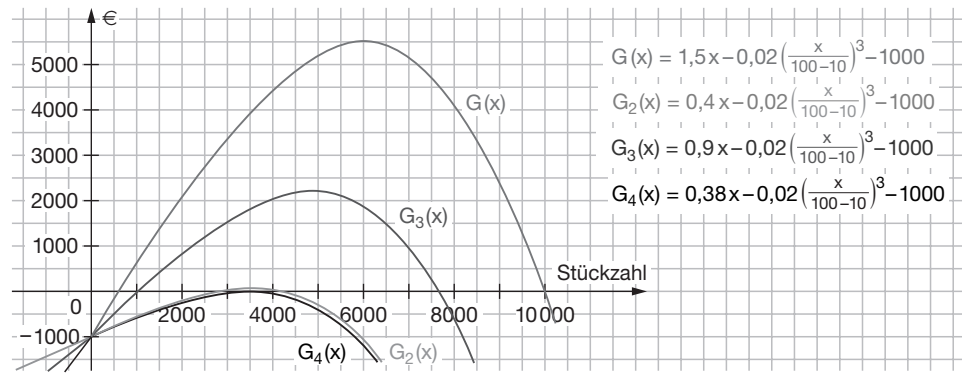


Graphen zu Funktion r



b) Individuelle Lösungen

- 17 a) Die Einnahmen durch den Verkauf von x Stück können mit dem Term $1,5x$ berechnet werden. Der Gewinn errechnet sich dann, indem man von den Einnahmen die Herstellungskosten subtrahiert, also durch $1,5x - K(x)$.
 b) Wegen $K(0) = 1020$ und $G(0) = -1020$ gehört der blaue Graph zur Funktion K und der rote Graph zur Funktion G .
 c) Für $G(x) > 0$ wird ein Gewinn erzielt. Dies ist für $667 \leq x \leq 9822$ der Fall. Bei einer Stückzahl von 6000 ist der Gewinn am größten.
 d) Wird der Verkaufspreis zu gering, so verläuft der Graph (im positiven x -Bereich) nicht mehr oberhalb der x -Achse, somit kann kein Gewinn mehr erzielt werden. Durch Ausprobieren mit einem Funktionsplotter findet man heraus, dass der Graph von G ab $0,38\text{€}$ die x -Achse im positiven Bereich schneidet, es ergibt sich dann erstmals ein Gewinn. Ab Werte von $0,37\text{€}$ und weniger verläuft der Graph immer unterhalb der x -Achse.



- 18 a) Da $1^n - 1 = 1 - 1 = 0$, ist die Zahl 1 Nullstelle des Terms $x^n - 1$. $x^n - 1$ lässt sich somit schreiben als $x^n - 1 = g(x) \cdot (x - 1)$ und somit enthält $x^n - 1$ den Linearfaktor $x - 1$.
 b) $x^n + 1$ enthält den Linearfaktor $x + 1$, wenn -1 eine Nullstelle von $x^n + 1$ ist. Dies ist nur der Fall, wenn n ungerade ist.

19 $f_1(x) = (x + 1)^2(x - 2)^2$

Der Graph hat zwei doppelte Nullstellen; für $x < -1$ verläuft der Graph oberhalb der x -Achse und berührt bei $x = -1$ die x -Achse. Anschließend steigt er, erreicht einen höchsten Punkt, fällt dann wieder, um bei $x = 2$ wieder die x -Achse zu berühren. Danach steigt der Graph wieder an und verläuft nach oben „ins Unendliche“.

$$f_2(x) = (x + 1)(x - 2)^3$$

Der Graph hat eine einfache Nullstelle bei $x = -1$; für $x < -1$ verläuft der Graph oberhalb der x -Achse; für $x > -1$ verläuft er unterhalb der x -Achse; er erreicht einen tiefsten Punkt, steigt dann wieder, um bei $x = 2$ die x -Achse zu überqueren (dreifache NS). Der Graph verläuft für $x > 2$ nach oben „ins Unendliche“.

Weitere Möglichkeiten:

$$f_3(x) = (x + 1)^3(x - 2); \quad f_4(x) = (x + 1)(x - 2)(x^2 + 1)$$

- 20 a) Wahr. Für betragsmäßig große x -Werte wird bei einer ganzrationalen Funktion dritten Grades der Wert durch den Summanden ax^3 bestimmt, wobei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt. Das bedeutet, dass der Graph entweder „von links unten nach rechts oben“ ($a > 0$) oder „von rechts oben nach links unten“ ($a < 0$) verläuft. In beiden Fällen muss der Graph also die x -Achse überqueren und somit hat die Funktion mindestens eine Nullstelle.
 b) Falsch. Z. B. ist $(x + 1)(x - 2)(x^2 + 1)$ der Term einer ganzrationalen Funktion vierten Grades, besteht aber nur aus zwei Linearfaktoren $(x + 1)(x - 2)$ und einem weiteren Faktor $x^2 + 1$, der nicht mehr in zwei Linearfaktoren zerlegt werden kann.
 c) Wahr. Allgemeine Terme der beiden Funktionen $ax^3 + bx^2 + cx + d$ und $ex^2 + fx + g$
 Aus (I) $ax^3 + bx^2 + cx + d = ex^2 + fx + g$
 folgt (II) $ax^3 + (b - e)x^2 + (c - f)x + d - g = 0$. Nun kann wie in a) argumentiert werden, dass die Funktion $x \mapsto ax^3 + (b - e)x^2 + (c - f)x + d - g = 0$ als ganzrationale Funktion dritten Grades auf jeden Fall eine Nullstelle hat und somit Gleichung (I) eine Lösung und daher die beiden Funktionen zweiten bzw. dritten Grades einen Schnittpunkt besitzen.

- 21 Das gleichschenklige Dreieck wird durch die Höhe in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt.

$$h^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = a^2$$

Das achsensymmetrische Trapez wird durch die beiden Höhen in ein Rechteck und zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt.

$$h^2 + \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 = b^2$$

Im Drachen ergeben sich durch die beiden Diagonalen vier rechtwinklige Dreiecke:

$$\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = \overline{AB}^2; \quad \overline{BM}^2 + \overline{MC}^2 = \overline{BC}^2$$

In der Pyramide finden sich mehrere rechtwinklige Dreiecke:

Rechtwinkliges Dreieck 1: Spitze S – Mittelpunkt der Grundfläche – Ecke

$$\overline{AM}^2 + \overline{MS}^2 = \overline{AS}^2$$

Rechtwinkliges Dreieck 2: Spitze S – M – Mitte der Seitenkante E

$$\overline{EM}^2 + \overline{MS}^2 = \overline{ES}^2$$

$$22 \quad y = (x-3)^2 + 4 \cdot (x-3) - 3 + 4 = x^2 - 6x + 9 + 4x - 12 + 1 = x^2 - 2x - 2$$

$$b = -2; c = -2$$

Thema: Formel von Cardano

S. 123

$$1 \quad x^3 = 6x + 9$$

$$(y+z)^3 = 6(y+z) + 9 \Rightarrow 3yz \cdot (y+z) + (y^3+z^3) = 6(y+z) + 9$$

$$(I) \quad 3yz = 6$$

$$(II) \quad y^3 + z^3 = 9$$

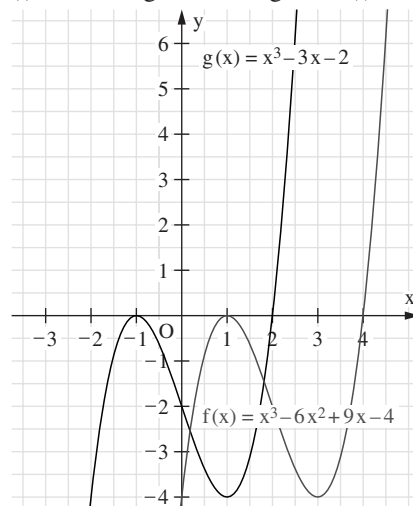
$$p = 6; q = 9$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 - \left(\frac{6}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 - \left(\frac{6}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{4,5 + 3,5} + \sqrt[3]{4,5 - 3,5} = 3$$

$$x^3 = -3x + 2$$

$$x = \sqrt[3]{-1,5 + \sqrt{1,5^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-1,5 - \sqrt{1,5^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3}} \approx -1,89$$

- 2 a) $g(x) = (x+2)^3 - 6(x+2)^2 + 9(x+2) - 4 = x^3 - 3x - 2$
 Der Graph von g entsteht aus dem Graphen von f durch eine Verschiebung nach links um zwei Einheiten.
- b) ((Berechnung wird nachgereicht))



$$3 \quad f\left(x - \frac{b}{3}\right) = \left(x - \frac{b}{3}\right)^3 + b\left(x - \frac{b}{3}\right)^2 + c\left(x - \frac{b}{3}\right) + d$$

$$= x^3 - \frac{2}{3}bx^2 + \frac{b^2}{9}x - \frac{b}{3}x^2 + \frac{2}{9}b^2x - \frac{b^3}{27} + bx^2 - \frac{2}{3}b^2x + \frac{b^3}{9} + cx - \frac{bc}{3} + d$$

$$= x^3 + x^2 \underbrace{\left(-\frac{2}{3}b - \frac{1}{3}b + b\right)}_{=0} + x \left(-\frac{3}{9}b^2 + c\right) + \frac{2}{27}b^3 - \frac{bc}{3} + d$$

$$= x^3 + x \left(-\frac{1}{3}b^2 + c\right) + \frac{2}{27}b^3 - \frac{bc}{3} + d$$