

III Exponentialfunktion und Logarithmus

1 Lineares und exponentielles Wachstum

S. 64

- 1 Die Bevölkerung wächst alle 10 Jahre mit dem Faktor 1,13.

Jahr	2000	2010	2020	2030	2040	2050	2060
Anzahl in Mrd.	6,1	6,89	7,79	8,80	9,95	11,24	12,70

Trifft die Gesetzmäßigkeit zu, dann werden 2050 fast doppelt so viele Menschen auf der Erde leben wie im Jahr 2000.

Der Pegelstand steigt jede Stunde um die gleiche Höhe 8 cm.

Zeit in Std.	0	1	2	10	20	30	31	32
Pegelstand in cm	0	8	16	80	160	240	248	256

Steigt der Wasserspiegel konstant weiter, so ist nach ca. 31 Stunden mit der Überflutung von großen Teilen der Altstadt zu rechnen.

S. 66

- 2 a) $a = \frac{f(1)}{f(0)} = \frac{25}{20} = 1,25$ b) $a = \frac{f(3)}{f(2)} = \frac{1,8}{2,4} = 0,75$

t	0	1	2	3	4	t	0	1	2	3	4
f(t)	20	25	31,25	39,06	48,83	f(t)	4,27	3,2	2,4	1,8	1,35

- 3 a) exponentielles Wachstum; $a = 1,25$; $f(0) = 2,4$; Änderung: 25 %
 b) exponentielles Wachstum; $a = 0,8$; $f(0) = \frac{f(2)}{a^2} = 10$; Änderung: -20 %
 c) lineares Wachstum; $d = -0,8$; $f(0) = 10,4 + 2 \cdot 0,8 = 12$
 d) $f(2) - f(1) = -1,0$; $f(3) - f(2) = -1,5 \Rightarrow$ kein lineares Wachstum
 $\frac{f(2)}{f(1)} \approx 0,904$; $\frac{f(3)}{f(2)} \approx 0,840 \Rightarrow$ kein exponentielles Wachstum
 e) lineares Wachstum; $d = 0,6$; $f(0) = 5,2 - 2 \cdot 0,6 = 4$
 f) $\frac{f(2)}{f(1)} = 1,2$; $\frac{f(4)}{f(2)} = 1,44 = 1,2^2$; $a = 1,2$; $f(0) = 5,4 : 1,2 = 4,5$; Änderung: 20 %

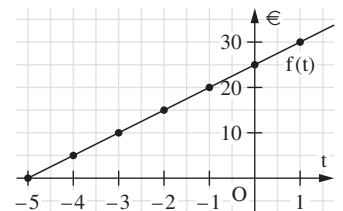
- @ 4 Mit Kohlensäure angereichertes Regenwasser löst auf dem Weg durch den Dolomit Kalk, der sich beim Tropfen von der Höhlendecke als sog. „Sinter“ ablagert. Das Wachstum hängt stark von der Regenmenge und von den Veränderungen des Wasserweges durch das Gestein ab. Es ist also nicht mit einer konstanten absoluten Zunahme pro (Zeit-)Schritt zu rechnen. Über lange Zeitspannen könnten sich die Einflüsse für das Wachstum mitteln. Für die Teufelhöhle in Pottenstein wird ein durchschnittliches Wachstum von 1 mm pro 13 Jahre angegeben. Angenähert lineares Wachstum ist nur über lange Zeiträume anzunehmen.

- 5 a)

t in Jahren	-3	-2	-1	0	1
Taschengeld in €	10	15	20	25	30

 $f(t) = 25 + 5 \cdot t$; lineares Wachstum

Aussage zutreffend für $t \in [-5; +\infty[$

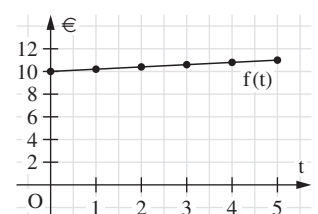


- b)

t in Jahren	0	1	2	3	4	5
Stundenlohn in €	10	10,20	10,40	10,61	10,82	11,04

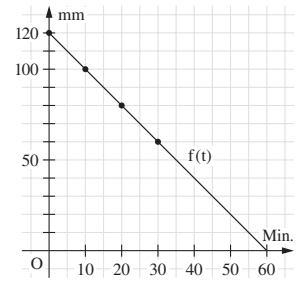
 $f(t) = 10 \cdot 1,02^t$; exponentielles Wachstum

Aussage zutreffend für $t \in [0; +\infty[$



c) t in min	0	1	2	10	20	30
Länge in mm	120	118	116	100	80	60

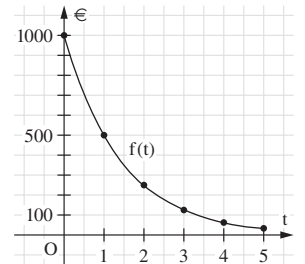
$f(t) = 120 - 2 \cdot t$; lineare Abnahme



Aussage zutreffend für $t \in [0; 60]$

d) t in Jahren	0	1	2	3	4	5
Wert in €	1000	500	250	125	62,5	31,25

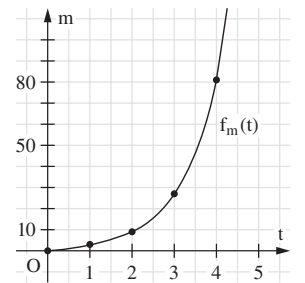
$f(t) = 1000 \cdot 0,5^t$; exponentielle Abnahme



Aussage sinnvoll für $t \in [0; 6]$
Gesetzmäßigkeit gilt theoretisch unbegrenzt.

e) t in Jahren	0	1	2	3	4	5	6
Masse	m	3m	9m	27m	81m	243m	729m

$f_m(t) = m \cdot 3^t$; exponentielles Wachstum



Aussage zutreffend für $t \in [0; +\infty[$

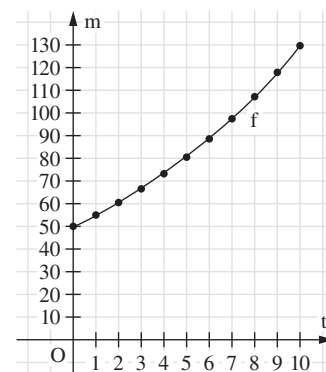
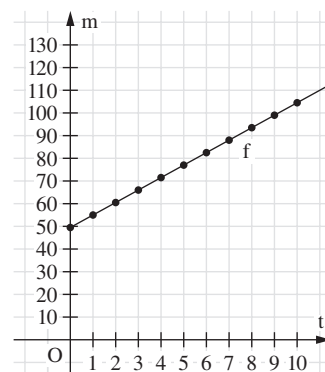


f) Individuelle Lösungen

- 6 a) lineares Wachstum; $d = f(2) - f(1) = 5,5$ b) exponentielles Wachstum; $a = \frac{f(2)}{f(1)} = 1,1$

t	0	1	2	3	4	5
f(t)	49,5	55	60,5	66	71,5	77
t	6	7	8	9	10	
f(t)	82,5	88	93,5	99	104,5	

t	0	1	2	3	4	5
f(t)	50	55	60,5	66,55	73,21	80,53
t	6	7	8	9	10	
f(t)	88,58	97,44	107,18	117,90	129,69	



S. 67

- 7 Die Temperatur T
- steigt mit konstanter Geschwindigkeit;
 - steigt mit wachsender Geschwindigkeit;
 - fällt mit abnehmender Geschwindigkeit;
 - steigt mit abnehmender Geschwindigkeit;
 - fällt mit konstanter Geschwindigkeit.

- 8 a) exponentielles Wachstum: $f(n) = 2400 \cdot 1,015^n$
 lineares Wachstum: $g(n) = 2400 + 80 \cdot n$
- | n | 10 | 20 | 30 | 50 | 100 |
|------|------|------|------|------|-------|
| f(n) | 2785 | 3232 | 3751 | 5052 | 10637 |
| g(n) | 3200 | 4000 | 4800 | 6400 | 10400 |
- Die Behauptung ist falsch. Auf lange Sicht, d. h. für großes n überholt das exponentielle Wachstum das lineare.

- b) $f(n) = 2400 \cdot 1,01^n$
 Probieren in 10er-Schritten ergibt: $f(70) \approx 4816$
 Die Behauptung ist falsch. Nach 70 Monaten hat sich der Absatz verdoppelt.
- c) $f(n) = 2400 \cdot 0,95^n$; $f(20) \approx 860$
 Die Behauptung ist falsch. Nach 20 Monaten werden noch 860 Stück verkauft.

- 9 a) $\frac{899}{1013} \approx 0,887$; $\frac{795}{899} \approx 0,884$; $\frac{701}{795} \approx 0,882$; $\frac{616}{701} \approx 0,879$;
 $\frac{540}{616} \approx 0,877$; $\frac{472}{540} \approx 0,874$; $\frac{411}{472} \approx 0,871$; $\frac{356}{411} \approx 0,866$

In grober Näherung können die Quotienten aufeinanderfolgender Werte als konstant angesehen werden, obwohl sie insgesamt mit der Höhe etwas abnehmen.

- b) Mittelwert der Quotienten: 0,878; pro km nimmt der Luftdruck im Mittel um 12,2 % ab.
 c) Abnahme des Luftdrucks pro 2 km: $1 - 0,878^2 \approx 0,229 = 22,9\%$



- d) Mithilfe des funktionalen Zusammenhangs zwischen Luftdruck und Meereshöhe lässt sich für ein Barometer aus der Druckskala eine Höhenskala errechnen. Diese Höhenskala ist drehbar gegenüber der festen Druckskala angebracht. Bei einer Wanderung stellt man die Höhenskala so ein, dass der Zeiger die Höhe des Startpunkts angibt. Der Druckunterschied zwischen Startpunkt und aktuellem Standort ist dann als Höhe des Standorts ablesbar.



- 10 a) $d(0) = 150$ (mm); $d(1) = 150 + 0,4$; $d(2) = 150 + 0,4 \cdot 2$; $d(n) = 150 + 0,4 \cdot n$

b) $l(1) = d(0) \cdot \pi = 150\pi$; $l(2) = l(1) + d(1) \cdot \pi = 150\pi + 0,4 \cdot \pi$

$l(3) = l(2) + d(2) \cdot \pi = 150\pi + 0,4 \cdot \pi \cdot (1+2)$

⋮

$l(n) = 150\pi \cdot n + 0,4 \cdot \pi \cdot (1+2+\dots+n-1) = 150\pi \cdot n + 0,4 \cdot \pi \cdot \frac{(n-1) \cdot n}{2} = 149,8\pi n + 0,2\pi n^2$

i

$(1+2+\dots+n = \frac{n \cdot (n+1)}{2})$

c) $d(n) = 1800 \Rightarrow 1800 = 150 + 0,4 \cdot n \Rightarrow n = 4125$

$l(4125) = 149,8\pi \cdot 4125 + 0,2 \cdot \pi \cdot 4125^2 \approx 12\,632\,501 \text{ mm} \approx 12,63 \text{ km}$

- 11 a) 1 Spiel = 3 Möglichkeiten; 2 Spiele = $3 \cdot 3 = 9$ Möglichkeiten;
 3 Spiele = $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ Möglichkeiten; usw.
 Mit jedem Spiel wächst die Anzahl der Möglichkeiten mit dem Faktor 3.

b) Anzahl der Möglichkeiten: $3^{11} = 177\,147$

P_{11} („Gewinn im 1. Rang“) = $\frac{1}{3^{11}} \approx 5,6 \cdot 10^{-6} \approx 0,0006\%$

c) P_{13} („Gewinn im 1. Rang“) = $\frac{1}{3^{13}} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3^{11}} = \frac{1}{9} \cdot P_{11}$

Prozentuale Verringerung der Gewinnchancen: $\frac{P_{11} - P_{13}}{P_{11}} = 1 - \frac{1}{9} \approx 88,9\%$

- 12 a) Anfangskapital = a $J(0) = a$

$J(1) = a \cdot 1,01$; $J(2) = a \cdot 1,01 \cdot 1,02$; $J(3) = a \cdot 1,01 \cdot 1,02 \cdot 1,03$; ...

$J(9) = a \cdot 1,01 \cdot 1,02 \cdot 1,03 \cdot 1,04 \cdot 1,05 \cdot 1,06 \cdot 1,07 \cdot 1,08 \cdot 1,09 \approx 1,5471 \cdot a$

Das Kapital hat sich in den neun Jahren um ca. 54,7 % vermehrt.

- b) 5 % ist das arithmetische Mittel der einzelnen Prozentsätze.

$J(9) = a \cdot 1,05^9 \approx 1,551 a$

Das Kapital wäre bei diesem Zinssatz in neun Jahren um 55,1 % angewachsen.

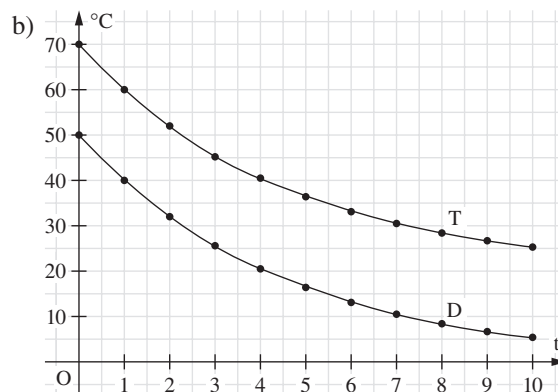
- 13 a) $n = 2$ bedeutet halbjährliche Verzinsung zu $\frac{p}{n} = 2\%$ pro Zinsabschnitt.
Die Zahl der Zinsabschnitte verdoppelt sich auf $2 \cdot 5 = 10$.
 $K(5) = 1000 \cdot (1 + 0,02)^{10} \text{€} \approx 1218,99 \text{€}$
- b) $t = 10$; $p = 0,04$
 $n = 1$: $K(10) = 1000 \cdot 1,04^{10} \text{€} \approx 1480,24 \text{€}$; $n = 4$: $K(10) = 1000 \cdot 1,01^{40} \text{€} \approx 1488,86 \text{€}$
 $n = 12$: $K(10) = 1000 \cdot \left(1 + \frac{0,04}{12}\right)^{120} \text{€} \approx 1490,83 \text{€}$
Bei weiterer Verkürzung der Zinsabschnitte (z. B. wöchentliche oder tägliche Verzinsung) würde das Kapital in 10 Jahren noch einen leicht höheren Ertrag bringen.

S. 68

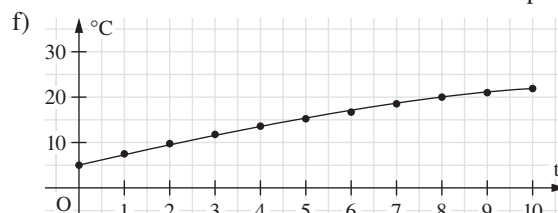
- 14 a) Kapital nach 12 Jahren mit einem Jahreszinssatz von $p\%$: $K(12) = K \cdot (1+p)^{12}$
Kapital nach 20 Jahren mit einem Jahreszinssatz von 5% : $K(20) = K \cdot (1+0,05)^{20}$
Mit der gegebenen Bedingung: $K \cdot (1+p)^{12} = K \cdot (1+0,05)^{20}$
 $\Rightarrow (1+p)^{12} \approx 2,653 \Rightarrow 1+p \approx 1,085 \Rightarrow p \approx 8,47\%$
- b) in 10 Jahren: $K \cdot (1+p)^{10} = 2 \cdot K \Rightarrow (1+p)^{10} = 2 \Rightarrow 1+p = \sqrt[10]{2} \Rightarrow p \approx 7,18\%$
in 20 Jahren: $K \cdot (1+p)^{20} = 2 \cdot K \Rightarrow (1+p)^{20} = 2 \Rightarrow 1+p = \sqrt[20]{2} \Rightarrow p \approx 3,53\%$

- @ 15 a) $t = 2008 - 1626 = 382 \quad t \approx 380$
 $p = 5\%$: $K(380) = 24 \$ \cdot 1,05^{380} = 2704860603 \$ \approx 2,7 \cdot 10^9 \$$
 $p = 10\%$: $K(380) = 24 \$ \cdot 1,1^{380} \approx 1,28 \cdot 10^{17} \$$
- b) $60 \text{ km}^2 = 6 \cdot 10^7 \text{ m}^2$
Grundstückspreis bei $p = 5\%$: $\frac{2,7 \cdot 10^9 \$}{6 \cdot 10^7 \text{ m}^2} = 45 \frac{\$}{\text{m}^2}$
 $p = 10\%$: $\frac{1,28 \cdot 10^{17} \$}{6 \cdot 10^7 \text{ m}^2} \approx 2,1 \cdot 10^9 \frac{\$}{\text{m}^2}$

- 16 a) $D(t) = D(0) \cdot 0,8^t$
- | t in min | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|------------|----|----|----|------|------|------|------|------|------|------|------|
| D(t) in °C | 50 | 40 | 32 | 25,6 | 20,5 | 16,4 | 13,1 | 10,5 | 8,4 | 6,7 | 5,4 |
| T(t) in °C | 70 | 60 | 52 | 45,6 | 40,5 | 36,4 | 33,1 | 30,5 | 28,4 | 26,7 | 25,4 |



- c) $T(t) = U + D(t)$; $D(t) = D(0) \cdot 0,8^t \Rightarrow T(t) = U + D(0) \cdot 0,8^t$
 $T(t) = 20 + 50 \cdot 0,8^t \Rightarrow T(15) = 20 + 50 \cdot 0,8^{15} \approx 21,8$
Der Kaffee hat nach 15 Minuten eine Temperatur von ca. $21,8^\circ\text{C}$.
- d) $\frac{T(1)}{T(0)} = \frac{60}{70} \approx 0,857$; $\frac{T(2)}{T(1)} = \frac{52}{60} \approx 0,867$; $\frac{T(3)}{T(2)} = \frac{45,6}{52} \approx 0,877$; ...
Der Abnahmefaktor wächst langsam, also liegt kein exponentielles Wachstum vor.
- e) $T(0) = 5$; $U = 30$; $D(0) = 25$; $D(t) = 25 \cdot 0,9^t$
 $T(t) = 30 - 25 \cdot 0,9^t$
 $T(10) = 30 - 25 \cdot 0,9^{10} \approx 21,3$
Nach 10 Minuten hat die Limonade eine Temperatur von $21,3^\circ\text{C}$.



- 17 a) Kein lineares Wachstum, da die absoluten Zuwächse steigen.
 Kein exponentielles Wachstum: $\frac{4,5}{3,3} \approx 1,36$; $\frac{6,7}{4,5} \approx 1,49$; $\frac{10,4}{6,7} \approx 1,55$; $\frac{14,9}{10,4} \approx 1,43$
 b) Die stärkste absolute Zunahme (2005 auf 2006) bezieht sich auf einen höheren Grundwert.
- 18 a) Zeichnung individuell
 Sei d der Abstand zwischen h und k bzw. h und g
 $A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot 2d = \overline{AB} \cdot d$
 $A_{\Delta ABE} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot d = \frac{1}{2} \cdot A_{\Delta ABC}$
 $A_{\Delta BDE} = \frac{1}{2} \cdot \overline{ED} \cdot d = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot d = \frac{1}{4} \cdot A_{\Delta ABC}$
 $A_{\Delta EDC} = A_{\Delta BDE} = \frac{1}{4} \cdot A_{\Delta ABC}$
 b) $\overline{ED} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB}$ unabhängig von der Länge von \overline{AB} und d (Strahlensatz).
 c) Die Flächeninhalte der Dreiecke ändern sich nicht, wenn C auf g wandert, weil nach dem Strahlensatz mit \overline{AB} auch \overline{ED} konstant bleibt und die Dreieckshöhen ebenfalls.
- 19 a) 4 b) $a^{\frac{5}{3}} + 2 \cdot a^{\frac{5}{6}} b^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{3}}$ c) $-\sqrt{3}$ d) 3 e) $\frac{\sqrt{3}}{5}(\sqrt{5}-1)$ f) 1

2 Exponentialfunktionen

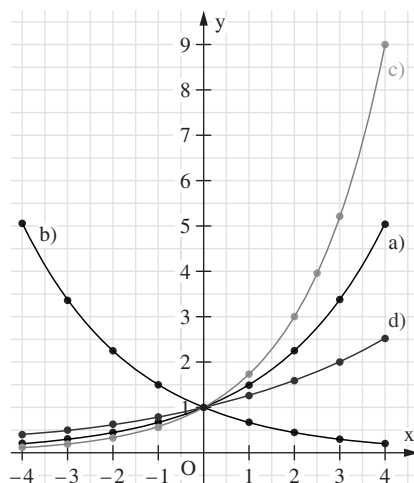
S. 69

- 1 a) $f(0) = 1$ $g(0) = 0,5$ $h(0) = 3$
 $f(1) = 1,5$ $g(1) = 1$ $h(1) = 1,5$
 $f(2) = 2,25$ $g(2) = 2$ $h(2) = 0,75$
 $a = \frac{f(x)}{f(x-1)} = 1,5$ $a = \frac{g(x)}{g(x-1)} = 2$ $a = \frac{h(x)}{h(x-1)} = 0,5$
 Da der Wachstumsfaktor jeweils konstant bleibt, beschreiben die Funktionen f , g und h jeweils ein exponentielles Wachstum.
 $f(x) = 1 \cdot 1,5^x$ $g(x) = 0,5 \cdot 2^x$ $h(x) = 3 \cdot 0,5^x$
 b) Bei den Funktionen f und g ist $a > 1$ und die Funktionsgraphen steigen.
 Bei der Funktion h ist $a < 1$ und der Funktionsgraph ist fallend.
 c) $f(\frac{1}{2})$, $g(\frac{1}{2})$ und $h(\frac{1}{2})$ geben den Wert der Wachstumsgröße nach Ablauf einer halben (Zeit-) Schritt an.

S. 71

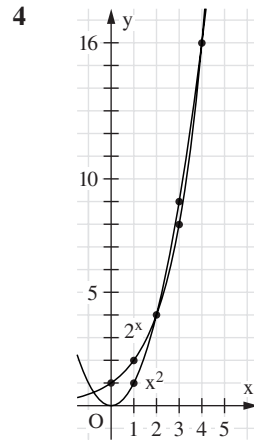
2

	-4	-3,5	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
a) $f(x) = (\frac{3}{2})^x$	0,20	0,24	0,30	0,36	0,44	0,54	0,67	0,82	1	1,22	1,50	1,84	2,25	2,76	3,38	4,13	5,06
b) $g(x) = (\frac{2}{3})^x$	5,06	4,13	3,38	2,76	2,25	1,84	1,50	1,22	1	0,82	0,67	0,54	0,44	0,36	0,30	0,24	0,20
c) $f(x) = (\sqrt{3})^x$	0,11	0,15	0,19	0,25	0,33	0,44	0,58	0,76	1	1,32	1,73	2,28	3,00	3,95	5,20	6,84	9,00
d) $k(x) = (\sqrt[3]{2})^x$	0,40	0,45	0,50	0,56	0,63	0,71	0,79	0,89	1	1,12	1,26	1,41	1,59	1,78	2,00	2,24	2,52



(Den Graphen $x \mapsto (\frac{2}{3})^x$ erhält man durch Spiegelung des Graphen von $x \mapsto (\frac{3}{2})^x$ an der y -Achse. Daher kann die Wertetabelle für b) direkt mit a) erstellt werden.)

- 3 a) $1 < a < b$ individuelle Lösung mit $f(0) = g(0) = 1$
 $f(x) > g(x)$ für $x < 0$; $f(x) < g(x)$ für $x > 0$
 b) $0 < a < b < 1$ individuelle Lösung mit $f(0) = g(0) = 1$
 $f(x) > g(x)$ für $x < 0$; $f(x) < g(x)$ für $x > 0$
 (zum Vergleich: Eigenschaften der Exponentialfunktion $x \mapsto a^x$: *Schülerbuch S. 69*)



Für $0 \leq x \leq 2$ und für $x \geq 4$
 gilt $2^x \geq x^2$.

- 5 Ein DIN-A4-Blatt ist ca. 21 cm breit und ca. 30 cm hoch.

a) $f(x) = 1,1^x$; $f(21) \approx 7,40$

Der Punkt des Graphen von f am rechten Rand ist 7,4 cm vom unteren Rand entfernt.



- b) Individuelle Schätzung für x .

$f(x) = 30$; $f(35) \approx 28,1$; $f(36) \approx 30,9$

Das Blatt müsste nach rechts hin um ca. 15 cm verbreitert werden.



- c) Individuelle Schätzung.

Am rechten Rand gilt nun $x = 42$; $f(42) = 1,1^{42} \approx 54,76$; $54,76 \cdot 0,5 \text{ cm} = 27,38 \text{ cm}$

Der Graph erreicht nicht ganz den oberen Rand.

- 6 a) $f(x) = a^x$; $f(x+1) = a^{x+1} = a \cdot a^x = a \cdot f(x)$ b) $f(x) = a^x$; $f(2x) = a^{2x} = (a^x)^2 = (f(x))^2$
 für $0 \leq x \leq 2$ und für $x \geq 4$ gilt $2^x \geq x^2$

- 7 Ansatz für Funktion f : $f(x) = b \cdot a^x$

a) $f(1) = 1 \Rightarrow \text{I. } b \cdot a^1 = 1$

$f(2) = 0,2 \Rightarrow \text{II. } b \cdot a^2 = 0,2$

$\text{II} : \text{I} \Rightarrow a = 0,2$ in I: $b = 5$ $f(x) = 5 \cdot 0,2^x$

b) Rechenweg analog a) $f(x) = 81 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x$

c) Rechenweg analog a) $f(x) = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$

d) Rechenweg analog a) $f(x) = 625 \cdot 0,2^x$

e) $P\left(0 \mid \frac{1}{2}\right) \in G_f \Rightarrow b \cdot a^0 = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{2}$ $f(x) = \frac{1}{2} \cdot a^x$

- f) Die Punkte $Q(3|4)$ und $R(3|1)$ können nicht auf dem Graphen einer Funktion liegen, weil die Zuordnung $x \mapsto f(x)$ eindeutig ist.



- 8 Der Funktionsterm $b \cdot a^x$ enthält zwei Variablen (Parameter), die zu bestimmen sind. Zur Bestimmung von a und b ist ein System mit zwei Gleichungen notwendig. Jeder Punkt, der auf dem Graphen von f liegt, liefert eine Gleichung. Soll der Funktionsterm durch einen Punkt festgelegt sein, so muss also einer der beiden Parameter schon bekannt sein.

- 9 Funktionsterm zu f : $f(0) = 1 \Rightarrow b \cdot a^0 = 1 \Rightarrow b = 1$

$f(1) = 1,5 \Rightarrow 1 \cdot a^1 = 1,5 \Rightarrow a = 1,5$ $f(x) = 1,5^x$

Funktionsterm zu g : $g(0) = 1 \Rightarrow b = 1$

$g(-1) = 4 \Rightarrow 1 \cdot a^{-1} = 4 \Rightarrow a = 0,25$ $g(x) = 0,25^x$

Funktionsterm zu h : $h(0) = 2,5 \Rightarrow b = 2,5$

$h(1) = 3 \Rightarrow 2,5 \cdot a^1 = 3 \Rightarrow a = 1,2$ $h(x) = 2,5 \cdot 1,2^x$

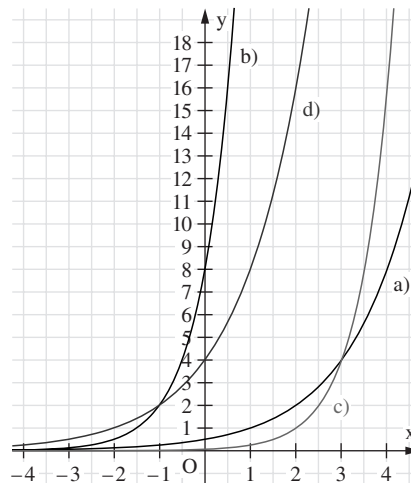
Funktionsterm zu k : $k(0) = 4 \Rightarrow b = 4$

$k(1) = 2,5 \Rightarrow 4 \cdot a^1 = 2,5 \Rightarrow a = \frac{5}{8}$ $k(x) = 4 \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^x$

S. 72



- 10 a) $2^{x-1} = \frac{2^x}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2^x$
 b) $2^{2x+3} = 2^{2x} \cdot 2^3 = 8 \cdot 2^{2x} = 8 \cdot 4^x$
 c) $2^{2x-4} = \frac{4^x}{2^4} = \frac{1}{16} \cdot 4^x$
 d) $(\sqrt{2})^{2x+4} = 2^{x+2} = 4 \cdot 2^x$



- 11 a) Graph steigt, wenn $a+1 > 1$, also für $a > 0$.
 Graph fällt, wenn $0 < a+1 < 1$, also für $-1 < a < 0$.
 b) Der Graph ist für alle $a \neq 0$ eine nach oben geöffnete Parabel.
 Der Graph fällt für $x < 0$ und steigt für $x > 0$. Von a hängt die Steigung des Graphen nicht ab.
 c) Graph steigt, wenn $\frac{2}{a^2+1} > 1$, also für $a^2 < 1 \Rightarrow -1 < a < 1$.
 Graph fällt für $a < -1$ oder $a > 1$.
 d) Graph ist konstant für alle a .
 e) Graph steigt, wenn $a^2-3 > 1$, also für $a^2 > 4 \Rightarrow a < -2$ oder $a > 2$.
 Graph fällt, wenn $0 < a^2-3 < 1$.
 $a^2-3 > 0 \Leftrightarrow a^2 > 3$ also für $a < -\sqrt{3}$ oder $a > \sqrt{3}$
 \Rightarrow Graph fällt, wenn $-2 < a < -\sqrt{3}$ oder $\sqrt{3} < a < 2$.
 f) Der Graph ist eine Gerade. Gerade steigt für $a > 0$, sie fällt für $a < 0$.

- 12 a) $f(x) = b \cdot 0,6^x$; $b \cdot 0,6^1 = 3000 \Rightarrow b = 5000 \Rightarrow f(x) = 5000 \cdot 0,6^x$

m	0	1	2	3	4
k	5000	3000	1800	1080	648
m	5	6	7	8	
k	388,8	233,3	140	84	

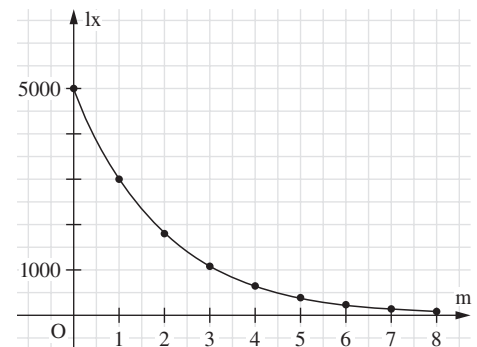
- b) Individuelle Lösung;

z. B. $f(x) = 2500$ für $x \approx 1,4$



- c) $5000 \cdot 0,6^x = 0,2 \Rightarrow 0,6^x = 4 \cdot 10^{-5}$
 Probieren: $0,6^{20} \approx 3,656 \cdot 10^{-5}$
 $0,6^{19,8} \approx 4,049 \cdot 10^{-5}$
 $0,6^{19,82} \approx 4,008 \cdot 10^{-5}$

In ca. 19,8 m Tiefe beträgt die Beleuchtungsstärke ungefähr 0,2 lx.



- 13 a) Es werden immer ca. die Hälfte der Schokolinsen „LS“ zeigen.
 Anzahl der nach dem n-ten Wurf übrig gebliebenen Schokolinsen: $f(n) = 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$
 b) Anzahl der nach dem n-ten Wurf verzehrten Schokolinsen: $g(n) = 80 - f(n)$
 Die Funktionswerte von g wachsen mit zunehmendem n , erreichen aber nie den Wert 80.
 Eine wachsende Exponentialfunktion erreicht aber beliebig große Werte. g ist also keine Exponentialfunktion.



- c) Bei realen Schokolinsen wird der Abnahmefaktor nur ungefähr $\frac{1}{2}$ betragen, da nicht alle Schokolinsen eine Idealform haben. Beim einzelnen Experiment kann es unter Umständen zu beträchtlichen Abweichungen von den berechneten Idealwerten kommen.

- 14** (Fester Parameter a muss so bestimmt werden, dass die Funktion für alle $x \in \mathbb{R}$ erklärt ist.)
- a) $2a-3 > 0 \Rightarrow a > 1,5$
 Funktion $x \mapsto (2a-3)^x$ ist definiert für $a > 1,5$.
- b) $a^2+1 > 0$ für alle a
 Funktion $x \mapsto (a^2+1)^x$ ist definiert für alle a .
- c) $1-a^2 \geq 0 \Rightarrow -1 \leq a \leq 1$
 Funktion $x \mapsto x \cdot \sqrt{1-a^2}$ ist definiert für $-1 \leq a \leq 1$.
- d) $\frac{1}{a}+1 > 0 \Rightarrow \frac{1+a}{a} > 0$
 1. Fall: $1+a > 0$ und $a > 0 \Rightarrow a > 0$ 2. Fall: $1+a < 0$ und $a < 0 \Rightarrow a < -1$
 Funktion $x \mapsto \left(\frac{1}{a}+1\right)^x$ ist definiert für $a < -1$ oder $a > 0$.
- e) $a+1 \geq 0$ und $2-\sqrt{a+1} > 0$
 $a \geq -1$ und $\sqrt{a+1} < 2 \Rightarrow a \geq -1$ und $a < 3$.
 Funktion $x \mapsto (2-\sqrt{a+1})^x$ ist definiert für $-1 \leq a < 3$.
- f) $\frac{a+3}{a^2} > 0$ und $a \neq 0$
 Funktion $x \mapsto \left(\frac{a+3}{a^2}\right)^x$ ist definiert für $a > -3$ und $a \neq 0$.
- 15** a) $f(0) = 0,3 \Rightarrow b = 0,3$
 $f(6) = 0,6 \Rightarrow 0,6 = 0,3 \cdot a^6 \Rightarrow a^6 = 2 \Rightarrow a = 2^{\frac{1}{6}}$; $f(x) = 0,3 \cdot (2)^{\frac{x}{6}}$
- b) Die Wassermelone wächst täglich um 12,2%.
- c) Individuelle Lösung
 Es handelt sich mit Sicherheit um beschränktes Wachstum, d. h. es liegt nur während einer begrenzten Zeit exponentielles Wachstum vor.
- 16** a) $f(0) = 100 \Rightarrow b = 100$
 $f(28) = 50 \Rightarrow 50 = 100 \cdot a^{28} \Rightarrow a^{28} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \sqrt[28]{\frac{1}{2}}$
 $f(x) = 100 \cdot 0,5^{\frac{x}{28}}$
 Zerfall in einem Jahr: $100 - 100 \cdot 0,5^{\frac{1}{28}} \approx 2,45\%$
- b) $f(50) = 100 \cdot 0,5^{\frac{50}{28}} \approx 29$
 Nach 50 Jahren sind noch 29 mg vorhanden.
- 17** a) Die Behauptung ist gleichwertig mit der Gleichung
 $a^t = (2a)^{\frac{1}{2}t}$ oder $a^{2t} = (2a)^t \Rightarrow a^{2t} = 2^t \cdot a^t \Rightarrow a^t = 2^t \Rightarrow a = 2$
 Für $a \neq 2$ ist die Aussage falsch.
- b) Analog a) gilt:
 $a^t = \left(\frac{1}{2}a\right)^{\frac{1}{2}t} \Rightarrow a^{2t} = \left(\frac{1}{2}a\right)^t \Rightarrow a^t = \left(\frac{1}{2}\right)^t \Rightarrow a = \frac{1}{2}$
 Die Aussage ist für $a \neq \frac{1}{2}$ falsch.
- c) $f(x) = b \cdot 1^x = b$; die Funktionswerte bleiben konstant b ; Aussage ist richtig.
- d) $(1+p)^t = (1+2p)^{\frac{1}{2}t} = (\sqrt{1+2p})^t \Rightarrow 1+p = \sqrt{1+2p} \Rightarrow 1+2p+p^2 = 1+2p$
 $\Rightarrow p^2 = 0 \Rightarrow p = 0$
 Für $p = 0$ liegt kein Wachstum vor, die Aussage ist falsch.
- 18** a) Ansatz: $f(x) = ax^2 + bx + c$
 $A \in G_f \Rightarrow$ (I) $a + b + c = 3$
 $B \in G_f \Rightarrow$ (II) $4a + 2b + c = 2,5$
 $C \in G_f \Rightarrow$ (III) $a - b + c = 1$
 Lösung des Gleichungssystems liefert:
 $a = -\frac{1}{2}$; $b = 1$; $c = 2,5$
 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 2,5 = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + 3$
- b) Ansatz: $f(x) = a \cdot (x-2)(x+3)$
 $P \in G_f \Rightarrow -6a = -3 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$
 $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)(x+3) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 3,125$

3 Modellieren von Wachstum

S. 73

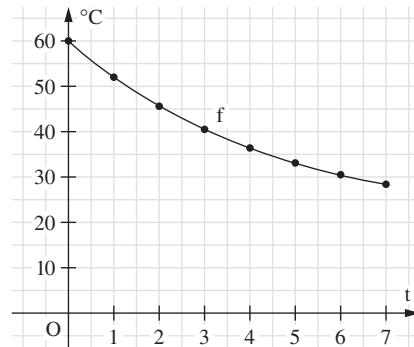
- 1 a) Die Messpunkte werden durch die lineare Funktion h am besten angenähert. Sie liefern aber keinen eindeutigen Hinweis, ob die Beschreibung durch eine lineare oder eine Exponentialfunktion erfolgen soll.
 b) Die Zusatzinformation veranlasst die Ausscheidung von h , denn für $t > 10$ gilt $h(t) < 0$.

S. 74

- 2 Die absolute Abnahme der Blutalkoholwerte schwankt um den Mittelwert $-0,18$. Es liegt also lineares Wachstum vor.
 $f(t) = 1,6 - 0,18t$
 3 Die relative Abnahme schwankt um den Wert $0,849$. Es liegt also exponentielles Wachstum vor.
 $f(t) = 1000 \cdot 0,849^t$

S. 75

- 4 a) Sowohl lineare als auch exponentielle Abnahme scheidet aus, da die absolute und relative Abnahme mit der Zeit geringer wird.
 b) $f(t) = s + b \cdot a^t$
 $f(0) = 60 \Rightarrow$ (I) $s + b \cdot a^0 = 60$
 $f(1) = 52 \Rightarrow$ (II) $s + b \cdot a = 52$
 $f(2) = 45,6 \Rightarrow$ (III) $s + b \cdot a^2 = 45,6$
 Durch Lösen des Gleichungssystems erhält man $a = 0,8$; $b = 40$; $s = 20$
 $y = 20 + 40 \cdot 0,8^t$

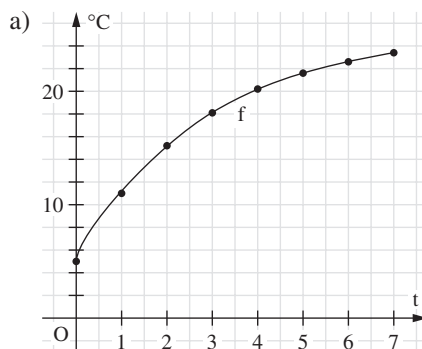


c) s ist die Umgebungstemperatur. b ist die Temperaturdifferenz zum Zeitpunkt $t = 0$.

d)	t	0	1	2	3	4	5	6	7
	f(t)	60	52	45,6	40,5	36,4	33,1	30,5	28,4

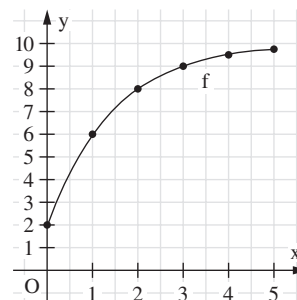
Die Modellierung passt genau. Alle Messpunkte liegen auf dem Graphen (siehe Teilaufgabe a)).

5



Die absolute und die relative Zunahme der Temperaturen wird mit der Zeit geringer. Linearer und exponentieller Temperaturanstieg scheidet aus.

Graph zu b)



b) $f(x) = 10 - 8 \cdot 0,5^x$

x	0	1	2	3	4	5
f(x)	2	6	8	9	9,5	9,75

Der Graph steigt mit zunehmendem x weniger an und nähert sich dem Wert 10.

- c) Die Funktionen vom Typ $f(t) = s - b \cdot a^t$ zeigen den gleichen Verlauf wie die gemessenen Temperaturen. Der Parameter s gibt die Grenztemperatur an, der Parameter b die Temperaturdifferenz zum Zeitpunkt $t = 0$. Für $b > s$ ist die Anfangstemperatur negativ.
 $0 < a < 1$ muss gelten, weil nur dann die Funktionswerte mit zunehmendem t wachsen.
 d) $f(t) = 25 - 20 \cdot 0,7^t$
 Lösungsweg analog 4b)
 e) $f(15) \approx 24,9$; der Körper erreicht nach 15 Minuten eine Temperatur von ca. $24,9^\circ\text{C}$.

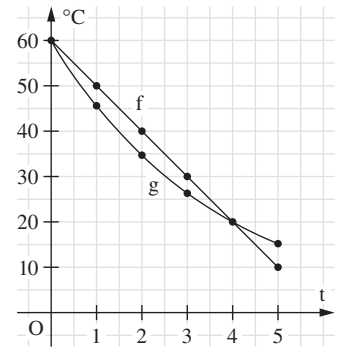
6 a)	t	0	1	2	3	4	5
	y(t)	60	45	40	30	20	15
	abs. Abn.		-15	-5	-10	-10	-5
	rel. Abn.		-0,25	-0,11	-0,25	-0,33	-0,25

lineare Funktion f: $t \mapsto 60 - 10 \cdot t$

Exponentialfunktion g: $t \mapsto 60 \cdot 0,76^t$

(Mittelwert der relativen Abnahme pro Zeiteinheit: -0,24)

t	0	1	2	3	4	5
f(t)	60	50	40	30	20	10
g(t)	60	45,6	34,7	26,3	20	15,2



- b) Betrachtet man die Abweichung der Funktionswerte von den vorgegebenen Werten, so lässt sich aus den sechs Werten nicht entscheiden, welche Modellierung zutreffender ist.
 c) Die Punkte (6|12,5) und (7|10) lassen die Funktion f ausscheiden, da $f(6) = 0$ und $f(7) = -10$ ist. Dagegen gilt $g(6) = 11,5$ und $g(7) = 8,8$.

Die Funktion g ist die geeignete Modellierung.



$$d) S_g = (60-60)^2 + (45-45,2)^2 + (40-35,6)^2 + (30-26,3)^4 + (20-20,0)^2 + (15-15,2)^2 + (12,5-11,5)^2 + (10-8,8)^2$$

$$S_g = 44,62$$

- e) Die Funktion liefert überwiegend etwas zu kleine Werte. Deshalb wählt man besser einen etwas größeren Wachstumsfaktor. $h(t) = 60 \cdot 0,77^t$

$$S_h = (60-60)^2 + (45-46,2)^2 + (40-35,6)^2 + (30-27,4)^2 + (20-21,1)^2 + (15-16,2)^2 + (12,5-12,5)^2 + (10-9,6)^2$$

$$S_h = 30,37$$

- 7 140% von 80% = $1,4 \cdot 0,8 = 1,12 = 112\%$
 Der Endpreis ist um 12% höher als der Anfangspreis.

- 8 a) -0,5 b) $-4\frac{1}{3}$ c) 0,86 d) -0,9 e) 9,5 f) 39,99

4 Logarithmen

S. 76



- 1 a) $1,019^{30} \approx 1,7588$

Wenn die jährliche relative Änderung 1,9% beträgt, wächst die Weltbevölkerung in 30 Jahren um ca. 75,9%.

- b) $1,019^{40} \approx 2,123$; $1,019^{35} \approx 1,932$; $1,019^{37} \approx 2,007$

Bei einem jährlichen Zuwachs von 1,9% verdoppelt sich die Weltbevölkerung nach 37 Jahren.

S. 77

- 2 a) $x = \log_2 32$ b) $\log_{10} 10000 = 4$ c) $\log_7 1 = 0$ d) $\log_2 \frac{1}{2} = -1$

e) $\log_3 \frac{1}{9} = -2$ f) $\log_6 \sqrt[3]{6} = \frac{1}{3}$ g) $\log_5 \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{2}$ h) $\log_{10} \frac{1}{\sqrt[4]{1000}} = -\frac{3}{4}$

- 3 a) 2 b) 7 c) 3 d) 5
 e) 4 f) -1 g) -3 h) -4
 i) -2 k) -5 l) $\frac{3}{2}$ m) 0

- 4 a) $\log_a a^{\frac{3}{5}} = \frac{3}{5}$ b) $\log_{a^2} a^{-\frac{1}{2}} = \log_{a^2} (a^2)^{-\frac{1}{4}} = -\frac{1}{4}$ c) $\log_{a^{\frac{1}{2}}} a^{\frac{4}{3}} = \log_{a^{\frac{1}{2}}} \left(a^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{8}{3}} = \frac{8}{3}$

- 5 a) Gesucht ist eine Zahl x , deren 5. Potenz gleich 32 ist. Also: $x = 2$
 b) Gesucht ist eine Hochzahl x , mit der man 3 potenzieren muss, um 81 zu erhalten.
 Also: $x = 4$
 c) Gesucht ist eine Hochzahl x , mit der man 7 potenzieren muss, um 49 zu erhalten.
 Also: $x = 2$
 d) Gesucht ist eine Hochzahl x , mit der man 25 potenzieren muss, um 125 zu erhalten.
 Also: $x = \frac{3}{2}$
 e) Gesucht ist das Quadrat der Zahl 4. Also: $x = 16$
 f) Gesucht ist eine Zahl x , deren 5. Potenz 243 ist. Also: $x = 3$

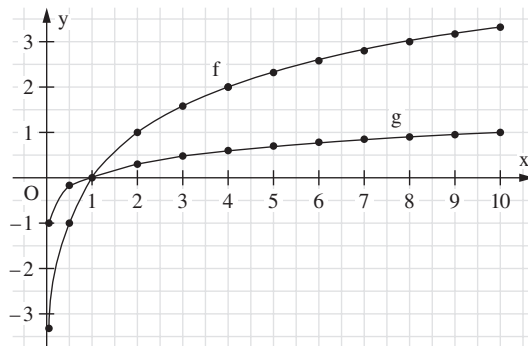
- 6 a) $\lg 25 \approx 1,40$ b) $\log_2 10 \approx 3,32$ c) nicht lösbar, da $2^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$
 d) $\log_2 0,1 \approx -3,32$ e) $\log_{0,6} 40 \approx -7,22$ f) nicht lösbar, da $10^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

S. 78

- 7 a) $a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$ b) $a^2 = \frac{1}{49} \Rightarrow a = \frac{1}{7}$ c) $b^{-2} = 16 \Rightarrow b = \frac{1}{4}$
 d) $b^{\frac{1}{2}} = 7 \Rightarrow b = 49$ e) $a^{\frac{3}{2}} = 5^{\frac{3}{2}} \Rightarrow a = 5$ f) $a^{\frac{3}{4}} = 3^{\frac{3}{2}} = 9^{\frac{3}{4}} \Rightarrow a = 9$
 g) $(a^2)^{\frac{2}{3}} = (3^2)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow a = 3$ h) $b^{-\frac{3}{4}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{3}{4}} \Rightarrow b = \frac{1}{5}$

8

t	0,1	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f(x)	-3,32	-1	0	1	1,58	2	2,32	2,58	2,80	3	3,17	3,32
g(x)	-1	-0,3	0	0,30	0,48	0,60	0,70	0,78	0,85	0,90	0,95	1



Gemeinsam:
 $f(1) = g(1) = 0$
 $f(x) < 0$ für $0 < x < 1$;
 $g(x) < 0$ für $0 < x < 1$
 Beide Graphen steigen im gesamten Definitionsbereich \mathbb{R}^+ .
 Unterschiedlich:
 Der Graph von f steigt schneller als der Graph von g .



- 9 a) $f(21) = \log_2 21 \approx 4,39$; $g(21) = \log 21 \approx 1,32$
 Der Graph von f ist 4,39 cm vom unteren Rand entfernt, der Graph von g 1,32 cm.
 b) $f(x) = 29,6$; $x = 2^{29,6} \approx 8,14 \cdot 10^8$; $g(x) = 29,6$; $x = 10^{29,6} \approx 3,98 \cdot 10^{29}$
 Damit der Graph von f den oberen Rand des DIN-A4-Blattes erreicht, müsste das Blatt nach rechts hin auf ca. $8,14 \cdot 10^8$ cm verbreitert werden. Beim Graphen von g müsste es auf $3,98 \cdot 10^{29}$ cm verbreitert werden.
 c) $8,4 \cdot 10^8$ cm = $8,4 \cdot 10^3$ km z. B. Entfernung New York – Lissabon
 $3,98 \cdot 10^{29}$ cm $\approx 4 \cdot 10^{24}$ km
 i 1 Lichtjahr ca. $9,5 \cdot 10^{12}$ km, also $3,98 \cdot 10^{29}$ cm $\approx 421 \cdot 10^9$ Lichtjahre;
 Alter des Universums ca. $13 \cdot 10^9$ Lichtjahre.
 Das Licht hätte vom Beginn der Welt an bis heute ca. 3% der Strecke zurückgelegt.

Randspalte: $\log_{\sqrt{3}} 17 = x \Rightarrow \sqrt{3}^x = 17 \Rightarrow 3^x = 289$ also $3^{\log_{\sqrt{3}} 17} = 289$

- 10 a) $25^{-\frac{1}{2}} = 5^{-1} = 0,2$ richtig b) $2^{-5} = 0,5^5 = 0,03125$ falsch
 c) $\log_3(-8)$ ist nicht definiert: falsch d) $\log_3(-81)^4 = \log_3 81^4 = \log_3 3^{16} = 16$ richtig
 e) Individuelle Lösung



- 11 a) $1,4^x = 5 \Rightarrow x \approx 4,783$ b) $1,8^x = 0,8 \Rightarrow x \approx -0,3796$ c) $2^x = \frac{4}{3} \Rightarrow x \approx 0,4150$
 d) $1,2^x = 2 \Rightarrow x \approx 3,802$ e) $3^x = 2,5 \Rightarrow x \approx 0,8340$ f) $5^x = \frac{1}{3} \Rightarrow x \approx -0,6826$



-   **12** $K(t) = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{n}\right)^{n \cdot t}$ vgl. *Schülerbuch S. 67, Aufgabe 13*
- a) $5000 = 4000 \cdot 1,05^t \Rightarrow 1,05^t = 1,25 \Rightarrow t \approx 4,57$
Nach etwas mehr als 4,5 Jahren sind die 4000€ auf 5000€ angewachsen.
- b) $5955 = 5000 \cdot a^3 \Rightarrow a^3 = 1,191 \Rightarrow a = \sqrt[3]{1,191} \approx 1,06$
Das Kapital wurde mit 6% pro Jahr angelegt.
- c) $2 = 1,06^t \Rightarrow t \approx 11,895$
Das Kapital hat sich nach 12 Jahren etwas mehr als verdoppelt.
- 13** a) Exponentielles Wachstum liegt vor, wenn die Quotienten aufeinanderfolgender Werte um einen Mittelwert schwanken.
 $\frac{150}{100} = 1,5; \frac{230}{150} = 1,53; \frac{340}{230} = 1,48; \frac{500}{340} = 1,47$
 $f(t) = 100 \cdot 1,5^t$
- b) $100 \cdot 1,5^t = 1000 \Rightarrow t \approx 5,68$
Nach 6 Stunden enthält die Kultur mehr als 1000 Bakterien.
- c) Wachstum um 1000% bedeutet das 11-fache des Anfangswertes. $1,5^t = 11 \Rightarrow t \approx 5,91$
Nach knapp 6 Stunden wächst die Zahl der Bakterien um 1000%.
- 14** a) $(1 - 0,083)^t = 0,5 \Rightarrow t \approx 8,0$
Die Halbwertszeit von Jod-131 beträgt 8 Tage.
- b) $f(8) \approx \frac{1}{2}; f(16) \approx \frac{1}{4}; f(24) \approx \frac{1}{8}$
Nach 24 Tagen ist noch $\frac{1}{8}$ der ursprünglichen Menge Jod-131 nicht zerfallen.
- 15** a) $\log_2 8 = x \Leftrightarrow 2^x = 8 \qquad \log_8 2 = y \Leftrightarrow 8^y = 2$
 $\Rightarrow (8^y)^x = 8^1 \Rightarrow x \cdot y = 1, \text{ also } \log_2 8 \cdot \log_8 2 = 1$
- b) $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b \qquad \log_b a = y \Leftrightarrow b^y = a$
 $\Rightarrow (b^y)^x = b^1 \Rightarrow x \cdot y = 1, \text{ also } \log_a b \cdot \log_b a = 1$
- 16** a) $\frac{1}{11} < \frac{1}{10}$ also $\frac{4}{10} + \frac{1}{11} < \frac{4}{10} + \frac{1}{10} = 0,5$ Aussage falsch
- b) $\frac{4}{7} = \frac{12}{21}$ also $\frac{10}{21} - \frac{4}{7} < 0$ Aussage richtig
- c) $\frac{21}{48} + \frac{4x}{48} > \frac{36}{48} \Leftrightarrow 21 + 4x > 36$ Aussage richtig für $x > 3,75$
- d) $\frac{5}{11} \cdot \frac{9}{5} = \frac{9}{11} < 1$ Aussage falsch

5 Rechnen mit Logarithmen

S. 79

- 1** Mithilfe der Tabelle wandelt man die an der Rechenoperation beteiligten Zahlen in Dreierpotenzen um und wendet die Potenzgesetze an. Mithilfe der Tabelle ermittelt man dann das Ergebnis der Rechenoperation.
- $$9 \cdot 729 = 3^2 \cdot 3^6 = 3^8 = 6561 \qquad 81 \cdot 729 = 3^4 \cdot 3^6 = 3^{10} = 59049$$
- $$27 \cdot 2187 = 3^3 \cdot 3^7 = 3^{10} = 59049 \qquad 59049 : 729 = 3^{10} : 3^6 = 3^4 = 81$$
- $$27^3 = (3^3)^3 = 3^9 = 19683$$

S. 80

-  **2** a) $\lg(4,7 \cdot 10^{150}) = \lg 4,7 + 150 \approx 150,672$ b) $\lg 3,6^{230} = 230 \cdot \lg 3,6 \approx 127,950$
c) $\lg(5 \cdot 10^{-120}) = \lg 5 - 120 \approx -119,301$ d) $\log_2(3 \cdot 2^{200}) = \log_2 3 + 200 \approx 201,585$
-  **3** a) 1,46 b) -8,64 c) -2,18 d) 2,5 e) 4,52 f) 2,46
- 4** $\lg b = 2 \cdot \lg a \Rightarrow \lg b = \lg a^2 \Rightarrow b = a^2$

- 5 a) $\lg 12 = 2 \cdot \lg 2 + \lg 3 = 1,07918$ b) $\lg 12 \cdot 18 = \lg(2^3 \cdot 3^3) = 3 \cdot (\lg 2 + \lg 3) = 2,3345$
 c) $\lg 27 = 3 \cdot \lg 3 = 1,43136$ d) $\lg \sqrt{6} = \frac{1}{2} \cdot \lg(\lg 2 + \lg 3) = 0,389075$
 e) $\lg \sqrt[4]{18} = \frac{1}{4}(\lg 2 + 2 \cdot \lg 3) = 0,3138175$ f) $\lg 270 = \lg(10 \cdot 3^3) = \lg 10 + 3 \cdot \lg 3 = 2,43136$
 g) $\lg 150 = \lg(300 : 2) = \lg 100 + \lg 3 - \lg 2 = 2,17609$
 h) $\lg 4,5 = \lg(9 : 2) = 2 \cdot \lg 3 - \lg 2 = 0,65321$
 i) $\lg 0,18 = \lg(3^2 \cdot 2 : 100) = 2 \cdot \lg 3 + \lg 2 - \lg 100 = -0,7447$
 k) $\lg 28 = \lg 4 \cdot 7$ aber $\lg 7$ nicht gegeben

- 6 a) $\log_4 x = 2 \cdot \log_4 3 \Rightarrow x = 3^2 = 9$ b) $\lg x = \lg 6 - \lg 3 \Rightarrow \lg x = \lg 2 \Rightarrow x = 2$
 c) $\lg x = \lg 25 + \lg 8 \Rightarrow \lg x = \lg 200 \Rightarrow x = 200$
 d) $\log_3 x = 3 \Rightarrow x = 3^3 = 27$
 e) $2 \lg x = \lg 144 \Rightarrow \lg x = \frac{1}{2} \lg 144 \Rightarrow \lg x = \lg 12 \Rightarrow x = 12$
 f) $\log_2(5x) = 1 + \log_2 6 \Rightarrow \log_2(5x) = \log_2 2 + \log_2 6 = \log_2 12 \Rightarrow 5x = 12 \Rightarrow x = 2,4$
 h) $\lg_{10} + \lg x - \lg 2 = \lg 64 - \lg 4 \Rightarrow \lg 5x = \lg 16 \Rightarrow 5x = 16 \Rightarrow x = 3,2$
 i) $\log_2 4 + \log_2 x = \log_2 125^3 \Rightarrow \log_2 4x = \log_2 25 \Rightarrow x = 6,25$

- 7 a) $\lg 2^{500} = 500 \lg 2 \approx 150,51499$; $2^{500} = 10^{150,51499} = 10^{150} \cdot 10^{0,51499} \approx 3,27 \cdot 10^{150}$
 b) $\lg 3^{-200} = -200 \lg 3 \approx -95,42425$;
 $3^{-200} = 10^{-95,42425} = 10^{-0,42425} \cdot 10^{-95} \approx 0,37648 \cdot 10^{-95} \approx 3,76 \cdot 10^{-96}$
 c) $\lg 12^{100} = 100 \cdot \lg 12 \approx 107,91812$; $12^{100} = 10^{107,91812} \approx 8,28 \cdot 10^{107}$

- 8 a) $\log_a 2 + 1 + \log_a b$ b) $\log_a u + \log_a v - \log_a w$ c) $\frac{1}{4} \log_a b$
 d) $2 \cdot \log_a(x+y)$ e) $-\frac{1}{3} \log_a b$ f) $\log_a(x+y) + \log_a(x-y)$
 g) $\log(3-a)$ h) $\log_a(x+1) - \log_a x$ i) $\lg(x+1) + \lg(x-1) - 2 \lg x$

- 9 a) $\log_a u$ b) $\lg(a+b)$ c) 0 d) $\frac{1}{2} \log_a x$ e) $-\lg(3x+2)$ f) $\lg \frac{x^2-1}{x^2}$

- 10 a) falsch $\lg a + \lg b = \lg(a \cdot b)$
 b) richtig $\frac{1}{2} \log_a b = x \Rightarrow a^x = \sqrt{b} \Rightarrow (a^2)^x = b$
 $\Rightarrow \log_{a^2} b = x \Rightarrow \frac{1}{2} \log_a b = \log_{a^2} b$
 c) richtig, denn $\log_a a = 1 \Leftrightarrow a^1 = a$ für alle $a > 0$

- 11 a) $\log_{4a} b = u \Leftrightarrow (4a)^u = b \Rightarrow \log_{a^2} b = u \Leftrightarrow (a^2)^u = b$
 $\Rightarrow a^2 = 4a \Rightarrow a = 4$ ($a = 0$ keine Lösung, da $\log_0 b$ nicht definiert ist)

Analog folgt:

- b) $a = \frac{1}{4}$ c) $a = \frac{1}{9}$

- 12 a) Auf 30,1 werden alle Zahlen des Intervalls $[30,05; 30,15[$ gerundet.
 $5^{30,05} \approx 1,01 \cdot 10^{21}$; $5^{30,15} \approx 1,19 \cdot 10^{21}$
 Der Wert der Potenz kann nach der Rundungsregel mit einer geltenden Ziffer angegeben werden.
 b) $50^{30,05} \approx 1,13 \cdot 10^{51}$; $50^{30,15} \approx 1,67 \cdot 10^{51}$
 Nach der Rundungsregel ist keine Ziffer gesichert.
 c) $500^{30,05} \approx 1,27 \cdot 10^{81}$; $500^{30,15} \approx 2,37 \cdot 10^{81}$
 Auch hier ist keine Ziffer gesichert.
 d) $500^{3,005} \approx 1,29 \cdot 10^8$; $500^{3,015} \approx 1,37 \cdot 10^8$
 Nur die erste Ziffer des Potenzwertes ist gesichert.
 e) $500^{0,3005} \approx 6,47$; $500^{0,3015} \approx 6,51$
 Beide Werte liegen im Intervall $[6,45; 6,55[$; also $500^{0,301} \approx 6,5$

S. 81

- 13 a) $S = \lg \frac{1000I_0}{I_0} = \lg 1000 = 3$
 b) $\lg \frac{I}{I_0} = 6,4 \Rightarrow I = I_0 \cdot 10^{6,4} \approx I_0 \cdot 2,51 \cdot 10^6$
 c) Bayern: $I_B = I_0 \cdot 10^{5,8}$; Sumatra: $I_S = I_0 \cdot 10^{9,1} \Rightarrow$ also: $\frac{I_S}{I_B} = 10^{3,3} \approx 1995$
 Das Beben bei Sumatra (am 26. 12. 2004) war etwa 2000-mal stärker als das stärkste Beben in Bayern.
 d) $S = \lg \frac{I}{I_0}$
 I_0 wird halbiert: $S_1 = \lg \frac{I/2}{I_0} = \lg \frac{I}{I_0} + \lg 2 = S + \lg 2$
 I_0 wird verdoppelt: $S_2 = \lg \frac{I}{2 \cdot I_0} = S - \lg 2$

S. 82

- 14 a) $\lg 1 = 0$; $\lg 1000 = \lg 10^3 = 3$; $\lg 0,001 = \lg 10^{-3} = -3$
 b) $\lg 10^{-n} = -n$
 10^{-n} ist also auf der logarithmischen Skala n Längeneinheiten von der Eins entfernt.
 Der Platz für Null rückt ins Unendliche.

- 15 a) In einem Koordinatensystem auf einfach logarithmischem Papier liegen die Messpunkte auf einer Geraden g .

Ansatz für g :

$$g(d) = \lg f(d) = \lg f(0) + d \cdot \lg a = \lg (f(0) \cdot a^d)$$

$$\Rightarrow f(d) = f(0) \cdot a^d$$

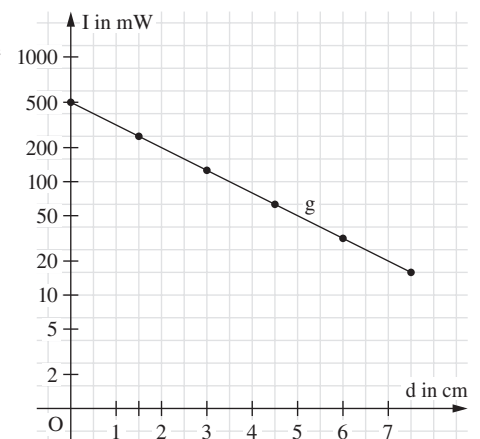
$$f(0) = 500 \quad f(3) = 125$$

$$500 \cdot a^3 = 125 \Rightarrow a^3 = 0,25 \Rightarrow a \approx 0,63$$

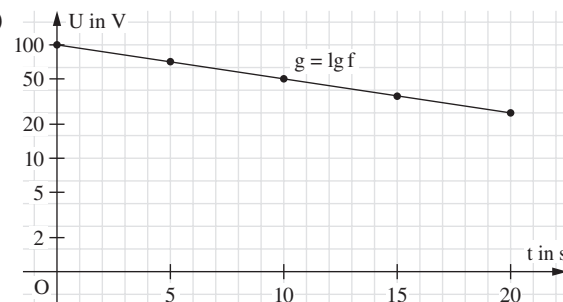
$$f(d) = 500 \cdot 0,63^d$$

$$g(d) = \lg 500 + d \cdot \lg 0,63 = \lg (500 \cdot 0,63^d)$$

b) $(0,63)^9 \approx 0,01563 \approx 1,56\%$



- 16 a)



$$f: t \mapsto f(0) \cdot a^t$$

$$f(0) = 100 \quad f(20) = 24$$

$$\Rightarrow 100 \cdot a^{20} = 24$$

$$\Rightarrow a = \sqrt[20]{0,24} \approx 0,93$$

$$y = 100 \cdot 0,93^t$$

- b) Pro Sekunde nimmt die Spannung um 7% ab.

c) $0,93^{t_H} = \frac{1}{2} \Rightarrow t_H = \frac{\lg 0,5}{\lg 0,93} \approx 9,55$

Die Halbwertszeit beträgt ca. 9,6 s.

- 17 $f(x) = a^x \Rightarrow \lg f(x) = \lg a^x = x \cdot \lg a$
 $g(x) = a^{x+d} = a^x \cdot a^d \Rightarrow \lg g(x) = \lg (a^x \cdot a^d) = \lg a^x + \lg a^d = x \cdot \lg a + d \cdot \lg a$
 Auf einfach logarithmischem Papier aufgetragen sind die Graphen der Funktion f und g parallele Geraden mit der Steigung $\lg a$.

- 18 a) Von $I = 1000 I_0$ auf $I = 21\,000 I_0$
 $S = 10 \cdot \lg 1000 = 30 \text{ dB}$ $S_1 = 10 \cdot \lg 21\,000 \approx 43,2 \text{ dB}$
 analog von $I = 10\,000 I_0$ auf $I = 30\,000 I_0$: $S = 40 \text{ dB}$ $S_1 \approx 44,8 \text{ dB}$
 analog von $I = 100\,000 I_0$ auf $I = 120\,000 I_0$: $S = 50 \text{ dB}$ $S_1 \approx 50,8 \text{ dB}$
- b) $S = 40 \text{ dB} \Rightarrow I = 10^4 \cdot I_0$; $S_1 = 80 \text{ dB} \Rightarrow I_1 = 10^8 \cdot I_0 = 10^4 \cdot I$
 Bei einer Steigerung der Lautstärke von 40 dB auf 80 dB steigert sich die Reizintensität auf das 10 000-fache.
- c) $L = 50 \text{ dB} \Rightarrow \lg \frac{I}{I_0} = 5 \Rightarrow I = 10^5 \cdot I_0$; $I = 10^{-7} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \Rightarrow I_0 = 10^{-7} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot 10^{-5} = 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$
- d) $S = 10 \cdot \lg \frac{I}{I_0}$
 $S_1 = 10 \cdot \lg \frac{I}{100 I_0} = 10 \cdot [\lg \frac{I}{I_0} - \lg 100] = 10 \cdot [\lg \frac{I}{I_0} - 2] = S - 20$
 Der Schwerhörige empfindet die Lautstärke gegenüber dem normal Hörenden um 20 dB verringert.



e) Individuelle Lösungen

19 $V = 125 \text{ cm}^3 = (5 \text{ cm})^3 \Rightarrow a = 5 \text{ cm}$

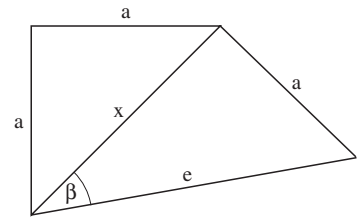
Zeichnung im Maßstab 1:2

zeichnerisch: $e \approx 8,7 \text{ cm}$

$$\beta \approx 35^\circ$$

rechnerisch: $e = \sqrt{3 \cdot a^2} = \sqrt{75} \text{ cm} \approx 8,7 \text{ cm}$

$$\sin \beta = \frac{a}{e} = \frac{5}{\sqrt{75}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \beta \approx 35,3^\circ$$



20 a) $x = 1$; $y = 2,5$

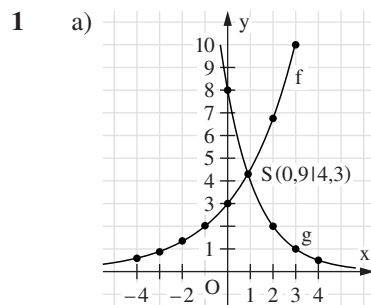
b) (I) $\frac{2x-1}{3y-1} = \frac{2x-3}{3y-5} \Leftrightarrow (2x-1)(3y-5) = (2x-3)(3y-1) \Leftrightarrow 4x-3y = 1$

(II) $\frac{5x-2}{6} = \frac{5y-3}{9} \Leftrightarrow 3(5x-2) = 2(5y-3) \Leftrightarrow 3x-2y = 0$

$$\Rightarrow x = -2; y = -3$$

6 Exponentialgleichungen

S. 83



b) 1. Möglichkeit: $d(x) = f(x) - g(x)$;

$$d(0,9) = 0,034; d(0,89) = -0,013$$



Die Nullstelle von d liegt im Intervall $[0,89; 0,9]$. In diesem Intervall liegt auch die x -Koordinate des Schnittpunkts. Durch systematisches Probieren kann man das Intervall verkleinern.

2. Möglichkeit: Umformen der Gleichung $f(x) = g(x)$;

$$3 \cdot 1,5^x = 8,05^x \Rightarrow \frac{1,5^x}{0,5^x} = \frac{8}{3} \Rightarrow 3^x = \frac{8}{3} \Rightarrow x \cdot \lg 3 = \lg \frac{8}{3} \Rightarrow x = \frac{\lg \frac{8}{3}}{\lg 3} \approx 0,89279$$

3. Möglichkeit: $\lg f(x) = \lg g(x)$

$$\lg 3 + x \cdot \lg 1,5 = \lg 8 + x \cdot \lg 0,5 \Rightarrow \frac{\lg 8 - \lg 3}{\lg 1,5 - \lg 0,5} \approx 0,89279$$

S. 84

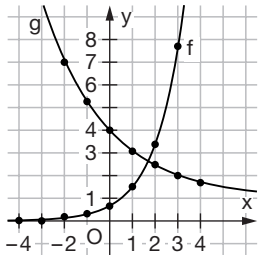
2 a) 2 b) 0,62 c) 3 d) -2,36 e) 0,38 f) -1,5 g) 1 h) 5

3 a) $5 \cdot 0,8^x = 2 \cdot 1,6^x$ $x = \frac{\lg 2 - \lg 5}{\lg 0,8 - \lg 1,6} \approx 1,32$ b) $1,5^{2x-1} = 2^{x+1}$ $x = \frac{\lg 2 + \lg 1,5}{2 \cdot \lg 1,5 - \lg 2} \approx 9,33$

c) keine Schnittpunkte, da $f(x) < 0$ und $g(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

- 4 $1,2 \cdot 2^x = 30 \Rightarrow x \approx 4,643$ 0,643 Wochen = $0,643 \cdot 7$ Tage $\approx 4,5$ Tage
Nach 4 Wochen, 4 Tagen und 12 Stunden erreicht die Alge die Wasseroberfläche.
- 5 a) $1,05^x = 3 \Rightarrow x \approx 22,5$ Nach etwa 22,5 Jahren hat sich das Kapital verdreifacht.
b) $7000 \cdot 1,055^x = 12000 \Rightarrow x \approx 10,07$
Nach etwa 10 Jahren ist das Kapital von 7000 € auf 12000 € angewachsen.
- 6 a) $3^x = u \Rightarrow u^2 - 4u + 3 = 0$ $u_1 = 1 \Rightarrow x_1 = 0$ $u_2 = 3 \Rightarrow x_2 = 1$
b) $7^x = u \Rightarrow u^2 + 4u - 21 = 0$ $u_1 = 3 \Rightarrow x_1 \approx 0,565$ $u_2 = -7$ keine Lösung für x,
da $7^x > 0$ für alle x
- c) $5^{2x} - 3 \cdot 5^x + 2 = 0$
 $5^x = u \Rightarrow u^2 - 3u + 2 = 0$ $u_1 = 1 \Rightarrow x_1 = 0$ $u_2 = 2 \Rightarrow x_2 \approx 0,43$
- d) $2^{3x} = u \Rightarrow u^2 - 5u - 24 = 0$ $u_1 = 8 \Rightarrow x = 1$ $u_2 = -3$ keine Lösung für x,
da $2^{3x} > 0$ für alle x
- 7 a) $5^{\frac{7-x}{3}} = 5^{x-2} \Rightarrow \frac{7-x}{3} = x-2 \Rightarrow x = 3,25$ b) $3^{\frac{2x+5}{4}} = 3^{\frac{3x}{2}} \Rightarrow \frac{2x+5}{4} = \frac{3x}{2} \Rightarrow x = 1,25$



- 8 a)  Die Gleichung $1,5^{2x-1} = 3 \cdot 0,7^x + 1$ lässt sich durch Logarithmieren nicht in eine nach x auflösbare Gleichung umformen. Die Rechengesetze erlauben keine Umformung von $\lg(3 \cdot 0,7^x + 1)$.
- b) $d(x) = 3 \cdot 0,7^x + 1 - 1,5^{2x-1}$
 $d(1,5) \approx 0,507$; $d(1,7) \approx -0,010$; $d(1,6) \approx 0,255$; $d(1,69) \approx 0,017$; $d(1,696) \approx 0,0007$
 $d(1,697) \approx -0,002$
 $x_S \in [1,696; 1,697]$ Auf zwei Nachkommastellen ist $x_S \approx 1,70$.
- c) $x_S \approx 1,70$; $d(1,7) = 0,01016 \approx -0,01$; $f(1,70) \approx 2,65$; $g(1,70) \approx 2,64$

S. 85



- 9 a) Ansatz für die aktuelle Aktivität:
 $A(t) = 15,3 \cdot a^t$; $a^{5730} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 0,5^{\frac{1}{5730}}$; $A(t) = 15,3 \cdot 0,5^{\frac{t}{5730}}$; $\frac{A(t+1000)}{A(t)} = 0,5^{\frac{1000}{5730}} \approx 0,886$
In 1000 Jahren nimmt der C-14-Gehalt um 11,4% ab.
- b) $A(t) = 15,3 \cdot 0,5^{\frac{t}{5730}} \Rightarrow t = 5730 \cdot \frac{\lg A(t) - \lg 15,3}{\lg 0,5}$
Alter von
- Buch Jesaja: $A(t) = 12 \Rightarrow t \approx 2008$ Jahre
 - Grabtuch von Twin: $A(t) = 13,8 \Rightarrow t \approx 853$ Jahre
 - Ägyptischer Holz sarcophag: $A(t) = 8 \Rightarrow t \approx 5360$ Jahre
 - Holzkohle aus Stonehenge: $A(t) = 9,5 \Rightarrow t \approx 3940$ Jahre
 - Knochen eines Mammut: $A(t) = 1,9 \Rightarrow t \approx 17244$ Jahre
- c) $A(40000) = 15,3 \cdot 0,5^{\frac{40000}{5730}} \approx 0,12$
Bei dieser geringen Aktivität wird die Messung zu ungenau.

- 10 a) $x \approx 2,107$ b) $x \approx 5,049$ c) $x_1 = 0,5$; $x_2 = 1$
d) $x \approx 1,638$ e) $x \approx 0,9275$ f) $4x = \frac{2}{3} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{6}$
(a), b), d) analog Aufgabe 2. c), e) analog Aufgabe 6.)

- 11 a) Phosphor 32: $(1-0,047)^t = 0,5 \Rightarrow t_H \approx 14,4$ Tage
b) Kobalt 58: $0,99^t = 0,5 \Rightarrow t_H \approx 69$ Tage
c) Polonium 228: $0,8^t = 0,5 \Rightarrow t_H \approx 3,1$ Minuten
d) Plutonium 239: $(1-0,028)^{\frac{t}{1000}} = 0,5 \Rightarrow t_H \approx 24407$ Jahre
e) Es sind noch $12,5\% = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$ der ursprünglich vorhanden radioaktiven Atome nicht zerfallen. Dies ist nach der dreifachen Halbwertszeit der Fall.
Phosphor 32: 43,2 Tage; Kobalt 58: 207 Tage;
Polonium 228: 9,3 Minuten; Plutonium 239: 73221 Jahre

12 $0,5 = 0,63^x \Rightarrow x \approx 1,5 \text{ cm}$; Die Bleiplatte müsste etwa 1,5 cm dick sein.

13 Aluminium: $0,5 = a^9 \Rightarrow a = 0,5^{\frac{1}{9}}$
 $0,5^{\frac{x}{9}} = 0,2 \Rightarrow x = \frac{9 \cdot \lg 0,2}{\lg 0,5} \approx 20,9$

Nach dem Durchdringen von 20,9 cm Aluminium ist die Intensität auf $0,2 I_0$ gesunken.

analog: Eisen: $0,5^{\frac{x}{2,8}} = 0,2 \Rightarrow x \approx 6,5 \text{ cm}$

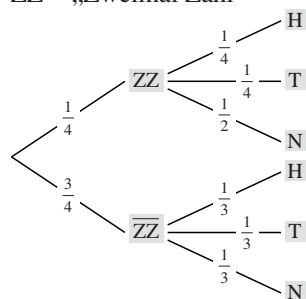
Wasser: $0,5^{\frac{x}{25}} = 0,2 \Rightarrow x \approx 58,0 \text{ cm}$

14 a) $7 \cdot 2^x = \frac{1}{3} \cdot 3^{2x} \Rightarrow \lg 7 + x \lg 2 = \lg \frac{1}{3} + x \cdot 2 \lg 3 \Rightarrow x = \frac{\lg \frac{1}{3} - \lg 7}{\lg 2 - 2 \lg 3} \approx 2,02$

b) $3^{2x} = 3 \cdot 5^x \Rightarrow x = \frac{\lg 3}{\lg 9 - \lg 5} \approx 1,87$

c) $7 \cdot 2^x = 13 \cdot 3^x \Rightarrow x = \frac{\lg 7 - \lg 13}{\lg 3 - \lg 2} \approx -1,53$

15 a) ZZ = „Zweimal Zahl“

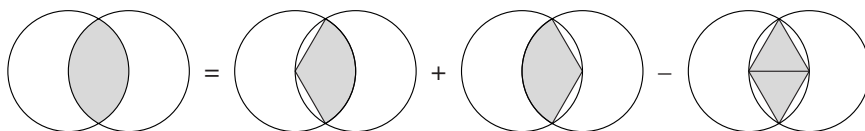


$$P(H) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{16}$$

b) $P(N) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot x = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{8} + \frac{3}{4}x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

Die Sektorfläche für N muss auch beim 2. Glücksrad auf 50% der Kreisfläche vergrößert werden.

16



Inhalt des Flächenstücks:

2 · Kreissektor
($r = 3 \text{ cm}$; $\alpha = 120^\circ$)

- 2 · gleichseitiges Dreieck
($a = 3 \text{ cm}$)

$$A = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot (3 \text{ cm})^2 \pi - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \text{ cm} \cdot \frac{3 \text{ cm}}{2} \cdot \sqrt{3}$$

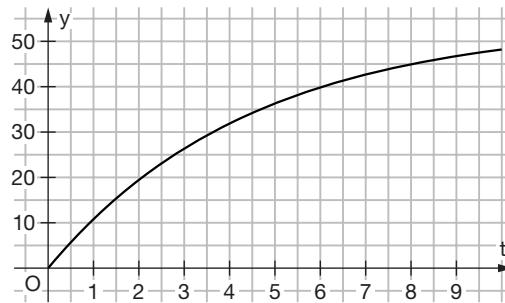
$$= (6\pi - 4,5 \cdot \sqrt{3}) \text{ cm}^2$$

$$\approx 11,06 \text{ cm}^2$$

Thema: Wachstum mit Grenzen

S. 86

1 a) $f(t) = 54 \cdot (1 - 0,8^t)$



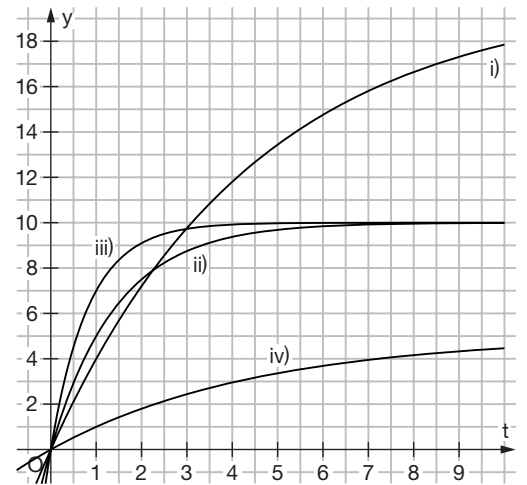
Maximale Fallgeschwindigkeit: $54 \frac{m}{s}$

c) $f: t \mapsto S \cdot (1 - a^t)$

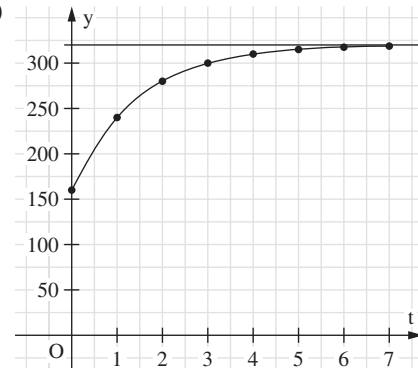


S bestimmt die maximale Fallgeschwindigkeit, a den Anstieg der Fallgeschwindigkeit. Ein kleineres a bewirkt ein schnelleres Anwachsen der Fallgeschwindigkeit.

b)



2 a)

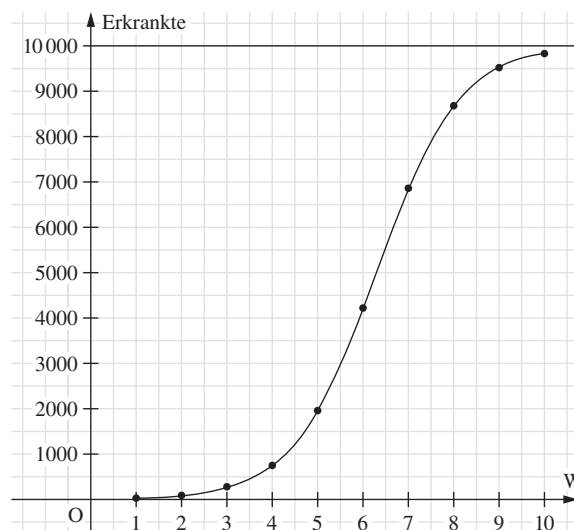


$f: t \mapsto 160 + 160 \cdot \frac{1}{2} + 160 \cdot (\frac{1}{2})^2 + \dots + 160 \cdot (\frac{1}{2})^t$
Die Zahl der Erkrankten nähert sich dem Wert 320.

b) $f(t) = 320 - 160 \cdot (\frac{1}{2})^t$

S. 87

3 a)



b) $f(t) = S \cdot \frac{a^{t-m}}{1+a^{t-m}}$; $S = 10000$

$\Rightarrow f(t) = 10000 \cdot \frac{a^t \cdot a^{-m}}{1+a^{t-m}}$

$f(0) = 10$

$\Rightarrow 10000 \cdot \frac{a^{-m}}{1+a^{-m}} = 10$

$\Rightarrow a^{-m} = \frac{1}{999}$

$\Rightarrow f(t) = 10000 \cdot \frac{a^t}{999+a^t}$

$f(5) = 1960$

$\Rightarrow 10000 \cdot \frac{a^5}{999+a^5} = 1960$

$\Rightarrow a^5 = 243,54 \Rightarrow a \approx 3,0$

$f(t) = 10000 \cdot \frac{3^t}{999+3^t}$



4 Individuelle Lösungen