II Trigonometrie aus geometrischer und funktionaler Sicht

1 Sinus und Kosinus am Einheitskreis

S. 36

1 a) $P\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\,\middle|\,\frac{1}{2}\right)$ b) $\beta = 150°$

S. 38

2 Man zeichnet einen Einheitskreis (z. B. mit der Einheit 10 cm) und liest die x- bzw. y-Koordinate der Punkte P_α auf dem Einheitskreis ab.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
α	15°	105°	155°	205°	325°	–35°
$\sin\alpha$	0,26	0,97	0,42	–0,42	–0,57	–0,57
$\cos\alpha$	0,97	–0,26	–0,91	–0,91	0,82	0,82

3 a) 0,3420 b) –0,7193 c) –0,8141 d) 0,2470 e) –0,7466 f) –0,3502

4 a) $\sin 0° = 0$; $\sin 90° = 1$; $\sin 180° = 0$; $\sin 270° = -1$
b) $\cos 0° = 1$; $\cos 90° = 0$; $\cos 180° = -1$; $\cos 270° = 0$

5 a) $\alpha_1 \approx 15{,}0°$; $\alpha_2 \approx 165{,}0°$ b) $\alpha_1 \approx 24{,}3°$; $\alpha_2 \approx 335{,}7°$ c) $\alpha_1 \approx 253{,}3°$; $\alpha_2 \approx 286{,}7°$
d) $\alpha_1 \approx 172{,}3°$; $\alpha_2 \approx 187{,}7°$ e) $\alpha_1 \approx 208{,}6°$; $\alpha_2 \approx 331{,}4°$ f) $\alpha_1 \approx 94{,}9°$; $\alpha_2 \approx 265{,}1°$

S. 39

6 a) $90° < \alpha < 180°$ b) $270° < \alpha < 360°$ c) $180° < \alpha < 270°$

7 Aus $2 = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi \cdot 1$ folgt $\alpha = 114{,}6°$, also $P(-0{,}42\,|\,0{,}91)$.

8 a) $\sin 135° = \sin 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ $\sin \frac{7}{6}\pi = \sin 210° = -\sin 30° = -\frac{1}{2}$
$\cos \frac{4}{3}\pi = \cos 240° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$ $\sin \frac{7}{4}\pi = \sin 315° = -\sin 45° = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\cos 315° = \cos 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
b) $\sin\alpha = 1$ für $\alpha = 90°$ $\sin\alpha = 0$ für $\alpha_1 = 0°$; $\alpha_2 = 180°$
$\sin\alpha = -1$ für $\alpha = 270°$ $\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ für $\alpha_1 = 45°$; $\alpha_2 = 135°$
$\cos\alpha = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ für $\alpha_1 = 150°$; $\alpha_2 = 210°$ $\cos\alpha = 0$ für $\alpha_1 = 90°$; $\alpha_2 = 270°$
$\cos\alpha = 1$ für $\alpha = 0°$ $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ für $\alpha_1 = 120°$; $\alpha_2 = 240°$

9 a) falsch, da $|\sin\alpha| \leqq 1$
b) falsch, da $\cos 120° = -\cos 60° = -0{,}5$
c) wahr, da $\cos \frac{4}{3}\pi = \cos 240° = \cos 120°$
d) falsch, da $x = 0{,}6428 \approx \frac{\pi}{5}$ ein Winkel im I. Quadranten mit positivem sin-Wert ist
e) falsch, da $\sin 45° + \cos 225° = \sin 45° + \cos 135° = \sin 45° - \cos 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0$
f) wahr, da $\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)^2 + \left(\cos\frac{5\pi}{3}\right)^2 = (\sin 60°)^2 + (\cos 300°)^2$
$= (\sin 60°)^2 + (\cos 60°)^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$

e) Individuelle Lösungen

10 a) Das Vorzeichen ergibt sich jeweils aus dem Quotienten $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ (z. B. im III. Quadranten Zähler < 0, Nenner > 0):
I. Quadrant: +; II. Quadrant: –; III. Quadrant: +; IV. Quadrant: –
b) $\tan 60° = \frac{\sin 60°}{\cos 60°} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$
c) $\tan 112{,}5° \approx -2{,}4142$; $\tan 213{,}15° \approx 0{,}6531$; $\tan 298°36' = \tan 298{,}6° \approx -1{,}8341$;
$\tan 0{,}625\pi \approx -2{,}4142$
d) $\varepsilon_1 \approx 116{,}9°$; $\varepsilon_2 \approx 296{,}9°$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 10
ISBN 978-3-12-731961-3

11 a) Lexikon, Internet

b) Für P: $\cos 30° = \frac{x_P}{4} \Rightarrow x_P = 2\sqrt{3}$; $\sin 30° = \frac{y_P}{4} \Rightarrow y_P = 2$

Für Q: $r^2 = (-2{,}5)^2 + (-2{,}5\sqrt{3})^2 \Rightarrow r = 5$

Da $x_Q < 0$ und $y_Q < 0$ gilt $180° < \varphi < 270°$; $\cos \varphi' = \frac{2{,}5}{5} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi' = 60° \Rightarrow \varphi = 240°$

c) $\varphi_1 \approx 49°$; $r_1 \approx 5{,}5\,\text{km}$; $\varphi_2 \approx 311°$; $r_2 \approx 6{,}5\,\text{km}$; $\varphi_3 \approx 326°$; $r_3 \approx 3{,}5\,\text{km}$

$\cos \varphi_1 = \frac{x_1}{r_1} \Rightarrow x_1 \approx 3{,}6$; $\sin \varphi_1 = \frac{y_1}{r_1} \Rightarrow y_1 \approx 4{,}2 \Rightarrow P_1(3{,}6|4{,}2)$

Entsprechend: $P_2(4{,}3|-4{,}9)$; $P_3(2{,}9|-2{,}0)$

12 a) $x_{1/2} = \pm\sqrt{2}$ b) $x_1 = 0$; $x_2 = 3$

2 Der Sinussatz

S. 40

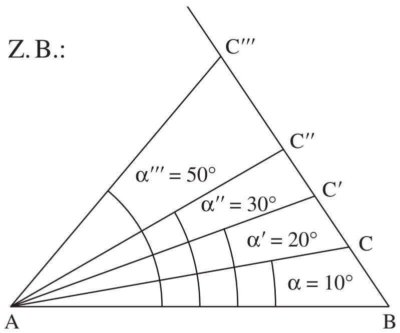
1 a) Maya meint: Da $\alpha = 1{,}5 \cdot \beta$ ist, muss $a = 1{,}5 \cdot b$ sein.
Sie macht folgenden Fehler: Zwar liegt in jedem Dreieck dem größeren Winkel die längere Seite gegenüber, aber Winkelgrößen und Seitenlängen sind nicht proportional.

b) $e = b \cdot \sin \alpha \approx 4{,}2\,\text{sm}$

c) $a = \frac{a}{\sin \beta} \approx 6{,}8\,\text{sm}$, wie angegeben
oder: $c_1 + c_2 = b \cdot \cos \alpha + a \cdot \cos \beta \approx 8{,}1\,\text{sm} = \overline{AB}$, wie angegeben

S. 42

2 Z. B.:



ΔABC: $\alpha = 10°$; $\beta = 45°$; $\gamma = 125°$;
$a = 1{,}06\,\text{cm}$; $b = 4{,}32\,\text{cm}$; $c = 5{,}00$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin 10°}{\sin 45°} \approx 0{,}25 \approx \frac{1{,}06\,\text{cm}}{4{,}32\,\text{cm}} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{\sin 10°}{\sin 125°} \approx 0{,}21 \approx \frac{1{,}06\,\text{cm}}{5{,}00\,\text{cm}} = \frac{a}{c}$$

$$\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{\sin 45°}{\sin 125°} \approx 0{,}86 \approx \frac{4{,}32\,\text{cm}}{5{,}00\,\text{cm}} = \frac{b}{c}$$

Analog lässt sich der Sinussatz für die Dreiecke ABC′, ABC″ und ABC‴ bestätigen.

3 a) $\frac{a_1+a_2}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin(180°-\alpha-\gamma)}$; $\frac{a_1+a_2}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$; $\frac{b}{c} = \frac{\sin(180°-\alpha-\gamma)}{\sin \gamma}$ b) $\frac{b}{\frac{c}{2}} = \frac{\sin(180°-\alpha-\gamma_1)}{\sin \gamma_1}$

c) $\frac{a_1+a_2}{\frac{c}{2}} = \frac{\sin(\alpha+\gamma_1)}{\sin \gamma_2}$ d) $\frac{a_1}{w_\alpha} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin(180°-\alpha-\gamma)}$; $\frac{a_1}{c} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\gamma\right)}$; $\frac{w_\alpha}{c} = \frac{\sin(180°-\alpha-\gamma)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\gamma\right)}$

e) $\frac{a_2}{b} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin\left(180°-\frac{\alpha}{2}-\gamma\right)}$; $\frac{a_2}{w_\alpha} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \gamma}$; $\frac{b}{w_\alpha} = \frac{\sin\left(180°-\frac{\alpha}{2}-\gamma\right)}{\sin \gamma}$

4 Ergänzend zum Lösungssalat sind die übrigen Stücke angegeben.
Es gibt jeweils eine Lösung, da der in Klammern angeführte Kongruenzsatz zutrifft.

a) $\alpha \approx 47{,}9°$; $\gamma \approx 62{,}1°$; $c \approx 5{,}36\,\text{cm}$ (SsW) b) $\alpha \approx 19{,}8°$; $\beta \approx 135{,}2°$; $b \approx 8{,}33\,\text{m}$ (SsW)

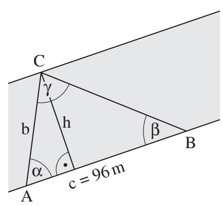
c) $\beta \approx 38{,}8°$; $\gamma \approx 31{,}2°$; $c \approx 4{,}14\,\text{cm}$ (SsW) d) $\gamma \approx 99{,}6°$; $c \approx 6{,}86\,\text{cm}$; $b \approx 4{,}48\,\text{cm}$ (SWW)

e) $\gamma \approx 23{,}7°$; $\alpha \approx 14{,}8°$; $a \approx 3{,}70\,\text{dm}$ (SsW) f) $\alpha \approx 66°$; $a \approx 7{,}99\,\text{cm}$; $c \approx 5{,}63\,\text{cm}$ (SWW)

5 $\gamma \approx 79°$

$b \approx \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \cdot c \approx 85{,}5\,\text{m}$

Breite: $h = b \cdot \sin \alpha \approx 55\,\text{m}$



Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 10
ISBN 978-3-12-731961-3

6 Der gegebene Winkel liegt jeweils der kleineren Seite gegenüber, so dass der SsW-Satz nicht anwendbar ist. Die Lösung ist daher nicht eindeutig.
a) $\beta_1 \approx 64{,}7°$; $\gamma_1 \approx 80{,}3°$; $c_1 \approx 5{,}67\,\text{cm}$ $\beta_2 \approx 115{,}3°$; $\gamma_2 \approx 29{,}7°$; $c_2 \approx 2{,}85\,\text{cm}$
b) $\gamma_1 \approx 81{,}2°$; $\alpha_1 \approx 68{,}8°$; $a_1 \approx 7{,}83\,\text{m}$ $\gamma_2 \approx 98{,}8°$; $\alpha_2 \approx 51{,}2°$; $a_2 \approx 6{,}54\,\text{m}$
c) $\alpha_1 \approx 51{,}4°$; $\beta_1 \approx 95{,}1°$; $b_1 \approx 10{,}83\,\text{cm}$ $\alpha_2 \approx 128{,}6°$; $\beta_2 \approx 17{,}9°$; $b_2 \approx 3{,}35\,\text{cm}$
d) $\beta_1 \approx 73{,}2°$; $\alpha_1 \approx 56{,}8°$; $a_1 \approx 6{,}11\,\text{cm}$ $\beta_2 \approx 106{,}8°$; $\alpha_2 \approx 23{,}2°$; $a_2 \approx 2{,}88\,\text{cm}$

7 a) 1 Lösung: $\beta = 90°$; $\gamma = 60°$; $c \approx 5{,}20\,\text{cm}$
b) Es ergibt sich $\sin\beta = \frac{5}{6}\sqrt{2} > 1$, also keine Lösung.
c) 2 Lösungen: $\gamma_1 \approx 51{,}8°$; $\beta_1 \approx 88{,}2°$; $b_1 \approx 7{,}00\,\text{cm}$
$\gamma_2 \approx 128{,}2°$; $\beta_2 \approx 11{,}8°$; $b_2 \approx 1{,}43\,\text{cm}$
d) Es ergibt sich $\sin\gamma = \frac{17}{29}\cdot\sqrt{3} > 1$, also keine Lösung.
e) 1 Lösung: $\gamma \approx 40°$; $b \approx 8{,}42\,\text{cm}$
f) Individuelle Lösungen

8 a) Es gehören zusammen: $c_1 \approx 0{,}69\,\text{m}$; $\beta_1 \approx 128{,}7°$; $\gamma_1 \approx 14{,}8°$
$c_2 \approx 2{,}69\,\text{m}$; $\beta_2 \approx 51{,}3°$; $\gamma_2 \approx 92{,}2°$
Begründung: c_1 ist die kleinste Seite im Dreieck, daher muss für den Gegenwinkel γ_1 $\gamma_1 < \alpha$ gelten, also $\gamma_1 \approx 14{,}8°$. Wegen der Winkelsumme im Dreieck muss $\beta_1 \approx 128{,}7°$ sein. (Entsprechend kann ausgehend von c_2 als größter Seite im Dreieck argumentiert werden.)
b) $P = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$

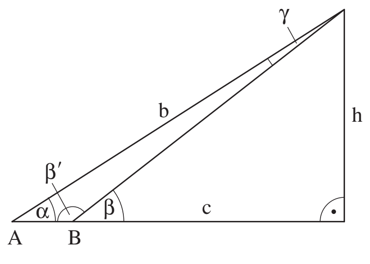
9 a) $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin(90°-\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{a}{b}$; $\frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{1} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{a}{c}$; $\frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{1} \Rightarrow \sin\beta = \frac{b}{c}$
b) $\frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{\sin\alpha}{\sin(180°-2\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha}$

10 a) $\delta = 108°$
Man zeichnet z. B. die Parallele zu AD durch C und rechnet im $\Delta A'BC$ mit $\overline{A'B} = a - c$.
$\gamma' \approx 64{,}6° \Rightarrow \gamma = \alpha + \gamma' \approx 136{,}6° \Rightarrow \beta = 43{,}4°$; $d \approx 2{,}89\,\text{cm}$
b) $\delta = 140°$; $\gamma = 75°$
Aus dem Hilfsdreieck $A'BC$ (vgl. a)) ergibt sich $d \approx 2{,}70\,\text{m}$, $c \approx 2{,}59\,\text{m}$.

11 Dreieck ABD: $\frac{\overline{BD}}{c} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\delta}$ mit $\delta = \sphericalangle ADB$ Dreieck ADC: $\frac{\overline{DC}}{b} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin(180°-\delta)}$
Da $\sin(180°-\delta) = \sin\delta$ ist, gilt: $\frac{\overline{BD}}{c} = \frac{\overline{DC}}{b}$ bzw. $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{c}{b}$.
Die Winkelhalbierende teilt die Gegenseite im Verhältnis der anliegenden Seiten.

S. 43

12



a) $\frac{\sin\beta'}{\sin\gamma} = \frac{b}{\overline{AB}}$
$\Rightarrow b = \frac{\sin(180°-\beta)}{\sin(\beta-\alpha)}\cdot\overline{AB} = \frac{\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}\cdot\overline{AB}$
$\approx 1288{,}42\,\text{m}$
$\Rightarrow h = b\cdot\sin\alpha \approx 646{,}35\,\text{m}$
b) $\tan\alpha = \frac{h}{c+\overline{AB}}$; $\tan\beta = \frac{h}{c}$
$\Rightarrow \tan\alpha\cdot(c+\overline{AB}) = \tan\beta\cdot c$
$\Rightarrow c = \frac{\tan\alpha\cdot\overline{AB}}{\tan\beta - \tan\alpha} \approx 914{,}57\,\text{m}$
$\Rightarrow h = c\cdot\tan\beta \approx 646{,}35\,\text{m}$

13 a) $\overline{AB} = \frac{24\cdot 1{,}852}{4}\,\text{km} = 11{,}112\,\text{km}$; $\beta = \sphericalangle LBA = 96° + 49{,}6° = 145{,}6° \Rightarrow \gamma = \sphericalangle ALB = 13{,}4°$
$\overline{AL} = \frac{\sin\beta\cdot\overline{AB}}{\sin\gamma} \approx 27{,}089\,\text{km}$; $\alpha = \sphericalangle LAB = 84° - 63° = 21°$; $\overline{BL} = \frac{\sin\alpha\cdot\overline{AB}}{\sin\gamma} \approx 17{,}183\,\text{km}$
b) $d = \overline{BL}\cdot\cos(84° - 49{,}6°) \approx 14{,}178\,\text{km}$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 10
ISBN 978-3-12-731961-3

14 a) $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\sin\beta}{\sin(180°-\alpha-\beta)} \Rightarrow \overline{AC} = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \cdot \overline{AB} \approx 338{,}25\,\text{m}$; $h = \overline{AC} \cdot \tan\gamma \approx 209{,}72\,\text{m}$

Der Winkel δ wurde bei dieser Rechnung nicht benutzt.

b) $\overline{BC} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} \cdot \overline{AB} \approx 373{,}39\,\text{m}$; $h = \overline{BC} \cdot \tan\delta \approx 209{,}54\,\text{m}$

Die geringe Differenz zwischen den beiden Ergebnissen ist auf Messfehler zurückzuführen. Bei großer Differenz könnte man der Messung nicht mehr trauen.

15 a) $h = h' + \overline{AB}$ mit $h' = \sin\beta \cdot \overline{AM} \quad\Rightarrow\quad h = \sin\beta \cdot \overline{AM} + \overline{AB}$

$\frac{\overline{AM}}{\overline{AR}} = \frac{\sin(\sphericalangle MRA)}{\sin(\sphericalangle AMR)}$ mit $\sphericalangle MRA = 180° - 2\alpha$

$\sphericalangle AMR = 180° - \alpha - \beta - \sphericalangle MRA = \alpha - \beta$

$\overline{AR} = \frac{\overline{AB}}{\sin\alpha} \approx 586{,}81\,\text{m} \quad\Rightarrow\quad \overline{AM} = \frac{\sin(180°-2\alpha)}{\sin(\alpha-\beta)} \cdot \overline{AR} \approx 8685{,}18\,\text{m} \quad\Rightarrow\quad h \approx 1665{,}47\,\text{m}$

16 mögliche Lösungen:

a) $x(x^2-x-1)$
b) $(a-b)^2$
c) $2(3s+1)^2$
d) $(a+2)(a-3)$

3 Der Kosinussatz

S. 44

1 a) Für $\alpha = 90°$ ist $\overline{BC} = \sqrt{b^2+c^2}$.

b) Es gilt: $x = b \cdot \cos\alpha$ und $h = b \cdot \sin\alpha$.

$$\begin{aligned}\overline{BC}^2 &= (c-x)^2 + h^2\\ &= (c - b\cdot\cos\alpha)^2 + b^2 \cdot \sin^2\alpha\\ &= c^2 - 2\,bc\cos\alpha + \underbrace{b^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha}_{=\,b^2}\\ &= c^2 - 2\,bc\cos\alpha + b^2\end{aligned}$$

S. 45

2 In jedem Dreieck ist das Quadrat einer Seitenlänge gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seitenlängen vermindert um das Doppelte des Produkts aus diesen beiden Seitenlängen und dem Kosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.
Da $\cos 90° = 0$, ist der Satz des Pythagoras ein Spezialfall des Kosinussatzes, denn für rechtwinklige Dreiecke mit $\gamma = 90°$ erhält man $c^2 = a^2 + b^2$.

3 Außer bei Teilaufgabe f) kann aufgrund der Angaben die Eindeutigkeit der Lösung gefolgert werden. Der zutreffende Kongruenzsatz ist jeweils in Klammern angegeben.

a) $\alpha \approx 41{,}4°$; $\beta \approx 55{,}8°$; $\gamma \approx 82{,}8°$ (SSS)
b) $a \approx 4{,}58\,\text{cm}$; $\alpha \approx 70{,}9°$; $\gamma \approx 49{,}1°$ (SWS)
c) $\alpha \approx 34{,}8°$; $\beta \approx 38{,}2°$; $b \approx 4{,}01\,\text{m}$ (SsW)
d) $\alpha \approx 64{,}1°$; $\beta \approx 71{,}7°$; $\gamma \approx 44{,}2°$ (SSS)
e) $c \approx 73{,}08\,\text{m}$; $\alpha \approx 37{,}6°$; $\beta \approx 64{,}9°$ (SWS)
f) $\alpha \approx 41{,}8°$; $a \approx 3{,}42\,\text{cm}$; $\beta \approx 61{,}2°$; $\gamma \approx 77°$ (Es gibt noch ein stumpfwinkliges Dreieck mit $\alpha' \approx 138{,}2°$; $a' = 8{,}88\,\text{cm}$; $\beta' \approx 19{,}8°$; $\gamma' \approx 22{,}0°$.)
g) $a \approx 427{,}12\,\text{m}$; $\beta \approx 31{,}1°$; $\gamma \approx 45{,}9°$ (SWS)

4 a) $\cos\alpha = \frac{\frac{c}{2}}{s} = \frac{c}{2\cdot 2c} = \frac{1}{4} \Rightarrow \alpha \approx 75{,}5°\ (=\beta) \Rightarrow \gamma \approx 29{,}0°$

Alle Dreiecke mit $s = 2c$ sind nach dem WW-Satz ähnlich.

b) $c^2 = 2s^2(1-\cos\gamma)$ bzw. $0 = c^2 - 2sc\cdot\cos\alpha$

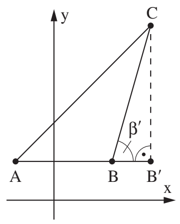
c) Aus b) folgt: $s = \frac{c}{\sqrt{2(1-\cos\gamma)}} \Rightarrow s \approx 5{,}1\,\text{cm}$ oder $s = \frac{c}{2\cdot\cos\alpha} \Rightarrow s \approx 5{,}1\,\text{cm}$

d) $c = 2s\cdot\cos\alpha \approx 16{,}55\,\text{m}$ oder: $c = s\cdot\sqrt{2(1-\cos\gamma)} \approx 16{,}55\,\text{m}$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 10
ISBN 978-3-12-731961-3

S. 46

5 a)



$c = \overline{AB} = 5{,}5$

$\Delta AB'C$ ist gleichschenklig-rechtwinklig.

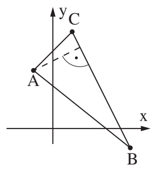
$\Rightarrow\; b = \overline{AC} = \sqrt{7^2+7^2} = 7\sqrt{2} \approx 9{,}90;\; \alpha = 45°$

$a = \overline{BC} = \sqrt{1{,}5^2+7^2} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{205} \approx 7{,}16$

$\tan\beta' = \frac{7}{1{,}5} \;\Rightarrow\; \beta' = 77{,}9° \;\Rightarrow\; \beta = 102{,}1°;\; \gamma = 32{,}9°$

$A = \frac{1}{2}\cdot 5{,}5\cdot 7 = 19{,}25$

b)



$a = \overline{BC} = \sqrt{3^2+6^2} = 3\sqrt{5} \approx 6{,}71$ $\quad b = \overline{AC} = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$

$c = \overline{AB} = \sqrt{4^2+5^2} = \sqrt{41} \approx 6{,}40$

Mit dem Kosinussatz ergibt sich:

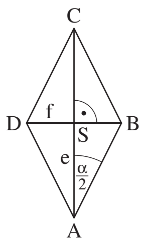
$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{82}} \;\Rightarrow\; \alpha \approx 83{,}7°$

$\cos\beta = \frac{13}{\sqrt{205}} \;\Rightarrow\; \beta \approx 24{,}8°;\; \gamma \approx 71{,}5°$

$h_a = \sin\beta\cdot c \approx 2{,}68$ $\quad A = \frac{1}{2}\cdot h_a\cdot a \approx 9$

c) Individuelle Lösungen

6



Man berechnet z. B. das rechtwinklige ΔABS mit $\sphericalangle BAS = \frac{\alpha}{2}$.
Dann ist

$\frac{e}{2} = 4{,}3\,\text{cm}\cdot\cos 37° \;\Rightarrow\; e \approx 6{,}87\,\text{cm}$

$\frac{f}{2} = 4{,}3\,\text{cm}\cdot\sin 37° \;\Rightarrow\; f \approx 5{,}18\,\text{cm}$

Anmerkung: e ergibt sich auch mit dem Kosinussatz, auf das gleichschenklige ΔABC mit $\beta = 106°$ (analog f) angewendet.

7

$b = \sqrt{\left(\frac{e}{2}\right)^2+\left(\frac{f}{2}\right)^2-2\cdot\frac{e}{2}\cdot\frac{f}{2}\cdot\cos 48°} \approx 5{,}25\,\text{cm}$

$a = \sqrt{\left(\frac{e}{2}\right)^2+\left(\frac{f}{2}\right)^2-2\cdot\frac{e}{2}\cdot\frac{f}{2}\cdot\cos(180°-48°)} \approx 10{,}12\,\text{cm}$

$\Rightarrow\quad d = b = 5{,}25\,\text{cm};\; c = a = 10{,}12\,\text{cm}$

8

a) ΔABC: $e^2 = a^2+b^2-2ab\cdot\cos\beta \quad\Rightarrow\quad e \approx 11{,}26\,\text{cm}$

ΔACD: $e^2 = c^2+d^2-2cd\cdot\cos\delta \quad\Rightarrow\quad \delta \approx 119{,}9°$

ΔABC: $\sin\alpha_1 = \frac{b\cdot\sin\beta}{e} \quad\Rightarrow\quad \alpha_1 \approx 40{,}1°$

ΔACD: $\sin\alpha_2 = \frac{c\cdot\sin\delta}{e} \quad\Rightarrow\quad \alpha_2 \approx 27{,}5°$

$\alpha = \alpha_1+\alpha_2 \approx 67{,}6°;\quad \gamma = 360°-(\alpha+\beta+\delta) \approx 107{,}5°$

b) ΔABD: $f^2 = a^2+d^2-2ad\cdot\cos\alpha \quad\Rightarrow\quad \alpha \approx 72{,}1°$

$\sin\beta_1 = \frac{d\cdot\sin\alpha}{f} \quad\Rightarrow\quad \beta_1 \approx 20{,}4°$

ΔBCD: $f^2 = b^2+c^2-2bc\cdot\cos\gamma \quad\Rightarrow\quad \gamma \approx 94{,}9°$

$\sin\beta_2 = \frac{c\cdot\sin\gamma}{f} \quad\Rightarrow\quad \beta_2 \approx 36{,}7°$

$\beta = \beta_1+\beta_2 \approx 57{,}1°;\quad \delta = 360°-(\alpha+\beta+\gamma) \approx 135{,}9°$

9

a) Unterschied der Flächeninhalte:

$(a^2+b^2)-c^2 = (a^2+a^2+c^2-2ac\cdot\cos\beta)-c^2 = 2a(a-c\cdot\cos\beta) \approx 6{,}50\,\text{cm}^2$

Prozentualer Unterschied: $\frac{6{,}50\,\text{cm}^2}{144\,\text{cm}^2} \approx 0{,}045 \approx 4{,}5\,\%$

b) Die Flächeninhalte sind gleich, wenn gilt: $2a(a-c\cdot\cos\beta) = 0$

$\Rightarrow\; a-c\cdot\cos\beta = 0 \;\Rightarrow\; \cos\beta = \frac{a}{c} = \frac{7}{12} \;\Rightarrow\; \beta = 54{,}3°$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 10
ISBN 978-3-12-731961-3

10 a) Die Raumdiagonalen halbieren sich gegenseitig und sind alle gleich lang.

$\overline{AS} = \overline{BS} = \frac{d}{2}$ $\qquad \overline{AB}^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{d}{2} \cdot \frac{d}{2} \cdot \cos\alpha$

Mit $d^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{AE}^2$ folgt: $\cos\alpha = \frac{\overline{BC}^2 + \overline{AE}^2 - \overline{AB}^2}{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{AE}^2} \approx -0{,}1743 \Rightarrow \alpha \approx 100{,}0°$

Aus $\overline{BC}^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{d}{2} \cdot \frac{d}{2} \cdot \cos\varepsilon$ folgt entsprechend

$\cos\varepsilon = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{AE}^2 - \overline{BC}^2}{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{AE}^2} \approx 0{,}3394 \Rightarrow \varepsilon \approx 70{,}2°$

b) Unter Verwendung des Ergebnisses von a) ergibt sich $\cos\varepsilon \approx \frac{a^2}{3 \cdot a^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \varepsilon \approx 70{,}5°$

11 a) $\sin\alpha = \frac{h_c}{b} \Rightarrow \alpha \approx 41{,}8°$ $\qquad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha \Rightarrow a \approx 3{,}42\,\text{cm}$

$\sin\beta = \frac{h_c}{a} \Rightarrow \beta \approx 61{,}2°$ $\qquad \gamma = 180° - (\alpha + \beta) \approx 77°$

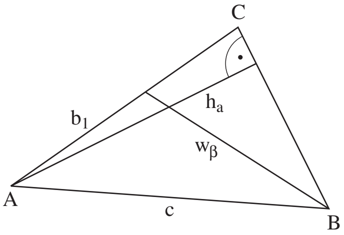
b) $\sin\beta = \frac{h_a}{c} \Rightarrow \beta \approx 34{,}7°$

$b_1^2 = w_\beta^2 + c^2 - 2\,w_\beta c \cdot \cos\frac{\beta}{2} \Rightarrow b_1 \approx 73{,}34\,\text{m}$

$\sin\alpha = \frac{w_\beta \cdot \sin\frac{\beta}{2}}{b_1} \Rightarrow \alpha \approx 23{,}2°$

$\gamma = 180° - (\alpha + \beta) \approx 122{,}1°$

$b = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\gamma} \approx 107{,}46\,\text{m}$; $\quad a = \frac{c \cdot \sin\alpha}{\sin\gamma} \approx 74{,}45\,\text{m}$



12 a) $s^2 = r^2 + r^2 - 2r^2 \cdot \cos\alpha \Rightarrow s \approx 6{,}88\,\text{cm}$

b) $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{s}{2}}{r} \Rightarrow \alpha \approx 104{,}7°$

c) $s^2 = r^2 + r^2 - 2r^2 \cdot \cos\alpha = 2r^2(1 - \cos\alpha) \Rightarrow s = r\sqrt{2(1 - \cos\alpha)}$

Überprüfung z. B. mit $\alpha = 0° \Rightarrow s = 0$; $\quad \alpha = 60° \Rightarrow s = r$; $\quad \alpha = 180° \Rightarrow s = 2r$

13 a) Seitenfläche ΔBCS: $h_1 = \sqrt{\overline{BS}^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = 4 \cdot \sqrt{2}\,\text{cm}$

Seitenfläche ΔASD: $h_2 = \sqrt{\overline{AS}^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = 2 \cdot \sqrt{15}\,\text{cm}$

Neigungswinkel ε_1 der Seitenfläche ΔBCS:

$h_2^2 = a^2 + h_1^2 - 2ah_1 \cdot \cos\varepsilon_1 \Rightarrow \varepsilon_1 \approx 105{,}4°$

Neigungswinkel ε_2 der Seitenfläche ΔASD:

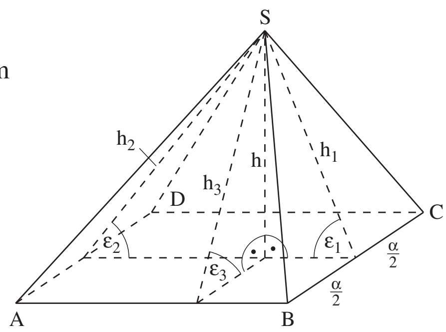
$h_1^2 = a^2 + h_2^2 - 2ah_2 \cdot \cos\varepsilon_2 \Rightarrow \varepsilon_2 \approx 44{,}8°$

Pyramidenhöhe h: $h = h_2 \cdot \sin\varepsilon_2 \approx 5{,}45\,\text{cm}$

Neigungswinkel ε_3 der Seitenfläche ΔABS

(gilt aus Symmetriegründen auch für ΔCDS):

$\tan\varepsilon_3 = \frac{h}{\frac{a}{2}} \Rightarrow \varepsilon_3 \approx 69{,}9°$



b) $h_3 = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} \approx 5{,}81\,\text{cm}$

Oberflächeninhalt: $O = a^2 + \frac{1}{2}a \cdot (2h_3 + h_1 + h_2) \approx 66{,}04\,\text{cm}^2$

Volumen: $V = \frac{1}{3}a^2 \cdot h \approx 29{,}09\,\text{cm}^3$

14 a) $\gamma \approx 22{,}0°$; $\beta \approx 123{,}0°$; $b \approx 10{,}5\,\text{cm}$ $\qquad$ b) $\sin\alpha \approx 1{,}3383 > 1 \Rightarrow$ es existiert kein Dreieck

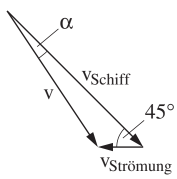
c) $\beta = 90°$; $c \approx 2{,}25\,\text{km}$ $\qquad$ d) $\gamma = 90°$; $\alpha = 60°$; $a \approx 6{,}06\,\text{cm}$

S. 47

15 $v = \sqrt{v_{\text{Schiff}}^2 + v_{\text{Strömung}}^2 - 2\,v_{\text{Schiff}} \cdot v_{\text{Strömung}} \cdot \cos 45°} \approx 17{,}3$ Knoten

$\sin\alpha = \frac{v_{\text{Strömung}}}{v} \cdot \sin 45° \Rightarrow \alpha = 2{,}3°$

Das Schiff weicht durch die Strömung um 2,3° von seinem Kurs ab.



Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 10
ISBN 978-3-12-731961-3

16 ΔABP: $\sphericalangle APB = \gamma_1 = 180° - \alpha - \beta_1 = 81{,}9°$ (36,0°)

$\overline{AP} = \frac{\sin\beta_1}{\sin\gamma_1} \cdot \overline{AB} \approx 183{,}63\,\text{m}$ (212,59 m)

ΔABQ: $\sphericalangle AQB = \delta_1 = 180° - \alpha_1 - \beta = 64{,}5°$ (32,5°)

$\overline{AQ} = \frac{\sin\beta}{\sin\delta_1} \cdot \overline{AB} \approx 398{,}64\,\text{m}$ (419,32 m)

ΔAQP: $\overline{PQ}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2 - 2 \cdot \overline{AP} \cdot \overline{AQ} \cdot \cos(\alpha - \alpha_1) \Rightarrow \overline{PQ} \approx 265{,}08\,\text{m}$ (401,52 m)

17 $\overline{PQ'} = 1\,\text{km}$

$\Delta A'Q'P$: $\alpha' = 180° - \gamma - \delta_1 = 76°$ (42°) $\Rightarrow \overline{A'P} = \frac{\sin\delta_1}{\sin\alpha'} \cdot \overline{PQ'} \approx 0{,}606\,\text{km}$ (0,702 km)

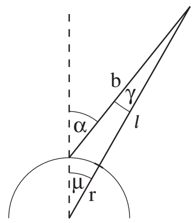
$\Delta PB'Q'$: $\beta' = 180° - \gamma_1 - \delta = 53°$ (37°) $\Rightarrow \overline{B'P} = \frac{\sin\delta}{\sin\beta'} \cdot \overline{PQ'} \approx 1{,}247\,\text{km}$ (1,625 km)

$\Delta A'B'P$: $\overline{A'B'}^2 = \overline{A'P}^2 + \overline{B'P}^2 - 2 \cdot \overline{A'P} \cdot \overline{B'P} \cdot \cos(\gamma - \gamma_1) \Rightarrow \overline{A'B'} \approx 0{,}751\,\text{km}$ (1,522 km)

$\overline{PQ} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} \cdot \overline{PQ'} \approx 2{,}396\,\text{km}$ (1,840 km)

\+ Mögliche Öffnung der Aufgabe: Projektvorschlag am Rand

18 a) Die Stoßweite *l* wird gemessen als Entfernung zwischen dem ersten Eindruck der Kugel am Boden und dem inneren Rand des Stoßkreises, wobei das Maßband über den Kreismittelpunkt geführt werden muss.
Die Stoßrichtung durch den Kreismittelpunkt ist ideal, da so tatsächliche und gewertete Stoßweite gleich sind, andernfalls ist die gewertete Weite immer geringer als die tatsächliche.

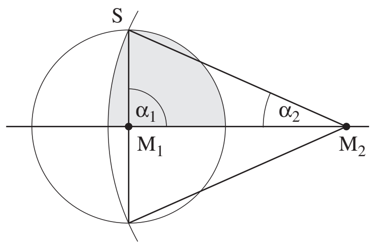


b) $\sin\gamma = \frac{r \cdot \sin(180° - \alpha)}{r + l} \Rightarrow \gamma \approx 1{,}0° \Rightarrow \mu \approx 19{,}0°$

$b = \frac{\sin\mu}{\sin(180° - \alpha)} \cdot (r + l) \approx 20{,}01\,\text{m}$

Um $\frac{b - l}{b} \approx 3{,}0‰$ ist die gewertete Weite geringer als die tatsächliche.

19



Aus Symmetriegründen gilt:

$A = 2 \cdot (A_{\text{Sektor } M_2;\, \alpha_2} - A_{\Delta M_1 M_2 S} + A_{\text{Sektor } M_1;\, \alpha_1})$

ΔM_1M_2S: $\overline{M_2S}^2 = \overline{M_1S}^2 + \overline{M_1M_2}^2 - 2 \cdot \overline{M_1S} \cdot \overline{M_1M_2} \cdot \cos\alpha_1$

$\Rightarrow \alpha_1 \approx 92{,}4°$

$\sin\alpha_2 \approx \frac{\overline{M_1S} \cdot \sin\alpha_1}{\overline{M_2S}} \Rightarrow \alpha_2 \approx 23{,}6°$

Höhe durch M_1: $h = \overline{M_1M_2} \cdot \sin\alpha_2 \approx 3{,}60\,\text{cm}$

$A = 2 \cdot \left(\frac{\alpha_2}{360°} \cdot r_2^2 \cdot \pi - \frac{1}{2} \cdot r_2 \cdot h + \frac{\alpha_1}{360°} \cdot r_1^2 \cdot \pi\right) \approx 30{,}95\,\text{cm}^2$

20 Für den Winkel α gilt nach dem Kosinussatz:

$b^2 + c^2 = a^2 + a^2 + b^2 + c^2 - 2a\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

Analog: $\cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$; $\cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

a) $\alpha = 45°$; $\beta \approx 55{,}6°$; $\gamma \approx 64{,}9°$

b) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = 1$

21 a) $\beta = \alpha = 5°$, da beide Schenkel beider Winkel jeweils senkrecht aufeinander stehen.

$K^2 = D^2 + D^2 - 2D \cdot D \cdot \cos\beta = (2 - 2\cos\beta) \cdot D^2 \Rightarrow D = \sqrt{\frac{K^2}{2 - 2\cos\beta}} \approx 11\,463\,\text{N}$

b) $D = K$: $K^2 = K^2 + K^2 - 2K \cdot K \cdot \cos\beta \Rightarrow \cos\beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \beta = 60°$

$D = 2K$: $K^2 = 4K^2 + 4K^2 - 2 \cdot 2K \cdot 2K \cdot \cos\beta \Rightarrow \cos\beta = \frac{7}{8} \Rightarrow \alpha = \beta = 29°$

22 Die Teildreiecke sind rechtwinklig, also gilt: $\alpha + \beta = 90°$. Zwischen den Winkeln β liegt also nochmals ein Winkel β.
$\Rightarrow 3\beta = 180°$, also $\beta = 60°$ und $\alpha = 30°$.

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 10
ISBN 978-3-12-731961-3

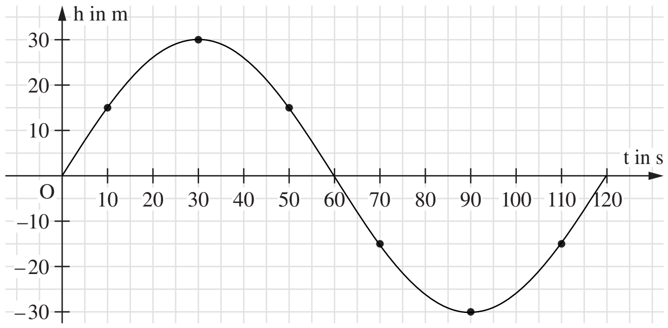
4 Trigonometrische Funktionen

S. 48

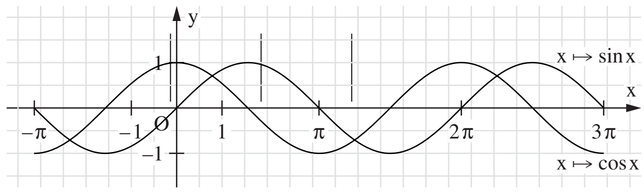
1 a)

Pos.	1	2	3	4
n	30 m	15 m	–15 m	–15 m

b)



2 a)



b) $\sin\frac{3}{4}\pi = 0{,}7$; $\cos(-100°) = -0{,}2$; $\sin\frac{11}{4}\pi = 0{,}7$; $\cos\frac{5}{4}\pi = -0{,}7$;
$\sin 400° = 0{,}6$; $\sin(-2{,}5) = -0{,}6$; $\cos 8{,}7 = -0{,}7$; $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -0{,}9$

3 a) 0 b) 0 c) –1 d) –1 e) –1 f) 0,5
g) $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ h) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ i) –1 k) $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ l) 0 m) $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$

S. 51

4 Individuelle Lösungen; z. B. Sonnenstand im Tages-/Jahreslauf, Ebbe und Flut, Lichtwellen, Sinustöne, Motorkolben, Turbine. Es sollte echte Periodizität vorliegen; z. B. ein Temperaturverlauf über mehrere Tage ist ungeeignet.

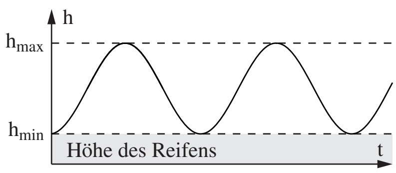
5 a) 0,9195 b) –0,0859 c) 0,9397 d) –0,7985 e) 0,5299 f) –0,9239
g) 0,8215 h) 0,7089 i) 0,8090 k) –0,9920 l) 0,6773

6 Periode $T \approx 0{,}035$ s

7 a) $\frac{7}{8}$ s
b) Individuelle Lösungen;
Herzrhythmusstörungen sind am Ausbleiben einer regelmäßigen Periode zu erkennen.

8 a) $x_1 = -\frac{3}{2}\pi$; $x_2 = \frac{\pi}{2}$ b) $x_1 = -\frac{7}{4}\pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{4}$; $x_3 = \frac{\pi}{4}$; $x_4 = \frac{7}{4}\pi$
c) $x_1 = -\frac{7}{6}\pi$; $x_2 = -\frac{5}{6}\pi$; $x_3 = \frac{5}{6}\pi$; $x_4 = \frac{7}{6}\pi$ d) $x_1 = -\frac{5}{6}\pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{6}$; $x_3 = \frac{7}{6}\pi$; $x_4 = \frac{11}{6}\pi$

9 a) Die Funktion h ist periodisch, wenn sich das Fahrrad mit konstanter Geschwindigkeit fortbewegt.
b) Z. B.



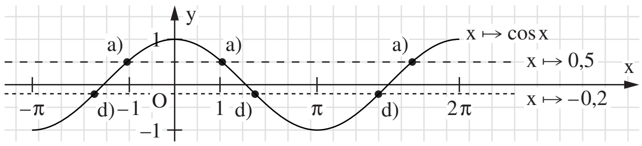
c) Individuelle Lösungen

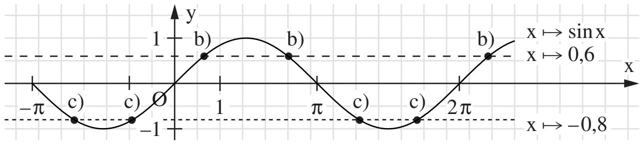
Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 10
ISBN 978-3-12-731961-3

10 a) $\sin 15 \approx \sin(2\cdot 2\pi + 2{,}4) \approx \sin\frac{3}{4}\pi \approx \sin\frac{\pi}{4} \approx \frac{1}{2}\sqrt{2} \approx 0{,}7$
b) $\cos 22 \approx \cos(3\cdot 2\pi + 3{,}15) \approx \cos\pi \approx -1$
c) $\cos(-32) \approx \cos(-5\cdot 2\pi - 0{,}6) \approx \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) \approx \cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0{,}9$
d) $\sin 753° \approx \sin(2\cdot 360° + 30°) \approx \sin 30° \approx 0{,}5$
e) $\sin(-45) \approx \sin(-7\cdot 2\pi - 1) \approx \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \approx -\sin\frac{\pi}{3} \approx -\frac{1}{2}\sqrt{3} \approx -0{,}9$
f) $\cos 1300° \approx \cos(3\cdot 360° + 210°) \approx \cos(210°) \approx -\cos 30° \approx -\frac{1}{2}\sqrt{3} \approx -0{,}9$
g) Individuelle Lösungen

11 a) $x_1 \approx 1{,}22$; $x_2 \approx 1{,}92$ b) $x_1 \approx 0{,}89$; $x_2 \approx 5{,}39$ c) $x_1 \approx 2{,}66$; $x_2 \approx 3{,}62$
d) keine Lösung, da $|\sin x| > 1$ e) $x_1 \approx 4{,}16$; $x_2 \approx 5{,}26$ f) $x_1 \approx 1{,}75$; $x_2 \approx 4{,}54$
g) keine Lösung, da $|\cos x| > 1$ h) $x_1 \approx 3{,}73$; $x_2 \approx 5{,}70$

12 a) $x_1 \approx 1{,}05 + k\cdot 2\pi$; $x_2 \approx 5{,}24 + k\cdot 2\pi$ $k \in \mathbb{Z}$
b) $x_1 \approx 0{,}64 + k\cdot 2\pi$; $x_2 \approx 2{,}50 + k\cdot 2\pi$ $k \in \mathbb{Z}$
c) $x_1 \approx 4{,}07 + k\cdot 2\pi$; $x_2 \approx 5{,}35 + k\cdot 2\pi$ $k \in \mathbb{Z}$
d) $x_1 \approx 1{,}77 + k\cdot 2\pi$; $x_2 \approx 4{,}51 + k\cdot 2\pi$ $k \in \mathbb{Z}$



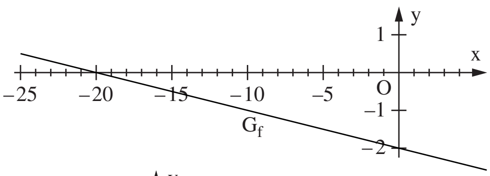


S. 52

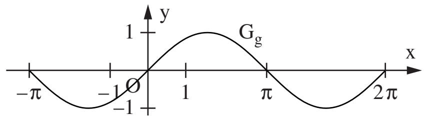
13 a) Z. B. $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $(0; 2\pi)$, $(2; 10\pi + 2)$ b) Z. B. $(1; 2)$, $\left(-\frac{1}{3}; 4\frac{2}{3}\right)$, $(4; -4)$
c) Z. B. $(0; 0)$, $(-\pi; 0)$, $\left(-\frac{3}{2}\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$ d) Z. B. $(0; 0)$, $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{8}\right)$, $\left(\frac{4}{3}\pi; -\frac{\pi}{6}\right)$
e) Z. B. $(\sqrt{2}; 0)$, $(-3; -\sqrt{7})$, $(-\sqrt{5}; \sqrt{3})$ f) Z. B. $(0; 0)$, $(1; 3)$, $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$

14 a) Die Gleichung hat keine Lösung, da stets $|\sin x| \leqq 1$ und $|\cos x| \leqq 1$ ist und für kein $x \in \mathbb{R}$ $\sin x = \cos x = 1$ gilt.
b) Die Gleichung hat keine Lösung, da für kein $x \in \mathbb{R}$ $\sin x = \frac{1}{\cos x}$ gilt.

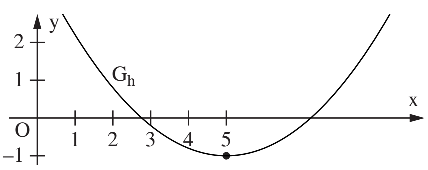
15 f ist eine lineare Funktion; ihr Graph ist eine Gerade.
Mit $f(-10) = -1$ und $f(10) = -3$ ergibt sich $W_f = [-3; -1]$.



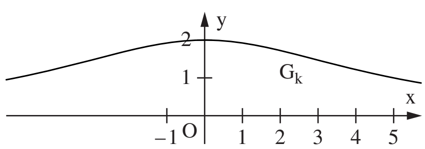
Für g gilt $|\sin x| \leqq 1$, also $W_g = [-1; 1]$.



h ist eine quadratische Funktion; ihr Graph ist eine nach oben geöffnete Parabel.
Es ist $x \mapsto 0{,}2x^2 - 2x + 4 = 0{,}2(x-5)^2 - 1$, also liegt der Scheitel bei $(5|-1)$.
Größter Funktionswert im gegebenen Intervall ist $h(-10) = 44$, also $W_h = [-1; 44]$.



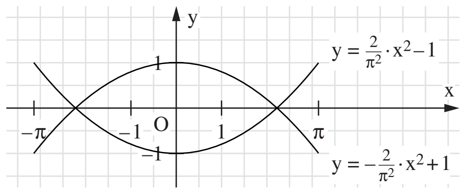
k ist eine gebrochenrationale Funktion; ihr Graph ist symmetrisch zur y-Achse.
Der größte Funktionswert ist $k(0) = 2$.
Da $k(-10) = k(10) = 0{,}4$ ist $W_k = [0{,}4; 2]$.



Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 10
ISBN 978-3-12-731961-3

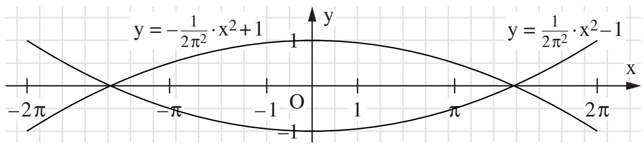
16 a) Mögliche Lösungen:
Quadratische Funktionen, deren Graph (Parabel) symmetrisch zur y-Achse ist und durch die Punkte $P_1(-\pi|1)$ und $P_2(\pi|1)$ bzw. $P_1'(-\pi|-1)$ und $P_2'(\pi|-1)$ geht mit dem Scheitel $(0|-1)$ bzw. $(0|1)$.

$y = \frac{2}{\pi^2}\cdot x^2 - 1$ (Parabel nach oben geöffnet)
$y = -\frac{2}{\pi^2}\cdot x^2 + 1$ (Parabel nach unten geöffnet)



Weitere Lösungen ergeben sich, wenn man in die Funktionsgleichung $y = ax^2 + bx + c$ die Koordinaten von P_1' und P_2 (bzw. P_1 und P_2') einsetzt und für a, b oder c einen beliebigen Wert wählt.
Es ergibt sich z. B. für a = 1: $y = x^2 + \frac{1}{\pi}\cdot x - \pi^2$,
für c = −5: $y = \frac{5}{\pi^2}\cdot x^2 + \frac{1}{\pi}\cdot x - 5$.

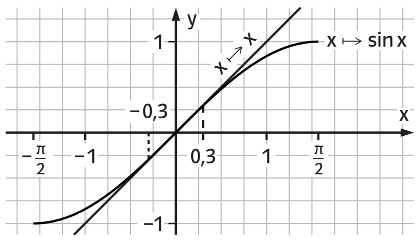
b) Entsprechend wie bei a) findet man z. B.:
$y = \frac{1}{2\pi^2}\cdot x^2 - 1$; $y = -\frac{1}{2\pi^2}\cdot x^2 + 1$; $y = x^2 + \frac{1}{2\pi}\cdot x - 4\pi^2$

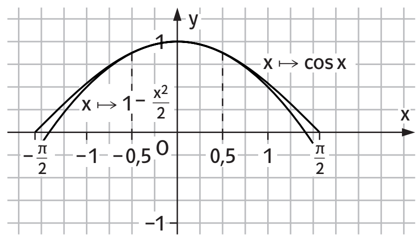


17 a) Mithilfe der Skizze der Graphen $y = \sin x$ und $y = \cos x$ in einem Koordinatensystem lassen sich folgende Lösungen bestimmen:
$x_1 \approx -\frac{7}{4}\pi$; $x_2 \approx -\frac{3}{4}\pi$; $x_3 \approx \frac{\pi}{4}$; $x_4 \approx \frac{5}{4}\pi$

b) Mithilfe der Skizze der Graphen $y = \sin x$ und $y = -\cos x$ in einem Koordinatensystem lassen sich folgende Lösungen bestimmen:
$x_1 \approx -\frac{5}{4}\pi$; $x_2 \approx -\frac{\pi}{4}$; $x_3 \approx \frac{3}{4}\pi$; $x_4 \approx \frac{7}{4}\pi$

18 a)



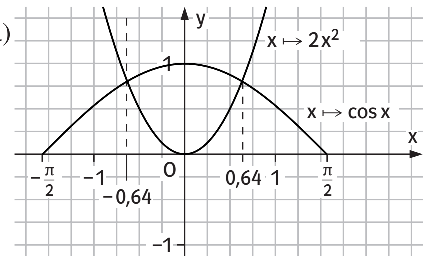


b) $\sin x \approx x$ gültig für $-0,3 < x < 0,3$. $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ gültig für $-0,5 < x < 0,5$.

19 a) $(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2\cdot\sin x\cdot\cos x + \cos^2 x = 1 + 2\cdot\sin x\cdot\cos x$

b) $\sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)\cdot(\sin^2 x - \cos^2 x)$
$= 1 \cdot(\sin^2 x - \cos^2 x)$
$= \sin^2 x - \cos^2 x$

20 a)



Es ergibt sich $x \approx 0,64$.

b) Es ergibt sich $x \approx 0,64$ (genauer 0,635).

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 10
ISBN 978-3-12-731961-3

21 a) Das gelbe Flächenstück ist näherungsweise ein Dreieck mit $g = \frac{\pi}{2}$ und $h = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.
Also: $A_g = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{\pi}{8}\sqrt{2}$

b) Der Flächeninhalt A_{sin} zwischen der Sinuskurve und der x-Achse in $[0; \pi]$ ist gleich dem Flächeninhalt A_{cos} der Kosinuskurve und der x-Achse in $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right]$.
Grünes Flächenstück („Wurst"): $A_W = 2\cdot(A_{sin} - A_g) \approx 2{,}9$

22 P(„2 unbrauchbare Schrauben") $= \frac{4}{80}\cdot\frac{3}{79} \approx 0{,}2\,\%$

5 Die allgemeine Sinusfunktion

S. 53

1 a) Individuelle Lösungen; a beeinflusst eine Streckung in y-Richtung, b eine Streckung in x-Richtung, c eine Verschiebung in x-Richtung.

b)

Roter Graph:	$y = 2{,}5\cdot\sin x$,	da ähnlich der Sinuskurve und Nullstellen wie bei $y = \sin x$ $(0; \pi; 2\pi)$
Schwarzer Graph:	$y = \sin 2x$,	da der Funktionswert des schwarzen Graphen an einer Stelle x dem Funktionswert der Sinusfunktion bei 2x gleicht.
Blauer Graph:	$y = (x-2)^2 - 2$,	Parabel mit Scheitel $(2\,|\,{-2})$

S. 55

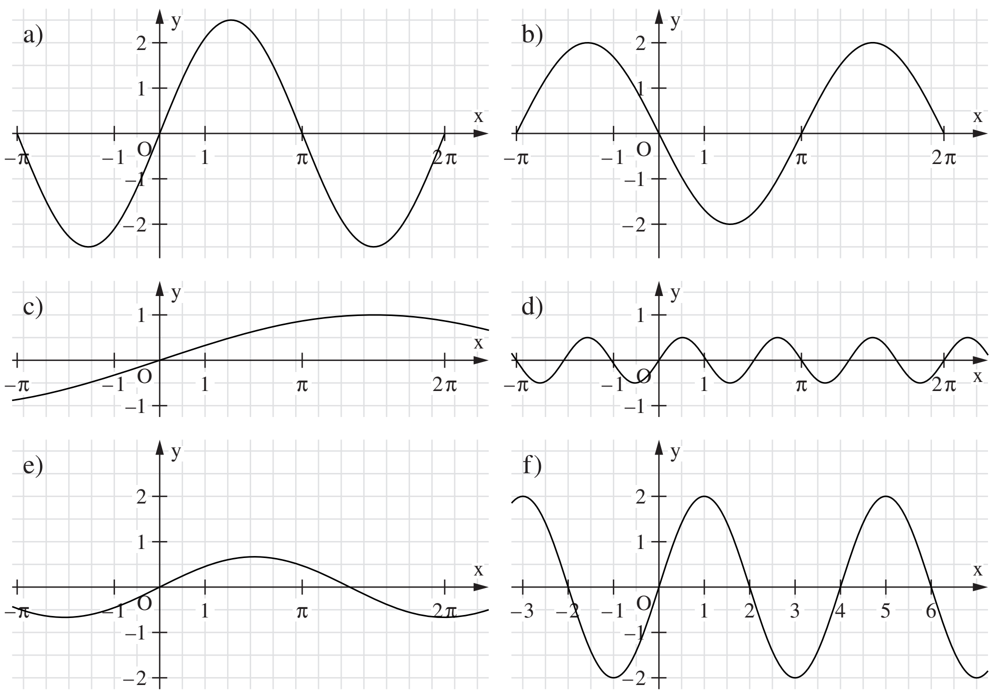
2 a) 2,73; (–2,32; –2,99; 2,60)　　b) 0,84; (0,43; –0,68; 0,50)
c) –1,68; (–0,85; 1,36; –1)　　d) –0,28; (0,48; –1,18; –1,30)

3 Ansatz: $y = a\cdot\sin\left[b\left(x + \frac{c}{b}\right)\right]$
Amplitude: $a = 1{,}5$　　Periode: $2\frac{\pi}{b} = 3{,}2 \Rightarrow b = \frac{5}{8}\pi$
Verschiebung: $\frac{c}{b} = -0{,}5$ (Verschiebung nach rechts)
$\Rightarrow c = -\frac{5}{16}\pi$　　$\Rightarrow y = 1{,}5\cdot\sin\left(\frac{5}{8}\pi\cdot x - \frac{5}{16}\pi\right)$

S. 56

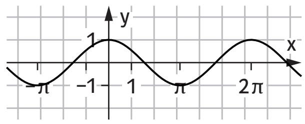
4

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
Amplitude	2,5	2	1	0,5	$\frac{2}{3}$	2
Periode	2π	2π	6π	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{8}{3}\pi$	4

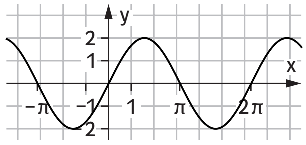


Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 10
ISBN 978-3-12-731961-3

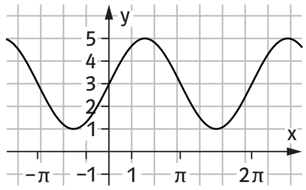
5 a) Amplitude: 1; Periode: 2π;
Verschiebung um $\frac{\pi}{2}$ nach links;
Nullstellen: $x_k = \left(k-\frac{1}{2}\right)\cdot\pi$, also $-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi$



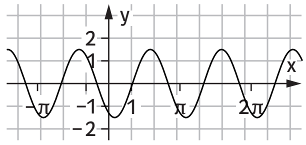
b) Amplitude: 2; Periode: 2π;
Verschiebung um 2π nach rechts;
Nullstellen: $x_k = (k+2)\cdot\pi$, also $-\pi; 0; \pi; 2\pi$



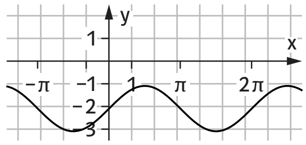
c) Amplitude: 2; Periode: 2π;
keine Verschiebung;
Nullstellen: keine, da $f(x) > 0$ für alle x



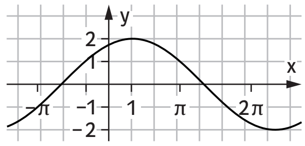
d) Amplitude: $\frac{3}{2}$; Periode: π;
Verschiebung um $\frac{\pi}{3}$ nach rechts;
Nullstellen: $x_k = (3k+2)\cdot\frac{\pi}{6}$,
also $-\frac{2}{3}\pi; -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}; \frac{5}{6}\pi; \frac{4}{3}\pi; \frac{11}{6}\pi$



e) Amplitude: 1; Periode: 2π;
keine Verschiebung;
Nullstellen: keine, da $f(x) < 0$ für alle x



f) Amplitude: 2; Periode: 4π;
Verschiebung um $\frac{2}{3}\pi$ nach links;
Nullstellen: $x_k = (6k-2)\cdot\frac{\pi}{3}$, also $-\frac{2}{3}\pi; \frac{4}{3}\pi$



6 Überlandleitung: $t \mapsto 20\,000\cdot\sqrt{2}\cdot\sin\left(100\,\frac{\pi}{s}\cdot t\right) = 20\,000\cdot\sqrt{2}\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{0{,}02\,s}\cdot t\right)$

Bundesbahnstrom: $t \mapsto 15\,000\cdot\sqrt{2}\cdot\sin\left(\frac{100}{3}\cdot\frac{\pi}{s}\cdot t\right) = 15\,000\cdot\sqrt{2}\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{0{,}06\,s}\cdot t\right)$

7 a) $t \mapsto 3\cos t = 3\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)$
Amplitude: 3; Periode: 2π; Verschiebung: $\frac{\pi}{2}$ (nach links)

b) $t \mapsto 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\cdot t+0{,}4\right) = 2\sin\left(\frac{2\pi}{5}\cdot t+0{,}4+\frac{\pi}{2}\right)$
Amplitude: 2; Periode: $\frac{2\pi}{b} = 5$; Verschiebung: $\frac{c}{b} = \frac{1}{\pi}+\frac{5}{4}$ (nach links)

c) $t \mapsto \frac{1}{2}\cos(2\pi\cdot t-\pi) = \frac{1}{2}\sin\left(2\pi\cdot t-\frac{\pi}{2}\right)$
Amplitude: $\frac{1}{2}$; Periode: $\frac{2\pi}{b} = 1$; Verschiebung: $\frac{c}{b} = \frac{1}{4}$ (nach rechts)

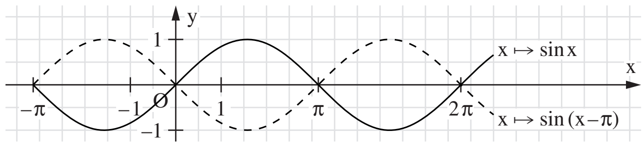
8 a) $2\sin\frac{\pi}{2}-1 = 1$ $\left(2\sin\frac{\pi}{4}-1 = \sqrt{2}-1;\ 2\sin\frac{3}{2}\pi-1 = -3;\ 2\sin 2-1 \approx 0{,}8186\right)$

b) Für $x_1 = \frac{\pi}{6}$ und $x_2 = \frac{5}{6}\pi$ ist der Funktionswert 0
$\left(\text{für } x = \frac{\pi}{2} \text{ ist der Funktionswert 1; für } x_1 \approx 1{,}02 \text{ und } x_2 \approx 2{,}12 \text{ ist der Funktionswert } \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$.

c) 1 ist der größte und −3 der kleinste Funktionswert.

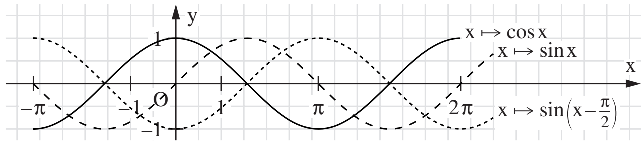
Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 10
ISBN 978-3-12-731961-3

9 a) Es ist $\sin(-x+\pi) = \sin[-(x-\pi)] = -\sin(x-\pi)$,
d. h. für die Graphen: Die Sinuskurve ist um π nach rechts zu verschieben und dann an der x-Achse zu spiegeln. Es ergibt sich wieder die Sinuskurve.



d. h. Verschiebung der Sinuskurve um 2π nach rechts.

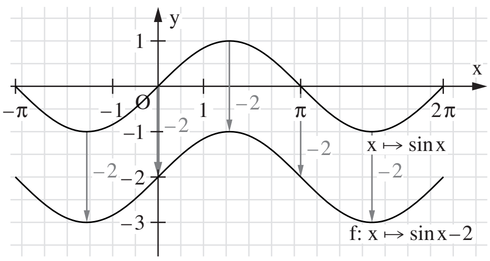
b) Es ist $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin\left[-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right] = -\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$,
d. h. für die Graphen: Die Sinuskurve ist um $\frac{\pi}{2}$ nach rechts zu verschieben und dann an der x-Achse zu spiegeln. Es ergibt sich die Kosinuskurve.



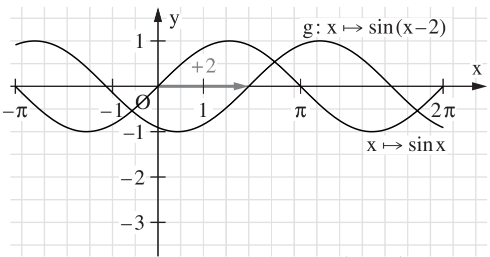
d. h. Verschiebung der Sinuskurve um $\frac{\pi}{2}$ nach rechts.

10 a) Schwarzer Graph: $y = \sin x$ Grüner Graph: $y = 3\sin x$
Roter Graph: $y = 3\sin(2x)$ Blauer Graph: $y = 3\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$
b) Individuelle Lösungen

11



Graph von f: Sinuskurve um 2 in negative y-Richtung verschoben.



Graph von g: Sinuskurve um 2 $\left(\approx \frac{2}{3}\pi\right)$ in positive x-Richtung verschoben.

12 Wegen $W = [-3; 3]$ ist die Amplitude $a = 3$.
Lösungen sind z. B. $y = 3\sin x$; $y = 3\sin(2x)$; $y = 3\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{2}\right)$

S. 57

13 a) $y = 12\,\text{cm}\cdot\sin\left(\frac{4}{s}\cdot t\right)$
b) $y = A$ für $t = \left(\frac{\pi}{8}+k\cdot\frac{\pi}{2}\right)s,\ k\in\mathbb{Z}$ $y = 0$ für $t = \left(\frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{\pi}{4}\right)s,\ k\in\mathbb{Z}$
c) 12 cm (-12 cm; $-6\sqrt{3}$ cm; $-11{,}41$ cm)
d) $t = \left(\frac{3}{8}\pi+k\cdot\frac{\pi}{2}\right)s,\ k\in\mathbb{Z}$ $\left(t = \left(\frac{7}{24}\pi+k\cdot\frac{\pi}{2}\right)s,\ k\in\mathbb{Z}\right.$ oder $\left.t = \left(\frac{11}{24}\pi+k\cdot\frac{\pi}{2}\right)s,\ k\in\mathbb{Z}\right)$

14 a) Die Tidenkurve für Büsum kommt dem Augenschein nach einer Sinuskurve nahe, während der fast lineare Abfall der Tidenkurve für Hamburg nicht zur Sinuskurve passt.
b) Man legt zweckmäßig das Koordinatensystem mit Zeit- und Höhenachse so, dass der Nullpunkt der Zeitachse bei „6 Stunden vor Hochwasser" liegt und auf der Höhenachse zugleich in der Mitte zwischen „Niedrigwasser" (0,0 m) und „Hochwasser" (3,64 m).
Für den Ansatz $h(t) = a\cdot\sin(b\cdot t+c)$ bedeutet dies: Die Amplitude ist $a = 1{,}82$ m. Die halbe Periode ergibt sich aus dem Abstand der Nullstellen (= Schnittpunkte der Kurve mit der Zeitachse) zu 7 h, also $\frac{2\pi}{b} = 14\,\text{h}$ bzw. $b = \frac{\pi}{7\,\text{h}}$.
Entsprechend der Grafik muss für die Verschiebung gelten: $\frac{c}{b} = 2{,}5\,\text{h}$ bzw. $c = \frac{5\pi}{14\,\text{h}}$
Näherungsfunktion: $h(t) = 1{,}82\cdot\sin\left(\frac{\pi}{7\,\text{h}}\cdot t-\frac{5\pi}{14\,\text{h}}\right)$
Für $t = 2{,}5$ h; 6 h; 9,5 h stimmen Funktions- und Messwerte überein.
Z. B. $h(0) \approx -1{,}64$ m Messwert: $-1{,}82$ m
$h(2) \approx -0{,}40$ m Messwert: $-0{,}82$ m

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 10
ISBN 978-3-12-731961-3

15 a) Die Schnittpunkte der Graphen $y = \sin 2x$ und $y = 0{,}5x$ liegen bei $x_1 \approx -1{,}25$; $x_2 \approx 0$; $x_3 \approx 1{,}25$.

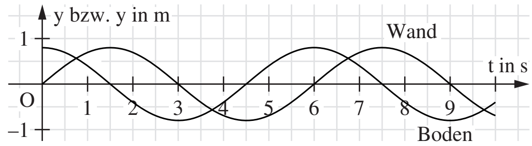
b) Die Schnittpunkte der Graphen $y = 2 \cdot \cos(-x)$ und $y = -0{,}5x$ liegen bei $x_1 \approx -1{,}3$; $x_2 \approx 2{,}1$; $x_3 \approx 3{,}6$.

16 a) Zurückgelegter Weg in 1 s: $\frac{10 \cdot 2\pi \cdot 0{,}8}{60}\,\text{m} \approx 0{,}84\,\text{m}$

b) Schwingungsdauer (= Periode): 6 s, also $b = \frac{2\pi}{6\,\text{s}} = \frac{\pi}{3\,\text{s}}$

Schwingungsgleichung: $y(t) = 0{,}8\,\text{m} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3\,\text{s}} \cdot t\right)$

c) Schwingungsgleichung für den Schatten am Boden: $x(t) = 0{,}8\,\text{m} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3\,\text{s}} \cdot t\right)$



17 a) Annahmen: Zylinderradius $r_{Zylinder} = r_{Kugel}$

Zylinderhöhe $h_{Zylinder} = 6 \cdot r_{Kugel}$

$$\frac{3 \cdot V_{Kugel}}{V_{Zylinder}} = \frac{3 \cdot \frac{4}{3}\pi r_{Kugel}^3}{\pi r_{Kugel}^2 \cdot 6 r_{Kugel}} = \frac{2}{3}$$

$\frac{1}{3}$ des Zylindervolumens bleiben also leer.

b) $3 \cdot O_{Kugel} = 12 \cdot \pi r_{Kugel}^2$

$M_{Zylinder} = 2\pi r_{Kugel} \cdot 6 r_{Kugel} = 12\pi r_{Kugel}^2$

Die Kugeloberflächen und der Mantel haben den gleichen Flächeinhalt.

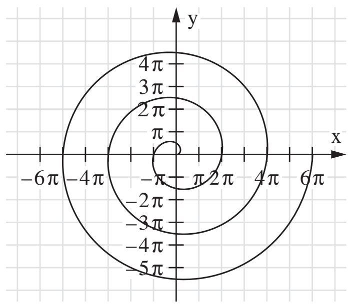
18 $P(-5\,|\,0{,}5) \in G_f$: $0{,}5 = -5m - 3 \;\Rightarrow\; m = -0{,}7$ also $y = -0{,}7x - 3$

Schnittstelle mit der x-Achse: $\left(-4\frac{2}{7}\,\middle|\,0\right)$; Schnittstelle mit der y-Achse: $(0\,|\,-3)$

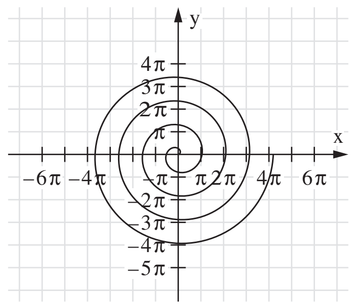
Thema: Spiralen als Funktion

S. 58

1 a) a = 1:



a = 2:



Der Windungsabstand bleibt über den gesamten Definitionsbereich konstant.

b) Sind $P_1(a\varphi\,|\,\varphi)$ und $P_2(a \cdot (\varphi + 2\pi)\,|\,\varphi + 2\pi)$ zwei Punkte auf derselben Halbgeraden, dann gilt für den Abstand $d = a \cdot (\varphi + 2\pi) - a \cdot \varphi = 2\pi a$

c) $2\pi a = 1$, also $r(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \cdot \varphi$

d) $z \cdot \pi \geqq 100 \;\Rightarrow\; z \geqq 32$

ISBN 978-3-12-731961-3

S. 59

2 a) und c): Erhöht man den Grad von r (und a), betrachtet also die durch $r^h(\varphi) = a^h \cdot \varphi$ definierten Kurven, so liegen die Windungen mit größerer Entfernung vom Zentrum immer dichter beieinander.
Da der Grad in c) größer als der in a) ist, gilt folgende Zuordnung:
a) Form (2), b) Form (4)

b) Da $r(\varphi)$ eine streng monoton fallende Funktion ist, verlaufen die Spiralen von außen nach innen. Das Zentrum wird in immer enger werdenden Windungen umrundet, jedoch nie erreicht. Nähert sich die Größe des Winkels φ dem Wert 0, so zeigen die Spiralen ein asymptotisches Verhalten. Dies erfüllt Form (3).

d) Erhöht man den Grad in φ, so wird der Abstand der aufeinanderfolgenden Windungen immer größer. Dies erfüllt Form (1).

3 Individuelle Lösungen

Projektvorschlag: Individuelle Lösungen

Thema: Überlagerung von Schwingungen

S. 60

1

	Periode	Amplitude
a)	2π	5
b)	$\frac{2}{5}\pi$	11
c)	2π	$2\sqrt{2}$
d)	2π	1,97
e)	nicht periodisch	
f)	20π	2

2 a) Ton a: $T_1 = \frac{1}{440}\,s$; $f_1\colon\ t \mapsto \sin\left(880\,\frac{\pi}{s}\cdot t\right)$

Ton cis: $T_2 = \frac{1}{550}\,s$; $f_2\colon\ t \mapsto \sin\left(1100\,\frac{\pi}{s}\cdot t\right)$

b) Ton e: $T = \frac{1}{660}\,s$; $f\colon\ t \mapsto \sin\left(1320\,\frac{\pi}{s}\cdot t\right)$

3 a) Die Funktionenfolge nähert sich einer Dreieckslinie an.
b) Die Funktionenfolge nähert sich einer Sägezahnlinie an.

S. 61

4 $f_1(t) = a_1 \cdot \sin(b \cdot t + c)$; $f_2(t) = a_2 \cdot \sin(b \cdot t + c)$
$(f_1 + f_2)(t) = f_1(t) + f_2(t) = (a_1 + a_2) \cdot \sin(b \cdot t + c)$

5 a)
$$\sin(b_1 \cdot t + c_1) + \sin(b_2 \cdot t + c_2) = 2 \cdot \sin\frac{(b_1+b_2)\cdot t + (c_1+c_2)}{2} \cdot \cos\frac{(b_1-b_2)\cdot t + (c_1-c_2)}{2}$$
$$= 2 \cdot \sin\left(\frac{b_1+b_2}{2}\cdot t + \frac{c_1+c_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{b_1-b_2}{2}\cdot t + \frac{c_1-c_2}{2}\right)$$

b) $a \cdot \sin(bt + c_1) + a \cdot \sin(bt + c_2) = 2a \cdot \sin\left(bt + \frac{c_1+c_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{c_1-c_2}{2}\right)$ mit $\cos\left(\frac{c_1-c_2}{2}\right) = c = \text{konstant}$

$\Rightarrow\ a \cdot \sin(bt + c_1) + a \cdot \sin(bt + c_2) = a' \cdot \sin(bt + c')$

mit $a' = 2a\cos\left(\frac{c_1-c_2}{2}\right)$ und $c' = \frac{c_1+c_2}{2}$

6 a) $f(t) = 2 \cdot \sin\left(\frac{2{,}95}{2}\pi \cdot t\right) \cdot \cos\left(-\frac{0{,}05}{2}\pi \cdot t\right)$

$\Rightarrow\ -2\cos(-0{,}025\pi \cdot t) \leqq f(t) \leqq 2\cos(-0{,}025\pi \cdot t) = 2\cos(0{,}025\pi \cdot t)$

b) Bei einer Schwebung nimmt man einen „Heulton“ wahr, dessen Lautstärke ständig an- und abschwillt.

7 Bis auf die „Summenfunktion“ in e) sind alle periodisch.

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 10
ISBN 978-3-12-731961-3