I Kreis und Kugel

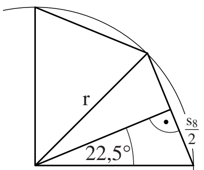
1 Näherungsweise Bestimmung der Kreiszahl π

S. 8

1 a) Individuelle Lösungen
Vgl. auch Lesetext im *Schülerbuch S. 28* und *29*.
Z. B. Ahmes: $\pi = \left(\frac{16}{19}\right)^2$; Archimedes: $\pi = 3\frac{1}{7}$; Ptolemäus: $\pi = 3\frac{17}{120}$;
Tsu Chu'ung-Chi: $\pi = 3\frac{16}{113}$; Brahmagupta: $\pi = \sqrt{10}$

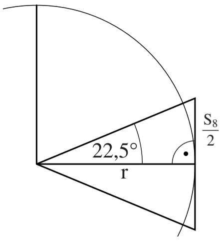
b) Individuelle Lösungen
Z. B. – von einer Dose Umfang U und Radius r messen; $\pi = \frac{U}{2 \cdot r}$
– von einer Flüssigkeit Volumen V in einem Messbecher bestimmen; bestimmen, wie hoch (h) die Flüssigkeit im Zylinder steht; Innenradius r des Messzylinders messen; $\pi = \frac{V}{r^2 \cdot h}$
– aus dicker Pappe einen Kreis mit Radius r und ein Quadrat mit Seitenlänge 2 r aussschneiden und deren Massen bestimmen:
$\frac{m_k}{m_Q} = \frac{A_K}{A_Q} = \frac{r^2 \cdot \pi}{(2r)^2} = \frac{r^2 \cdot \pi}{4 \cdot r^2} = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \pi = \frac{4 \cdot m_K}{m_Q}$

2 a) Einbeschriebenes Quadrat: $u_4 = 4 \cdot s_4$; $s_4 = \sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{2} \cdot r$
$u_4 = 4 \cdot \sqrt{2} \cdot r \approx 5{,}66 \cdot r$
Umbeschriebenes Quadrat: $U_4 = 4 \cdot S_4$; $S_4 = 2 \cdot r$
$U_4 = 4 \cdot 2 \cdot r = 8 \cdot r$
Einbeschriebenes Achteck: $u_8 = 8 \cdot s_8$



$\sin 22{,}5° = \frac{\frac{s_8}{2}}{r} \quad \Rightarrow \quad s_8 = 2 \cdot r \cdot \sin 22{,}5°$
$u_8 = 8 \cdot 2 \cdot r \cdot \sin 22{,}5° = 16 \cdot r \cdot \sin 22{,}5° \approx 6{,}12 \cdot r$

Umbeschriebenes Achteck: $U_8 = 8 \cdot S_8$



$\tan 22{,}5° = \frac{\frac{S_8}{2}}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{S_8}{2} = r \cdot \tan 22{,}5°$; $S_8 = 2 \cdot r \cdot \tan 22{,}5°$
$U_8 = 8 \cdot 2 \cdot r \cdot \tan 22{,}5° = 16 \cdot r \cdot \tan 22{,}5° \approx 6{,}63 \cdot r$
Hinweis: Alternativ kann auch der Satz von Pythagoras benutzt werden.

b) Die Umfänge der einbeschriebenen Vielecke werden immer größer, die Umfänge der umbeschriebenen Vielecke werden immer kleiner.
Der Umfang des Kreises liegt immer dazwischen und wird immer besser eingeschachtelt.
Tabellenkalkulationsdatei downloadbar im Internetauftritt.

S. 10

3 $U_E = 2 \cdot r_E \cdot \pi$
$\pi = 3{,}14$ $\quad 39\,915{,}7\,\text{km} < U_E < 40\,053{,}8\,\text{km}$
$\pi = 3{,}1416$ $\quad 39\,936{,}0\,\text{km} < U_E < 40\,074{,}2\,\text{km}$
$\pi = 3{,}14159$ $\quad 39\,935{,}9\,\text{km} < U_E < 40\,074{,}1\,\text{km}$
Die Werte für U_E verändern sich erst ab der Zehnerstelle. Deswegen könnte man den mittleren Erdumfang sinnvoll mit $U_E = 40\,000\,\text{km}$ angeben. Es würde also genügen mit $\pi = 3{,}14$ und einem mittleren Erdradius von $r_E = 6370\,\text{km}$ zu rechnen.

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 10
ISBN 978-3-12-731961-3

4 $U = d\cdot(3+5\,\%) = d\cdot 3\cdot 1{,}05 = 3{,}15\cdot d$

$U = 2\cdot r\cdot 3{,}15$

Fehler: $\frac{2\cdot r\cdot 3{,}15-2\cdot r\cdot\pi}{2\cdot r\cdot\pi} = \frac{3{,}15-\pi}{\pi} \approx 0{,}27\,\%$ (für π wurde der TR-Wert eingesetzt)

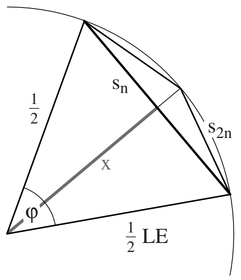
S. 11

5 Angaben aus dem Text: d = 10 Ellen; U = 30 Ellen

$U = 2\cdot\pi\cdot r$

$30 = 10\cdot\pi \quad\Rightarrow\quad \pi = 3$

6 a)



Herleitung der Formel erfolgt mit Hilfe des Pythagoras:

$$x^2+\left(\frac{s_n}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad\Rightarrow\quad x = \sqrt{\frac{1}{4}-\frac{s_n^2}{4}} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{1-s_n^2}$$

$$(s_{2n})^2 = \left(\frac{s_n}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-x\right)^2 = \left(\frac{s_n}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1-s_n^2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{s_n}{2}\right)^2+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1-s_n^2}+\frac{1}{4}\left(1-s_n^2\right)$$

$$= \left(\frac{s_n}{2}\right)^2+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1-s_n^2}+\frac{1}{4}-\frac{s_n^2}{4}$$

$$= \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1-s_n^2}$$

$$\Rightarrow\quad s_{2n} = \sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1-s_n^2}}$$

$$u_{2n} = 2n\cdot s_{2n} = 2n\cdot\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1-s_n^2}}$$

$$u_n = n\cdot s_n \quad\Rightarrow\quad s_n = \frac{u_n}{n}$$

$$u_{2n} = 2n\cdot\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{u_n}{n}\right)^2}}$$

n = 6: $\varphi = 60° \quad\Rightarrow\quad s_6 = \frac{1}{2}$ da gleichseitiges Dreieck

$u_6 = 6\cdot\frac{1}{2}\,\text{LE} = 3\,\text{LE}$

n = 12: $u_{12} = u_{2\cdot 6} = 12\cdot\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{3}{6}\right)^2}} = 3{,}105828541$ LE

n = 24: $u_{24} = u_{2\cdot 12} = 24\cdot\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{u_{12}}{12}\right)^2}} = 3{,}132628613$ LE

n = 48: $u_{48} = u_{2\cdot 24} = 48\cdot\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{u_{24}}{24}\right)^2}} = 3{,}139350203$ LE

n = 96: $u_{96} = u_{2\cdot 48} = 96\cdot\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{u_{48}}{48}\right)^2}} = 3{,}141031951$ LE

b) Tabellenkalkulationsdatei downloadbar im Internetauftritt.

n	u_n
192	3,141452472
⋮	
786 432	3,141592304
1 572 864	3,141608696

Ab n = 393 216 entfernt sich der Wert wieder vom wahren π-Wert.

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 10
ISBN 978-3-12-731961-3

c) $u_{2n} = 2n \cdot \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{u_n}{n}\right)^2}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{u_n}{n}\right)^2}}}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{u_n}{n}\right)^2}}} = \frac{2n \cdot \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \left(\frac{u_n}{n}\right)^2\right)}}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{u_n}{n}\right)^2}}}$

$$= \frac{2n \cdot \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{u_n}{n}\right)^2}}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{u_n}{n}\right)^2}}} = \frac{2n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{u_n}{n}}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{u_n}{n}\right)^2}}} = \frac{u_n}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{u_n}{n}\right)^2}}}$$

$$= \frac{2u_n}{2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{u_n}{n}\right)^2}}} = \frac{2u_n}{\sqrt{2 + 2 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{u_n}{n}\right)^2}}}$$

→ Tabellenkalkulationsdatei downloadbar im Internetauftritt.

7 $A_Q \approx A_K$

$\Leftrightarrow \quad a^2 \approx r^2 \cdot \pi$ mit a = Seitenlänge des Quadrates;

Es gilt (linke Seite): $\left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{e}{2}\right)^2 = a^2$ (e = Diagonale im Quadrat)

$\frac{e^2}{2} = a^2$

$r = \frac{e}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2e}{5}$; $r^2 = \frac{4}{25} e^2$

$\Rightarrow$ (r^2, a^2 eingesetzt) $\frac{e^2}{2} \approx \frac{4}{25} e^2 \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad \pi \approx \frac{25}{8} = 3{,}125$

8 Durch Probieren erhält man folgende Ergebnisse:

$d_1 = 10{,}00\,m$: $u_{1a} = 2 \cdot 10{,}00\,m \cdot 3{,}142 = 62{,}84\,m$
$u_{1b} = 2 \cdot 10{,}00\,m \cdot 3{,}1416 = 62{,}832\,m$
$\Rightarrow$ Es sind 4 Nachkommastellen nötig.

$d_2 = 100{,}00\,m$: $u_{2a} = 2 \cdot 100{,}00\,m \cdot 3{,}1416 = 628{,}32\,m$
$u_{2b} = 2 \cdot 100{,}00\,m \cdot 3{,}14159 = 628{,}318\,m \approx 628{,}32\,m$
$\Rightarrow$ Es genügen 4 Nachkommastellen.

$d_3 = 1000{,}00\,m$: $u_{3a} = 2 \cdot 1000{,}00\,m \cdot 3{,}1416 = 6283{,}2\,m$
$u_{3b} = 2 \cdot 1000{,}00\,m \cdot 3{,}14159 = 6283{,}18\,m$
$u_{3c} = 2 \cdot 1000{,}00\,m \cdot 3{,}141593 = 6283{,}186\,m \approx 6283{,}19\,m$
$\Rightarrow$ Es sind 6 Nachkommastellen nötig.

9

	absoluter Fehler	relativer Fehler
a)	$\pi - 3 = 0{,}14159$	$\frac{\pi-3}{\pi} = 0{,}04507 = 4{,}507\,\%$
b)	$-0{,}01890$	$-0{,}00602 = -0{,}602\,\%$
c)	$-0{,}00467$	$-0{,}00149 = -0{,}149\,\%$
d)	$3\frac{1}{7}$: 0,00126;	$0{,}00040 = 0{,}040\,\%$
	$3\frac{10}{71}$: 0,00075	$0{,}00024 = 0{,}024\,\%$
e)	0,00007	$0{,}00002 = 0{,}002\,\%$
f)	$-0{,}0000003$	$\approx 0\,\%$
g)	$-0{,}02069$	$-0{,}00659 = -0{,}659\,\%$

10 Geldwert = $\text{Masse}_Z \cdot 39{,}552\,€ = V_Z \cdot 21{,}5\,g \cdot 39{,}552\,€$
$= r^2 \cdot \pi \cdot h \cdot 21{,}5\,g \cdot 39{,}552\,€ = (2{,}0\,cm)^2 \cdot \pi \cdot 5{,}0\,cm \cdot 21{,}5\,g \cdot 39{,}552\,€$
$= \pi \cdot 17\,007{,}36\,€$

(1) $\pi = 3{,}14$: Geldwert = 53 403,1104 €
(2) TR: Geldwert ≈ 53 430,19723 €
Abweichung: 53 430,19723 € – 53 403,1104 € = 27,08683 € ≈ 27,09 €

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 10
ISBN 978-3-12-731961-3

11 Versuch: Individuelle Lösungen
Erklärung: $A_{Kreis} = r^2 \cdot \pi$
$A_{Quadrat} = (2r)^2 = 4r^2$
N_1: Anzahl Konfetti im Kreis
N_2: Anzahl Konfetti außerhalb des Kreises, aber innerhalb des Quadrats
$N_1 + N_2$: Anzahl Konfetti im Quadrat

$$\frac{N_1}{N_1 + N_2} \approx \frac{A_{Kreis}}{A_{Quadrat}} = \frac{r^2 \cdot \pi}{4r^2} = \frac{\pi}{4}$$

12 Skizze: Individuelle Lösungen
Vermutlich wird die zu bewältigende Steigung deutlich überschätzt.
Beachte: 20 % Steigung bedeutet eine Höhendifferenz von 20 m auf 100 m.

2 Kreissektor und Bogenmaß

S. 12

1 Der Minutenzeiger stellt den Radius der Uhr dar; $r = 7\,cm$
a) $1\,h \mathrel{\hat{=}}$ Vollkreis; $s = 2 \cdot 7\,cm \cdot \pi \approx 44\,cm$
b) $\frac{1}{4}h \mathrel{\hat{=}}$ Viertelkreis; $s = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 7\,cm \cdot \pi \approx 11\,cm$
c) $10\,min \mathrel{\hat{=}} \frac{1}{6}$ Kreis; $s = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 7\,cm \cdot \pi \approx 7{,}3\,cm$
d) $1\,min \mathrel{\hat{=}} \frac{1}{60}$ Kreis; $s = \frac{1}{60} \cdot 2 \cdot 7\,cm \cdot \pi \approx 0{,}73\,cm$

2 (1) $r = 1{,}5\,cm$; $90° =$ Viertelkreis
$s = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 1{,}5\,cm \cdot \pi \approx 2{,}36\,cm$ $A = \frac{1}{4} \cdot (1{,}5\,cm)^2 \cdot \pi \approx 1{,}77\,cm^2$
(2) $r = 2{,}5\,cm$; $120° = \frac{1}{3}$ Kreis
$s = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 2{,}5\,cm \cdot \pi \approx 5{,}24\,cm$ $A = \frac{1}{3} \cdot (2{,}5\,cm)^2 \cdot \pi \approx 6{,}54\,cm^2$
(3) $r = 1\,cm$; $240° = \frac{2}{3}$ Kreis
$s = \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 1\,cm \cdot \pi \approx 4{,}19\,cm$ $A = \frac{2}{3} \cdot (1\,cm)^2 \cdot \pi \approx 2{,}09\,cm^2$
(4) $r = 2\,cm$; $60° = \frac{1}{6}$ Kreis
$s = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 2\,cm \cdot \pi \approx 2{,}09\,cm$ $A = \frac{1}{6} \cdot (2\,cm)^2 \cdot \pi \approx 2{,}09\,cm^2$
(5) $r = 1{,}8\,cm$; $45° = \frac{1}{8}$ Kreis
$s = \frac{1}{8} \cdot 2 \cdot 1{,}8\,cm \cdot \pi \approx 1{,}41\,cm$ $A = \frac{1}{8} \cdot (1{,}8\,cm)^2 \cdot \pi \approx 1{,}27\,cm^2$

S. 13

3

a) $\frac{1}{12}\pi$	b) 36°	c) $\frac{5}{12}\pi$	d) 57°	e) 330°	f) $\frac{2}{3}\pi$
g) 143°	h) 126°	i) $\frac{7}{4}\pi$	k) 225°	l) $\frac{3}{4}\pi$	m) $\frac{7}{6}\pi$
n) $\frac{4}{3}\pi$	o) 47°	p) $\frac{23}{12}\pi$	q) 258°		

4 a) $U = 120\,cm$

$\alpha = 180°$: $b = 60\,cm$;	$\alpha = 6°$: $b = 2\,cm$;	$\alpha = 270°$: $b = 90\,cm$
$\alpha = 300°$: $b = 100\,cm$;	$\alpha = 45°$: $b = 15\,cm$;	$\alpha = 18°$: $b = 6\,cm$
$\alpha = 9°$: $b = 3\,cm$;	$\alpha = 15°$: $b = 5\,cm$	

b) $A = 180\,cm^2$

$\alpha = 120°$: $A = 60\,cm^2$;	$\alpha = 60°$: $A = 30\,cm^2$;	$\alpha = 240°$: $A = 120\,cm^2$
$\alpha = 40°$: $A = 20\,cm^2$;	$\alpha = 30°$: $A = 15\,cm^2$;	$\alpha = 20°$: $A = 10\,cm^2$
$\alpha = 12°$: $A = 6\,cm^2$;		

S. 14

5

a) b = 4,7 cm	**A = 21,2 cm²**	R	b) b = 9,4 cm	**A = 42,4 cm²**	E
c) b = 19 cm	**A = 169,6 cm²**	B	d) **b = 5,6 cm**	A = 50,2 cm²	M
e) b = 15,7 cm	**A = 47,1 cm²**	E	f) **b = 23,7 cm**	A = 142,0 cm²	T
g) b = 1,55 cm	**A = 1,86 cm²**	P	h) **b = 0,94 cm**	A = 0,38 cm²	E
i) **b = 15,4 cm**	A = 24,6 cm²	S	Lösungswort: SEPTEMBER		

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 10
ISBN 978-3-12-731961-3

6 a) (1) Die zwei Teilflächen ergeben zusammengesetzt einen Viertelkreis.

$r = \frac{1}{2}d \quad d = \text{Diagonale des Quadrates mit } a = 4\,\text{cm}$

$d = \sqrt{(4\,\text{cm})^2 + (4\,\text{cm})^2} = 4\sqrt{2}$

$r = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt{2}$

$A = \frac{90°}{360°} \cdot \left(2\sqrt{2}\right)^2 \pi = 2 \cdot \pi\,\text{cm}^2 \approx 6{,}28\,\text{cm}^2$

$U = 4 \cdot r + \frac{90°}{360°} \cdot 2 \cdot r \cdot \pi = 8\sqrt{2}\,\text{cm} + \sqrt{2} \cdot \pi\,\text{cm} \approx 15{,}76\,\text{cm}$

(2) Die vier Teilflächen ergeben zusammengesetzt einen Halbkreis.

$r = 2\,\text{cm}$

$A = \frac{180°}{360°} \cdot (2\,\text{cm})^2 \cdot \pi = 2 \cdot \pi\,\text{cm}^2 \approx 6{,}28\,\text{cm}^2$

$U = 8 \cdot r + \frac{180°}{360°} \cdot 2 \cdot r \cdot \pi = 16\,\text{cm} + 2\pi\,\text{cm} \approx 22{,}28\,\text{cm}$

(3) Den Flächeninhalt erhält man, indem man die Fläche des Quadrates ($a = 4\,\text{cm}$) zwei Achtelkreise ($r = 3\,\text{cm}$) subtrahiert.

$A = 16\,\text{cm}^2 - 2 \cdot \frac{45°}{360°} \cdot (3\,\text{cm})^2 \cdot \pi = 16\,\text{cm}^2 - 2{,}25\,\text{cm}^2 \cdot \pi \approx 8{,}93\,\text{cm}^2$

$U = 2 \cdot 4\,\text{cm} + 2 \cdot 1\,\text{cm} + 2 \cdot \frac{45°}{360°} \cdot 2 \cdot 3\,\text{cm} \cdot \pi + 2 \cdot \left(4\sqrt{2} - 3\,\text{cm}\right)$

$= 8\,\text{cm} + 2\,\text{cm} + 1{,}5\,\text{cm} \cdot \pi + 8\sqrt{2} - 6\,\text{cm} = 4\,\text{cm} + 1{,}5\,\text{cm} \cdot \pi + 8\sqrt{2} \approx 20{,}03\,\text{cm}$

b) Individuelle Lösungen

7 $b = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2 \cdot r \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{b \cdot 180°}{r \cdot \pi}$

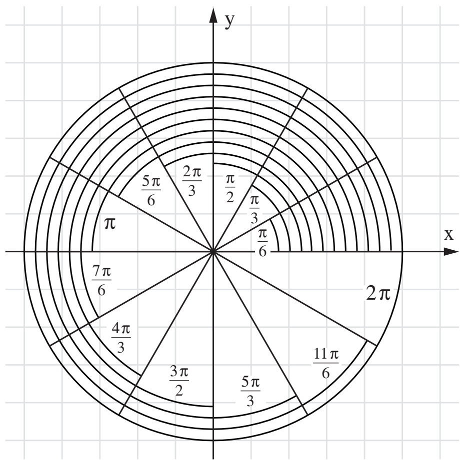
a) $\alpha = \frac{50\,\text{cm} \cdot 180°}{45\,\text{cm} \cdot \pi} \approx 63{,}66°$ b) $\alpha = \frac{100\,\text{cm} \cdot 180°}{140\,\text{cm} \cdot \pi} \approx 40{,}93$ c) $\alpha = \frac{10{,}0\,\text{cm} \cdot 180°}{3{,}5\,\text{cm} \cdot \pi} \approx 163{,}7°$

8 $\alpha = \frac{b \cdot 180°}{r \cdot \pi} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1{,}00\,\text{m} \cdot 180°}{1{,}00\,\text{m} \cdot \pi} = \frac{180°}{\pi}$

$A = \frac{180°}{360° \cdot \pi} \cdot \pi \cdot (1{,}00\,\text{m})^2 = 0{,}50\,\text{m}^2$ Alternative Lösung: $A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot r = 0{,}50\,\text{m}^2$

9

$\frac{\pi}{6} = 30°$	$\frac{\pi}{3} = 60°$	$\frac{\pi}{2} = 90°$
$\frac{2\pi}{3} = 120°$	$\frac{5\pi}{6} = 150°$	$\pi = 180°$
$\frac{7\pi}{6} = 210°$	$\frac{4\pi}{3} = 240°$	$\frac{3\pi}{2} = 270°$
$\frac{5\pi}{3} = 300°$	$\frac{11\pi}{6} = 330°$	$2\pi = 360°$



10 Große Pizza = P_1 mit $d_1 = 2d_2$; kleine Pizza = P_2 mit d_2

1 Stück von P_1: $A_1 = \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{2d_2}{2}\right)^2 \cdot \pi = \frac{1}{8} \cdot {d_2}^2 \cdot \pi$

1 Stück von P_2: $A_2 = \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 \cdot \pi = \frac{1}{8} \cdot \frac{{d_2}^2}{4} \cdot \pi = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{8} \cdot {d_2}^2 \cdot \pi\right) = \frac{1}{4} \cdot A_1$

4 kleine Stücke ergeben 1 Stück der großen Pizza.

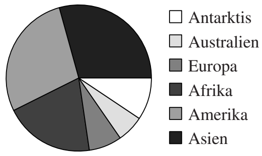
1 Stück der großen Pizza müsste dann 4 € kosten.

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 10
ISBN 978-3-12-731961-3

11 a) Die erforderlichen Angaben könnten im Internet recherchiert werden.

Kontinent	Asien	Amerika	Afrika	Europa
Fläche	$44 \cdot 10^6\,km^2$	$42 \cdot 10^6\,km^2$	$30 \cdot 10^6\,km^2$	$11 \cdot 10^6\,km^2$
Winkelwert	105,6°	100,8°	72°	26,4°

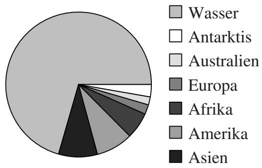
Kontinent	Australien	Antarktis	Gesamt
Fläche	$9 \cdot 10^6\,km^2$	$14 \cdot 10^6\,km^2$	$150 \cdot 10^6\,km^2$
Winkelwert	21,6°	33,6°	360°



b) Wasserfläche: $360 \cdot 10^6\,km^2$; Gesamtfläche: $510 \cdot 10^6\,km^2$

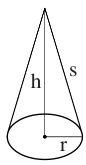
Kontinent	Asien	Amerika	Afrika
Winkelwert	31,1°	29,6°	21,2°

Kontinent	Europa	Australien	Antarktis	Wasser
Winkelwert	7,8°	6,4°	9,9°	254,1°



12 a) $V_{Kegel} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$

$V = \frac{1}{3} \cdot 20\,cm^2 \cdot 5{,}6\,cm = \frac{112}{3}\,cm^3 \approx 37{,}3\,cm^3$



b) Mantelfläche $M = \pi \cdot r_{Kegel} \cdot s$

$G = r^2 \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{G}{\pi}} = \sqrt{\frac{20\,cm^2}{\pi}} \approx 2{,}52\,cm$

$h^2 + r^2 = s^2 \quad \Rightarrow \quad s = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{(5{,}6\,cm)^2 + \frac{20\,cm^2}{\pi}} \approx 6{,}14\,cm$

$M = \pi \cdot 2{,}52\,cm \cdot 6{,}14\,cm \approx 48{,}61\,cm^2$

13 a) $b = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2{,}25\,m \cdot \pi \approx 7{,}07\,m$ $\qquad A = \frac{1}{2} \cdot (2{,}25\,m)^2 \cdot \pi \approx 7{,}95\,m^2$

b) $b = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 4{,}1\,m \cdot \pi \approx 6{,}44\,m$ $\qquad A = \frac{1}{4} \cdot (4{,}1\,m)^2 \cdot \pi \approx 13{,}20\,m^2$

c) $b = 2 \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 2{,}20\,m \cdot \pi\right) \approx 4{,}61\,m$

$A = 2 \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot 2 \cdot (2{,}20\,m)^2 \cdot \pi\right) - \frac{1}{2} \cdot 2{,}20\,m \cdot h_{Dreieck}$

$\approx 2{,}97\,m^2$

wobei $h_{Dreieck} = \sqrt{(2{,}20\,m)^2 - (1{,}10\,m)^2} \approx 1{,}91\,m$

d) $b = 2 \cdot \left(\frac{70{,}5°}{360°} \cdot 2 \cdot 1{,}5\,m \cdot \pi\right) \approx 3{,}69\,m$

$A = 2 \cdot \left(\frac{70{,}5°}{360°} \cdot (1{,}5\,m)^2 \cdot \pi\right) - \frac{1}{2} \cdot 1\,m \cdot h_{Dreieck}$

$\approx 2{,}05\,m^2$

wobei $h_{Dreieck} = \sqrt{(1{,}5\,m)^2 - (0{,}5\,m)^2} = \sqrt{2}\,m$

e) Individuelle Lösungen

S. 15

14

1. $\frac{\pi}{10} = 18°$	P	2. $\frac{2\pi}{3} = 120°$	A	3. $288° = \frac{8\pi}{5}$	U
4. $327° = 5{,}71$	S	5. $162° = 2{,}83$	E	6. $\frac{\pi}{8} = 22{,}5°$	N
7. $\frac{5\pi}{4} = 225°$	H	8. $143° = 2{,}5$	O	9. $72° = 1{,}26$	F

Lösungswort: PAUSENHOF

15 $A = \frac{\alpha}{360°} \cdot r^2 \cdot \pi$; $\quad \alpha = \frac{180° \cdot b}{\pi \cdot r}$; $\quad r = \frac{2 \cdot A}{b}$

16

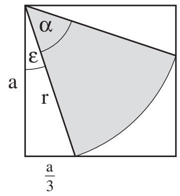
	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
r	2,0 m	4,8 m	50 cm	8,0 cm	**≈ 6,56 cm**	**≈ 3,13 m**	**12 m**
α	$\frac{\pi}{6}$	**≈ 71,6°**	**≈ 103,1°**	**≈ 143,2°**	40°	0,87	**≈ 14,32°**
b	**≈ 1,05 m**	60 dm	9 dm	**20,0 cm**	**4,58 cm**	**≈ 2,72 m**	30 dm
A	**≈ 1,05 m²**	**14,4 m²**	**22,5 dm²**	0,8 dm²	15,0 cm²	4,25 m²	18 m²

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 10
ISBN 978-3-12-731961-3

17 a) $\frac{\alpha}{360°} \cdot a^2 \cdot \pi = \frac{1}{4} \cdot a^2 \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad \alpha = 90°$

b) $\frac{\alpha}{360°} \cdot (3\,r)^2 \cdot \pi = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{360°}{9} = 20°$

c)



$\tan \varepsilon = \frac{\frac{a}{3}}{a} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = 18{,}4°$

$\alpha = 90° - 2 \cdot \varepsilon = 90° - 36{,}8° = 53{,}2°$

$r^2 = a^2 + \frac{a^2}{(3)^2} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{10}{9}\,a^2} = \frac{a}{3}\sqrt{10}$

$\frac{53{,}2°}{360°} \cdot \left(\frac{a}{3}\sqrt{10}\right)^2 \cdot \pi = \frac{\alpha}{360°} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \pi$

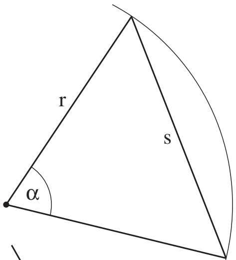
$53{,}2° \cdot \frac{10}{9} = \alpha \cdot \frac{1}{4}$

$236{,}4° = \alpha$

d) Individuelle Lösungen

18 a) Richtig, da die Bogenlänge b direkt proportional zum Winkel α ist.
b) Richtig, da die Bogenlänge b direkt proportional zum Radius r ist.
c) Falsch, da der Radius r in der Flächeninhaltsformel quadratisch vorkommt (dreifacher Radius ≙ neunfacher Flächeninhalt)
d) Richtig, da der Radius in der Flächeninhaltsformel quadratisch vorkommt (doppelter Radius ≙ vierfacher Flächeninhalt)
e) Richtig, da die Bogenlänge b direkt proportional zum Radius r ist, der Radius in der Flächeninhaltsformel jedoch quadratisch vorkommt (doppelter Radius ≙ doppelter Bogenlänge ≙ vierfacher Flächeninhalt)

19 a)



$A_{Segment} = A_{Sektor} - A_{Dreieck}$

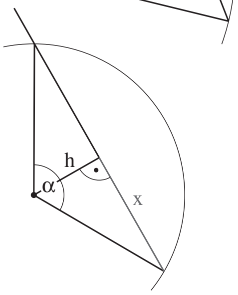
Es handelt sich um ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge 6,0 cm $\quad \Rightarrow \quad \alpha = 60°$

$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{4}a^2 \cdot \sqrt{3}$

$A_{Segment} = \frac{60°}{360°} \cdot 36\,cm^2 \cdot \pi - \frac{1}{4} \cdot 36\,cm^2 \cdot \sqrt{3}$

$= 6\,cm^2 \cdot \pi - 9\,cm^2 \cdot \sqrt{3} \approx 3{,}26\,cm^2$

b)



Es handelt sich um ein gleichschenkliges Dreieck.

$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot s \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot x) \cdot h = x \cdot h \approx 6{,}93\,cm \cdot 4\,cm = 27{,}72\,cm^2$

$\frac{x}{8} = \sin 60° \quad \Rightarrow \quad x \approx 6{,}93\,cm; \ \frac{h}{8} = \cos 60° \quad \Rightarrow \quad h = 4\,cm$

$A_{Segment} = \frac{120°}{360°} \cdot (8\,cm)^2 \cdot \pi - 27{,}72\,cm^2 \approx 39{,}3\,cm^2$

c) Es handelt sich um ein rechtwinkliges Dreieck.

$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot s$

$s^2 = (7{,}5\,cm)^2 + (7{,}5\,cm)^2$

$\Rightarrow \quad s \approx 10{,}61\,cm; \ h^2 = (7{,}5\,cm)^2 - \left(\frac{10{,}61}{2}\,cm\right)^2$

$\Rightarrow \quad h \approx 5{,}3\,cm$

$A_{Segment} = \frac{90°}{360°} \cdot (7{,}5\,cm)^2 \cdot \pi - \frac{1}{2} \cdot 5{,}3\,cm \cdot 10{,}61\,cm \approx 16{,}06\,cm^2$

20 a) Kalorien des Stücks = Masse (in Gramm) · 15 kJ
Masse = Volumen (in cm^3) · 0,5 g
Volumen $= A_{Sektor} \cdot h = \frac{40°}{360°} \cdot (13\,cm)^2 \cdot \pi \cdot 5\,cm = \frac{169 \cdot 5 \cdot \pi}{9}\,cm^3$

Kalorien $= \frac{169 \cdot 5 \cdot \pi}{9}\,cm^3 \cdot 0{,}5\,g \cdot 15\,kJ \approx 2212{,}20\,kJ$

b) 1. $d_2 = 1{,}25 \cdot d_1$ bzw. $r_2 = 1{,}25 \cdot r_1$

Kalorien (z) $= (1{,}25 \cdot r_1)^2 \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360°} \cdot 5\,cm \cdot 0{,}5\,g \cdot 15\,kJ = 1{,}5625 \cdot$ Kalorien (1)

Sowohl die Masse als auch die Anzahl an Kilojoule erhöhen sich um 56,25 %.

2. $h_2 = 1{,}25 \cdot h_1$

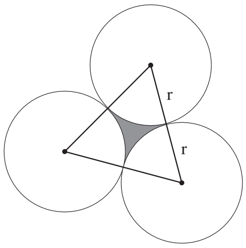
Kalorien (2) $= \frac{\alpha}{360°} \cdot r_1^2 \cdot \pi \cdot 1{,}25 \cdot h_1 \cdot 0{,}5\,g \cdot 15\,kJ = 1{,}25 \cdot$ Kalorien (1)

Sowohl die Masse als auch die Anzahl an Kilojoule erhöhen sich um 25 %.

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 10
ISBN 978-3-12-731961-3

21 Radius = $\text{Radius}_{\text{Erde}}$ + Höhe des Satellits = 6370 km + 280 km = 6650 km
Vollständige Umkreisung: $U = 2 \cdot 6650\,\text{km} \cdot \pi \approx 41\,783{,}18\,\text{km}$
Weg in 1 Stunde = $41\,783{,}18\,\text{km} : 1{,}5 \approx 27\,855{,}45\,\text{km}$
Bahngeschwindigkeit = $27\,855{,}45\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \approx 7{,}74\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$

22



Es entsteht ein gleichseitiges Dreieck mit $a = 2 \cdot r$

$A = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (2r)^2 = \sqrt{3} \cdot r^2$

$A_{\text{eingeschlossen}} = A_{\text{Dreieck}} - 3 \cdot A_{\text{Sektor}}$
$= \sqrt{3} \cdot r^2 - 3 \cdot \frac{60°}{360°} \cdot r^2 \cdot \pi$
$= \sqrt{3} \cdot r^2 - \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \pi = r^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)$

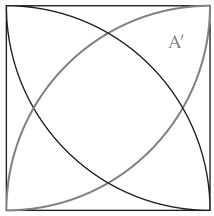
$U = 3 \cdot \frac{60°}{360°} \cdot 2 \cdot r \cdot \pi = r \cdot \pi$

S. 16

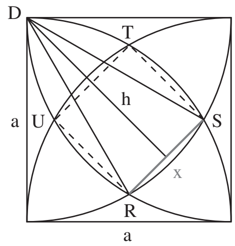
23 a) Quadrat mit Seite a minus 2-mal Quadrat mit Seite $\frac{a}{2}$
$A = a^2 - 2 \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{1}{2}a^2$
$U = \pi \cdot a$ $\left(\text{Vollkreis; } r = \frac{a}{2}\right)$

b) $2 \cdot$ Kreissektor ($\alpha = 120°$, $r = a$) – $2 \cdot$ gleichseitiges Dreieck (Seitenlänge a)
$A = 2 \cdot \frac{120°}{360°} \cdot a^2 \cdot \pi - 2 \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{2}{3}a^2\pi - \frac{a^2}{2} \cdot \sqrt{3} \approx 1{,}23\,a^2$
$U = 2 \cdot \frac{120°}{360°} \cdot 2 \cdot a \cdot \pi = \frac{4}{3}a \cdot \pi \approx 4{,}19\,a$

c) $2 \cdot$ Kreissektor ($\alpha = 60°$, $r = 2a$) – gleichseitiges Dreieck (Seitenlänge 2 a) + Kreis (r – a)
$A = 2 \cdot \frac{60°}{360°} \cdot (2a)^2 \cdot \pi - \sqrt{3} \cdot a^2 + a^2 \cdot \pi = \frac{4}{3}a^2 \cdot \pi - \sqrt{3}\,a^2 + a^2 \cdot \pi \approx 3{,}24\,a^2$
$U = 2 \cdot \left(\frac{a}{2}\right) \cdot \pi + 2 \cdot \frac{60°}{360°} \cdot 2 \cdot 2a \cdot \pi - a \cdot \pi + \frac{4}{3}a \cdot \pi = \frac{7}{3}a \cdot \pi \approx 7{,}33\,a$

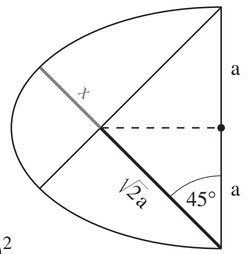


d) $A' = a^2 - 2 \cdot \left(a^2 - \frac{1}{4}a^2 \cdot \pi\right) = \frac{1}{2}a^2\pi - a^2$
Die gesuchte Fläche ergibt sich aus $2 \cdot A' - A^*$
A^* ist der Flächeninhalt der Figur RSTU.
Sie setzt sich aus einem Quadrat und 4 Kreisabschnitten zusammen.
Für die Quadratseite gilt: $x = a\sqrt{2 - \sqrt{3}}$
Für die Höhe des gleichschenkligen Dreiecks DRS gilt:
$h = \frac{a}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$
Somit ist $A^* = a^2\left(2 - \sqrt{3}\right) + 4\left(a^2\pi \cdot \frac{1}{12} - \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2 - \sqrt{3}} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)$
Für den gesuchten Flächeninhalt gilt also:
$A = a^2\left(\frac{2}{3}\pi - 3 + \sqrt{3}\right) \approx 0{,}826\,a^2$
$U = \frac{4}{3} \cdot \pi a \approx 4{,}19\,a$



e) $3 \cdot$ Kreissektor ($\alpha = 60°$, $r = a$) – gleichseitiges Dreieck (Seitenlänge a)
$A = 3 \cdot \frac{60°}{360°} \cdot a^2 \cdot \pi - 2 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \frac{a^2}{2} \cdot \pi - \frac{a^2}{2}\sqrt{3} \approx 0{,}705\,a^2$
$U = 3 \cdot \frac{60°}{360°} \cdot 2a \cdot \pi = a \cdot \pi$

f) $2 \cdot$ Kreissektor ($\alpha = 45°$, $r = 2a$)
– rechtwinkliges Dreieck
(Hypotenuse 2 a; h = a)
+ Halbkreis (r = a)
+ Viertelkreis (r = x)



$A = 2 \cdot \frac{45°}{360°} \cdot (2a)^2 \cdot \pi - \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot a + \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \pi + \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot a^2 \cdot \left(2 - \sqrt{2}\right)^2$
$= a^2 \cdot \pi - a^2 + \frac{a^2}{2} \cdot \pi + \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot a^2 \cdot \left(2 - \sqrt{2}\right)^2$ $(\approx 3{,}98\,a^2)$

$U = 2 \cdot \frac{45°}{360°} \cdot 2 \cdot 2a \cdot \pi + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot a \cdot \pi + \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot a \cdot \left(2 - \sqrt{2}\right)^2 \cdot \pi$
$= a \cdot \pi + a \cdot \pi + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot a \cdot \left(2 - \sqrt{2}\right)$ $(\approx 7{,}2\,a)$

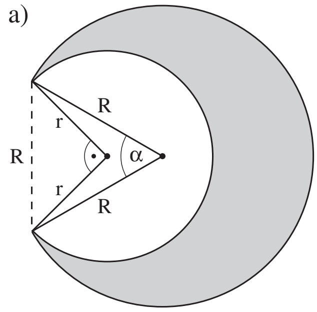
Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 10
ISBN 978-3-12-731961-3

24 $A_{Sektor} = A_{Quadrat}$

$\frac{\alpha}{360°}\cdot r^2\cdot\pi = r^2$

$\alpha = \frac{360°}{\pi} \approx 114{,}6°$

25 a)



$\alpha = 60°$, da gleichseitiges Dreieck

$R^2 = r^2 + r^2 \quad\Rightarrow\quad R = \sqrt{2r^2} = r\sqrt{2}$

$A_{Sichel} = \frac{300°}{360°}\cdot(r\sqrt{2})^2\cdot\pi - \frac{270°}{360°}\cdot r^2\cdot\pi + A_d$

A_d = gleichseitiges Dreieck – rechtwinkliges Dreieck

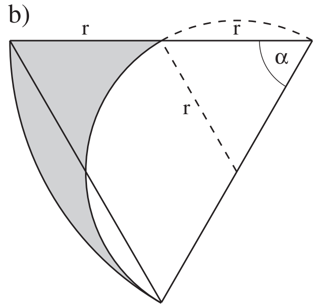
$A_d = \frac{\sqrt{3}}{4}R^2 - \frac{r^2}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2r^2 - \frac{r^2}{2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)\cdot r^2$

$A_{Sichel}\ \frac{5}{6}\cdot 2r^2\cdot\pi - \frac{3}{4}r^2\pi + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)r^2 = \frac{11}{12}r^2\pi + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)r^2 \approx 3{,}25\,r^2$

$U_{Sichel} = \frac{300°}{360°}\cdot 2\cdot r\sqrt{2}\cdot\pi + \frac{270°}{360°}\cdot 2\cdot r\cdot\pi =$

$= \frac{10}{6}\sqrt{2}\cdot r\cdot\pi + \frac{3}{2}r\cdot\pi = r\pi\cdot\left(\frac{5}{3}\sqrt{2}+\frac{3}{2}\right)\ (\approx 12{,}1\cdot r)$

b)



$\alpha = 60°$

$A_{„Giftzahn“} = A_{Sektor\,[2\,r;\,60°]} - A_{Halbkreis(r)} + A_{Segment}$

$A_{Segment} = A_{Sektor\,[r;\,60°]} - A_{gleichseitiges\ Dreieck} = \frac{60°}{360°}\cdot r^2\cdot\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot r^2$

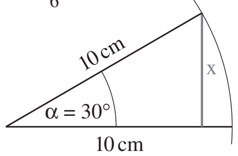
$\Rightarrow\quad A_{„Giftzahn“} = \frac{60°}{360°}\cdot(2r)^2\cdot\pi - \frac{1}{2}\cdot r^2\cdot\pi + \frac{60°}{360°}\cdot r^2\cdot\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot r^2$

$= \frac{2}{3}r^2\pi - \frac{1}{2}r^2\pi + \frac{1}{6}r^2\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}r^2$

$= r^2\cdot\left(\frac{1}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \approx 0{,}61\,r^2$

$U = r + \frac{60°}{360°}\cdot 2\cdot 2r\cdot\pi + \frac{120°}{360°}\cdot 2\cdot r\cdot\pi = r + \frac{2}{3}\cdot r\cdot\pi + \frac{2}{3}\cdot r\cdot\pi\ (\approx 5{,}19\cdot r)$

26 $\alpha = \frac{\pi}{6} = \sin 30°$



a) $x = \sin\frac{\pi}{6}\cdot 10\,cm$, da $\frac{x}{10\,cm} = \sin\frac{\pi}{6}$

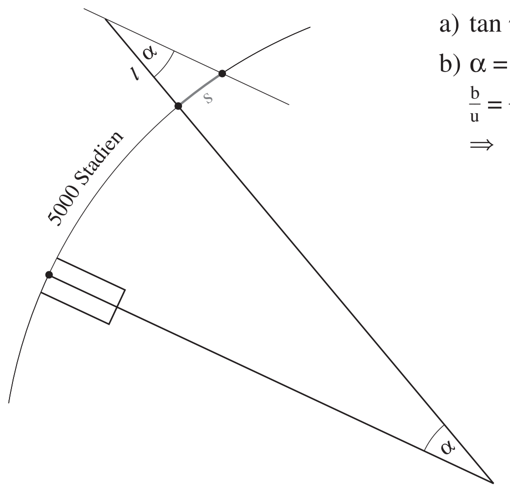
b) $x = 5\,cm$, da $\sin\frac{\pi}{6} = \sin 30° = \frac{1}{2}$

c) Beachte: Der Taschenrechner muss auf RAD umgestellt werden.

$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$; $\cos 1{,}0472 \approx 0{,}5$; $\sin 4 \approx -0{,}76$;

$\cos 5 \approx 0{,}28$; $\cos\frac{\pi}{5} \approx 0{,}81$; $\sin 3\pi = 0$

27



a) $\tan\pi = \frac{s}{l}$

b) $\alpha = 7{,}2°$; $b = 5000\cdot 150\,m = 750\,km$

$\frac{b}{u} = \frac{\alpha}{360°}$

$\Rightarrow\quad u = b\cdot\frac{360°}{\alpha} = 750\,km\cdot\frac{360°}{7{,}2°} = 37\,500\,km$

(echter Wert ≈ 40 000 km)

28 Aus dem Diagramm werden die Kühe der einzelnen Bauern abgelesen:

Huber: 80; Meier: 24; Korn: 62; Lank: 32; Birn: x

$(80+24+62+32+x):5 = 48{,}4 \quad\Rightarrow\quad (198+x):5 = 48{,}4$

$\Rightarrow\quad 198+x = 242$

$\Rightarrow\quad x = 44$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 10
ISBN 978-3-12-731961-3

3 Volumen der Kugel

S. 17

1 Material: Verschieden große Kugeln und geeignete Gefäße, in die die Kugeln hineinpassen. Die Versuche liefern einen Näherungswert $\pi \approx 4$.

2 Die Terme, die ein Produkt aus 3 Variablen beinhalten, beschreiben ein Volumen. Die Terme, die ein oder mehrere Produkte mit 2 Variablen beinhalten, beschreiben einen Oberflächeninhalt.

Zylinder:	$V = r^2\pi h$;	$O = 2r\pi(r+h)$	Quader:	$V = abc$;	$O = 2\cdot(ab+bc+ca)$
Würfel:	$V = a^3$;	$O = 6a^2$	Pyramide:	$V = \frac{1}{3}a^2h$;	
Kegel:	$V = \frac{1}{3}r^2\pi h$;	$O = r\cdot\pi(r+a)$	Prisma:	$V = \frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot h$;	$O = bc+ah+bh+ch$

S. 18

3 Volumen einer Stahlkugel: $V = \frac{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\,\text{mm}\right)^3\cdot\pi = \frac{1}{6}\cdot\pi\,\text{mm}^3$
Gesamtvolumen: $V = \frac{1}{6}\cdot\pi\,\text{mm}^3\cdot 10\,000\,000 \approx 5236\,\text{cm}^3$
Gesamtmasse: $m = 5236\,\text{cm}^3\cdot 7{,}8\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 40\,840{,}8\,\text{g} \approx 40{,}8\,\text{kg}$
Die Stahlkugeln können in einem Pkw transportiert werden.

4 a) $m = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot(2\,\text{cm})^3\cdot 0{,}9\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \approx 30{,}2\,\text{g}$
b) $V = 10\,\text{g} : 11{,}3\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \approx 0{,}884956\,\text{cm}^3$; $d = 2\cdot r = 2\cdot\sqrt[3]{884{,}956\,\text{mm}^3\cdot\frac{3}{4}\pi} \approx 11{,}9\,\text{mm}$

S. 19

5 a) (1) $V = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot(2{,}3\,\text{cm})^3 \approx 0{,}051\,\text{dm}^3$
(2) $V = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot(5\,\text{cm})^3 \approx 0{,}524\,\text{dm}^3$
(3) $V = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot\left(\left(\sqrt[3]{2}\right)^5\right)^3 = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot 2^5\,\text{m}^3 \approx 134\,041{,}287\,\text{dm}^3$
b) (1) $r = \sqrt[3]{905\,\text{mm}^3\cdot\frac{3}{4\pi}} \approx 6\,\text{mm}$
(2) $r = \sqrt[3]{1\,000\,000\,000\,\text{mm}^3\cdot\frac{3}{4\pi}} \approx 0{,}62\,\text{m}$
(3) $r = \sqrt[3]{1150\,\text{cm}^3\cdot\frac{3}{4\pi}} \approx 6{,}5\,\text{cm}$

6 a) (1) $r^2\cdot\pi\cdot 2r+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3 = 2\frac{2}{3}\cdot\pi\cdot r^3$ $(\approx 8{,}38\,r^3)$
(2) $\frac{1}{3}r^2\cdot\pi\cdot 2r+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3 = 1\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^3$ $(\approx 4{,}19\,r^3)$
(3) $r^2\cdot\pi\cdot r+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3 = 1\frac{2}{3}\cdot\pi\cdot r^3$ $(\approx 5{,}24\,r^3)$
(4) $\left(\frac{1}{3}r\right)^2\cdot\pi\cdot\frac{5}{3}r+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3 = \frac{23}{27}\cdot\pi\cdot r^3$ $(\approx 2{,}68\,r^3)$
b) Individuelle Lösungen

7 a) Mögliche Abschätzung (im Kopf):
Würfel: $(100\,\text{cm})^3\cdot 2{,}5\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 2\,500\,000\,\text{g} = 2500\,\text{kg}$
Kugel: $(40\,\text{cm})^3\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot 2{,}5\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \approx (40\,\text{cm})^3\cdot 4\cdot 2{,}5\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 64\,000\,\text{cm}^3\cdot 10\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 640\,000\,\text{g}$
$= 640\,\text{kg}$
b) $m = (V_W+V_K)\cdot 2{,}6\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = \left((88\,\text{cm})^3+\frac{4}{3}\cdot(38{,}5\,\text{cm})^3\cdot\pi\right)\cdot 2{,}6\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \approx 2393\,\text{kg}$

8 Der umbaute Raum setzt sich aus einem Zylinder $\left(r = \frac{43{,}3}{2}\,\text{m};\ h = \frac{43{,}3}{2}\,\text{m}\right)$ und einer Halbkugel $\left(r = \frac{43{,}3}{2}\,\text{m}\right)$ zusammen.
$V = V_Z+V_{HK} = \left(\frac{43{,}3}{2}\,\text{m}\right)^2\cdot\pi\cdot\frac{43{,}3}{2}\,\text{m}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{43{,}3}{2}\,\text{m}\right)^3\cdot\pi \approx 53\,134\,\text{m}^3$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 10
ISBN 978-3-12-731961-3

9 a) Der rechte Restkörper hat das kleinste Volumen.

b) Körper (1): $V_{rot} = 2 \cdot \left(r^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot r\right) = \frac{4}{3} r^3 \cdot \pi$; $r = 1{,}5\,\text{cm}$:

$V_{rot} = \frac{4}{3} \cdot (1{,}5\,\text{cm})^3 \cdot \pi \approx 14{,}14\,\text{cm}^3$

$V_{Rest} = r^2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot r - \frac{4}{3} r^3 \cdot \pi = \frac{8}{3} r^3 \cdot \pi$

$V_{Rest} = \frac{8}{3} \cdot (1{,}5\,\text{cm})^3 \cdot \pi \approx 28{,}27\,\text{cm}^3$

Körper (2): $V_{lila} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi\right) = \frac{4}{3} r^3 \cdot \pi$;

für $r = 1{,}5\,\text{cm}$: $V_{lila} \approx 14{,}14\,\text{cm}^3$

$V_{Rest} = 4 r^3 \cdot \pi - \frac{4}{3} r^3 \cdot \pi = \frac{8}{3} r^3 \cdot \pi$

für $r = 1{,}5\,\text{cm}$: $V_{Rest} \approx 28{,}27\,\text{cm}^3$ (siehe Körper (1))

Körper (3): $V_{blau} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi + \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot 3r = \frac{2}{3} \cdot r^3 \pi + r^3 \pi = \frac{5}{3} r^3 \pi$

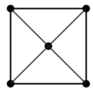
für $r = 1{,}5\,\text{cm}$: $V_{blau} = \frac{5}{3} \cdot (1{,}5\,\text{cm})^3 \cdot \pi \approx 17{,}67\,\text{cm}^3$

$V_{Rest} = 4 r^3 \pi - \frac{5}{3} r^3 \pi = \frac{7}{3} r^3 \pi$

für $r = 1{,}5\,\text{cm}$: $V_{Rest} = \frac{7}{3} \cdot (1{,}5\,\text{cm})^3 \cdot \pi \approx 24{,}74\,\text{cm}^3$

10 a) Das Atomium besteht aus 9 Kugeln und 20 Verbindungsröhren

Zwei „Viereranordnungen“ $\Rightarrow$ $2 \cdot 8$ Röhren + 4 = 20



$V = 9 \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot (9\,\text{m})^3 \cdot \pi\right) + 20 \cdot \left((1{,}5\,\text{m})^2 \cdot \pi \cdot 24\,\text{m}\right) \approx 30\,876\,\text{m}^3$

b) Individuelle Lösungen

S. 20

11 Der Findling hat etwa die Form einer Kugel.

$d_{Kugel} \approx 4 \cdot$ Größe der Kinder $= 4 \cdot 1{,}60\,\text{m} = 6{,}4\,\text{m}$

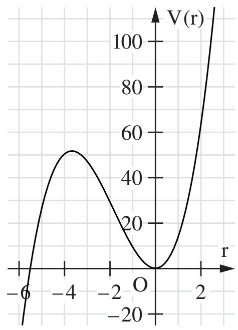
$m \approx \frac{4}{3} \cdot (3{,}2\,\text{m})^3 \cdot \pi \cdot 2{,}9\,\frac{\text{t}}{\text{m}^3} \approx 137{,}26\,\text{m}^3 \cdot 2{,}9\,\frac{\text{t}}{\text{m}^3} = 398{,}05\,\text{t} \approx 398\,\text{t}$

i Dieser riesige Findling heißt Maglesten und liegt nördlich von Trollebo.
Er ist der Legende nach von einem Troll geworfen worden, um den Kirchbau zu Åhus zu verhindern. Der Troll verfehlte jedoch sein Ziel um mehrere Meilen.

12 a) $V = V_{Kegel} + V_{Halbkugel} = \frac{1}{3} \cdot (2\,\text{cm})^2 \cdot \pi \cdot 11\,\text{cm} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot (2\,\text{cm})^3 \cdot \pi$

$\approx 62{,}83\,\text{cm}^3 = 62{,}83\,\text{ml}$

zu b)



b) $V(r) = \frac{11}{3} r^2 \cdot \pi + \frac{2}{3} r^3 \cdot \pi$

c) 1. Möglichkeit: Aus Graphen ablesen: $r \approx 2{,}5\,\text{cm}$

2. Möglichkeit: $\frac{11}{3} r^2 \cdot \pi + \frac{2}{3} r^3 \cdot \pi = 100\,\text{cm}^3 \quad \Rightarrow \quad 11 r^2 + 2 r^3 = \frac{300}{\pi}$

Strategie Probieren liefert: $r \approx 2{,}45\,\text{cm}$

13 linker Körper:

$V_{Kegel} = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot 5r = \frac{5}{3} r^3 \pi$

$V_{halbgefüllte\ Kugel} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot r^3 \pi = \frac{2}{3} r^3 \pi$

Volumen des Wassers im Kegel, nachdem die Kugel halb gefüllt wurde:

$V = \frac{5}{3} r^3 \pi - \frac{2}{3} r^3 \pi = r^3 \pi$

Gesucht ist also die Höhe des Kegels mit dem Radius x und der Höhe 5 x und dem Volumen $r^3 \pi$:

$\frac{5}{3} x^3 \pi = \pi r^3 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{0{,}6} \cdot r \approx 0{,}84 \cdot r$

$h = 5 \cdot x = 5 \cdot \sqrt[3]{0{,}6} \cdot r \approx 4{,}22 \cdot r$

rechter Körper:

$V_{oberer\ Körper} = V_{Zylinder} + V_{Halbkugel} = \left(\frac{r}{2}\right)^2 \pi \cdot 5r + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^3 \cdot \pi = \frac{4}{3} r^3 \pi$

$V_{halbgefüllte\ Kugel} = \frac{2}{3} r^3 \pi$

Volumen des Wassers im oberen Körper, nachdem die Kugel halb gefüllt wurde:

$V = \frac{4}{3} r^3 \pi - \frac{2}{3} r^3 \pi = \frac{2}{3} r^3 \pi$

Gesucht ist also die Höhe im Zylinder:

$\left(\frac{r}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot h + \frac{1}{12} r^3 \pi = \frac{2}{3} r^3 \pi \quad \Rightarrow \quad h = \left(\frac{2}{3} r^3 \pi - \frac{1}{12} r^3 \pi\right) : \left(\frac{r}{2}\right)^2 \cdot \pi = \frac{7}{12} r^3 \pi : \frac{1}{4} r^2 \pi = \frac{7}{3} r$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 10
ISBN 978-3-12-731961-3

14 Schätzung: $V_{Kugel} = \frac{4}{3} \cdot (5\,cm)^3 \cdot \pi \approx 4 \cdot 5^3\,cm^3 = 500\,cm^3 \quad \Rightarrow \quad V_{Rest} = 500\,cm^3 = 50\,\%$

Matthias hat recht.

Rechnung: $V_{Würfel} = (10\,cm)^3 \cdot \pi = 1000\,cm^3$

$V_{Kugel} = \frac{4}{3} \cdot (5\,cm)^3 \cdot \pi \approx 524\,cm^3$

Abfall: $\frac{1000-524}{1000} = 0{,}476 = 47{,}6\,\%$

15 Schätzung: $V_{Wassertropfen} = \frac{4}{3} \cdot (2\,mm)^3 \cdot \pi \approx 32\,mm^3$

Anzahl Wassertropfen $30 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 7 \approx 30 \cdot 60 \cdot 25 \cdot 8 = 360\,000$

$V_{Wasser} \approx 30\,mm^3 \cdot 360\,000 = 10{,}8\,l$

Rechnung: $V_{Wasser} = \frac{4}{3} \cdot (2\,mm)^3 \cdot \pi \cdot 30 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 7 \approx 10\,133\,521\,mm^3 \approx 10{,}13\,l$

16 $V_{Hohlkugel} = \frac{4}{3}(r_a - r_i)^3 \cdot \pi$ $\quad r_a$: Außenradius; r_i: Innenradius

a) $V_{Wand} = \dfrac{9124\,g}{8{,}93\,\frac{g}{cm^3}} \approx 1021{,}73\,cm^3$

$V_a = \frac{4}{3} \cdot (12\,cm)^3 \cdot \pi \approx 7238{,}23\,cm^3$

$V_i = V_a - V_{Wand} \approx 6216{,}5\,cm^3$

$6216{,}5\,cm^3 = \frac{4}{3} \cdot r_i^3 \cdot \pi$

$r_i^3 = \dfrac{6216{,}5 \cdot 3\,cm^3}{4 \cdot \pi}$;

$r_i \approx 11{,}41\,cm$; $\;d = r_a - r_i \approx 12\,cm - 11{,}41\,cm = 0{,}59\,cm$

b) $V_{Wand} = \dfrac{154\,g}{2{,}5\,\frac{g}{cm^3}} \approx 0{,}616\,cm^3$

$V_i = \frac{4}{3} \cdot (4{,}8\,cm)^3 \cdot \pi \approx 463{,}25\,cm^3$

$V_a = V_i + V_{Wand} \approx 463{,}87\,cm^3$

$463{,}87\,cm^3 = \frac{4}{3} \cdot r_a^3 \cdot \pi$

$r_a^3 = \dfrac{463{,}87\,cm^3 \cdot 3}{4 \cdot \pi}$;

$r_a \approx 4{,}8021\,cm$; $\;d = r_a - r_i \approx 0{,}0021\,cm = 0{,}021\,mm$

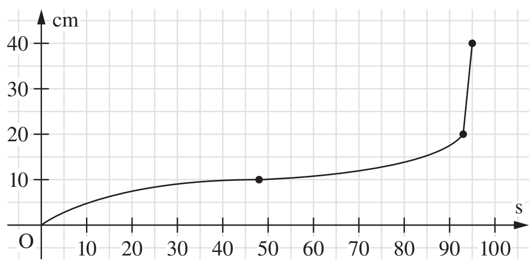
17 a) Berechnung erfolgt unter Vernachlässigung der „gekrümmten" Ansatzstelle:

$V_{gesamt} = V_{Kugel} + V_{Zylinder}$

$= \frac{4}{3} \cdot (10\,cm)^3 \cdot \pi + (1\,cm)^2 \cdot \pi \cdot 20\,cm$

$\approx 4251{,}6\,cm^3$

$4251{,}6\,cm^3$ werden in 96 s gefüllt.



Also wird der Zylinder ($V_{Zylinder} \approx 62{,}8\,cm^3$) in $\frac{96 \cdot 62{,}8\,cm^3}{4251{,}6\,cm^3}\,s \approx 1{,}42\,s$ gefüllt.

b) Zuflussrate: $\frac{4251{,}6}{96}\,\frac{cm^3}{s} \approx 44{,}3\,\frac{cm^3}{s}$

$V_{gesamt} = V_{Halbkugel} + V_{Zylinder} + V_{Kegel}$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot (10\,cm)^3 \cdot \pi + (10\,cm)^2 \cdot \pi \cdot 10\,cm + \frac{1}{3} \cdot (10\,cm)^2 \cdot \pi \cdot 10\,cm = 6283{,}2\,cm^3$

Füllzeit $\approx 6283{,}2\,cm^3 : 44{,}3\,\frac{cm^3}{s} \approx 142\,s = 2\,min\;22\,s$

Beschreibung des Graphen:

Die ersten 47 s $\left(\triangleq \frac{1}{3} \text{ der Zeit}\right)$ steigt der Graph zunächst schnell, dann immer langsamer werdend (wie bei a)) bis 10 cm,

die nächsten 71 s $\left(\triangleq \frac{1}{2} \text{ der Zeit}\right)$ steigt der Graph gleichbleibend langsam bis 20 cm,

die restlichen 24 s $\left(\triangleq \frac{1}{6} \text{ der Zeit}\right)$ steigt der Graph immer schneller werdend bis 30 cm.

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 10
ISBN 978-3-12-731961-3

18 a) Der Term ist eine Summe.

möгl. Überschlag: $-6-(2+0{,}5)\cdot(-3)=-6+7{,}5=1{,}5$

Rechnung: $-6{,}2-\left(1\frac{2}{3}+\frac{21}{5}\cdot\frac{2}{21}\right)\cdot(-2{,}5)=-6{,}2-\left(1\frac{2}{3}+\frac{2}{5}\right)\cdot(-2{,}5)=-6{,}2-\frac{31}{15}\cdot\left(-\frac{25}{10}\right)$
$=-6{,}2+\frac{155}{30}=-1\frac{1}{30}$

b) Der Term ist ein Quotient.

mögl. Überschlag: $(4+22):\frac{1}{4}=26\cdot4=104$

Rechnung: $\left(\frac{21}{5}+21{,}9\right):\frac{1}{4}=(4{,}2+21{,}9)\cdot4=26{,}1\cdot4=104{,}4$

c) Der Term ist ein Produkt.

mögl. Überschlag: $(4+1)\cdot(4-1)=5\cdot3=15$

Rechnung: $(\sqrt{17}+1)(\sqrt{17}-1)=17-1=16$

4 Oberflächeninhalt der Kugel

S. 21

1 Material: evtl. ein Fußball
Die Oberfläche dieses Fußballs besteht aus (12) schwarzen, leicht gekrümmten Fünfecken und (20) weißen leicht gekrümmten Sechsecken. Man könnte die Krümmung vernachlässigen und den Flächeninhalt dieser Fünf- und Sechsecke berechnen.

S. 22

2 $O=4\pi r^2 \Rightarrow r=\sqrt{\frac{O}{4\pi}}$; $V=\frac{4}{3}r^3\pi \Rightarrow r=\sqrt[3]{\frac{3\cdot V}{4\cdot\pi}}$

a) $O\approx 224{,}85\,m^2=22\,485\,dm^2$ — $V\approx 317{,}037\,m^3=317\,037\,dm^3$
b) $r\approx 12\,cm=1{,}2\,dm$ — $V\approx 7{,}238\,dm^3$
c) $r\approx 27\,dm$ — $O\approx 9160{,}88\,dm^2$
d) $V\approx 572{,}15\,m^3$ — $O\approx 333{,}29\,m^2$
e) $r\approx 1{,}06\,cm$ — $V\approx 4{,}99\,cm^3$
f) $r\approx 4{,}34\,m$ — $O\approx 236{,}7\,m^2$

3 Individuelle Lösungen

4 (1) Kugel mit $r=4\,cm$; $O\approx 201{,}06\,cm^2$; $V\approx 268{,}08\,cm^3$

(2) Körper = Zylinder ($r=3\,m$; $h=4\,m$) und Halbkugel ($r=3\,m$)
$V=(3\,m)^2\cdot\pi\cdot4\,m+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot(3\,m)^3\cdot\pi\approx 169{,}65\,m^3$
$O=(3\,m)^2\cdot\pi+2\cdot3\,m\cdot\pi\cdot4\,m+\frac{1}{2}\cdot4\cdot(3\,m)^2\cdot\pi\approx 160{,}22\,m^2$

(3) Körper (= Kegel ($r=3\,dm$; $h=4\,dm$) und Halbkugel ($r=3\,dm$))
$V=\frac{1}{3}\cdot(3\,dm)^2\cdot\pi\cdot4\,dm+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot(3\,dm)^3\cdot\pi\approx 94{,}25\,dm^3$
$O=\pi\cdot3\,dm\cdot\sqrt{(3\,dm)^2+(4\,dm)^2}+\frac{1}{2}\cdot4\cdot(3\,dm)^2\cdot\pi\approx 103{,}67\,dm^2$

5 Kugel mit $d=36\,m \Rightarrow r=18\,m$
$\text{Farbmenge}=\frac{O_{Kugel}}{2{,}4\,m^2}\,kg=\frac{4\cdot(18\,m)^2\cdot\pi}{2{,}4\,m^2}\,kg\approx 1696{,}46\,kg$

6 a) Volumen einer Kugel mit Radius r: $V_K=\frac{4}{3}r^3\cdot\pi$
Volumen eines Zylinders mit Radius r und Höhe 2r: $V_Z=r^2\cdot\pi\cdot2\cdot r=2r^3\pi$
Volumen des Restkörpers: $V_Z-V_K=2\cdot r^3\pi-\frac{4}{3}r^3\pi=\frac{2}{3}r^3\pi$
Anteil, der leer bleibt: $\frac{\frac{2}{3}r^3\pi}{2r^3\pi}=\frac{1}{3}=33\frac{1}{3}\,\%$

b) Oberfläche der Kugel: $O_K=4\cdot r^2\cdot\pi$
Mantelfläche des Zylinders: $M_Z=2\cdot r\cdot\pi\cdot2r=4r^2\pi$
} Die Kugeloberfläche und die Mantelfläche des Zylinders sind gleich groß.

7 a) $\text{Masse}=\text{Volumen}\cdot\text{Dichte} \Rightarrow \text{Volumen}=10\,000\,g:0{,}92\,\frac{g}{cm^3}\approx 10\,869{,}57\,cm^3$
$V_K=\frac{4}{3}r^3\pi \Rightarrow r=\sqrt[3]{\frac{3\cdot10\,869{,}57\,cm^3}{4\cdot\pi}}\approx 13{,}74\,cm \Rightarrow d\approx 27{,}48\,cm$
$O_K=4r^2\pi=4\cdot(13{,}74\,cm)^2\cdot\pi\approx 2372{,}37\,cm^2$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 10
ISBN 978-3-12-731961-3

8 a) Der Drehkörper setzt sich aus einem Kegel mit dem Radius $2r$ und der Höhe r und einer Halbkugel mit dem Radius r zusammen.

b) $V = V_{Halbkugel} + V_{Kegel} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 + \frac{1}{3} \cdot (2r)^2 \cdot \pi \cdot r = 2\pi \cdot r^3$

c) $2\pi r^3 = 85{,}75\,\pi\,cm^3 \;\Rightarrow\; r = \sqrt[3]{\frac{85{,}75}{2}\,cm^3} = 3{,}5\,cm$

9 Würfel: $V = 1\,m^3 = 1000\,dm^3 \;\Rightarrow\;$ Kantenlänge $s = 10\,dm$
$O = 6 \cdot (10\,dm)^2 = 600\,dm^2 = 6\,m^2$

Kugel: $V = 1000\,dm^3;\; \frac{4}{3} r^3 \pi = 1000\,dm^3 \;\Rightarrow\; r = \sqrt[3]{\frac{1000 \cdot 3}{\pi \cdot 4}}\,dm \approx 6{,}2\,dm$

$O = 4 \cdot (6{,}2\,dm)^2 \cdot \pi \approx 483{,}05\,dm^2 = 4{,}83\,m^2$

Die Oberfläche des Würfels ist größer. Die Oberflächeninhalte verhalten sich etwa 6 : 5.

10 Halbkugel mit $d = 23\,m \;\Rightarrow\; r = 11{,}5\,m$

a) $O = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (11{,}5\,m)^2 \cdot \pi \approx 830{,}95\,m^2$

b) $\text{Masse} = \text{Volumen} \cdot \text{Dichte} = 830{,}95 \cdot 10^6\,mm^2 \cdot 0{,}0001\,mm \cdot 19{,}3\,\frac{g}{cm^3}$
$= 83095\,mm^3 \cdot 19{,}3\,\frac{g}{cm^3} = 83{,}095\,cm^3 \cdot 19{,}3\,\frac{g}{cm^3} = 1603{,}7335\,g \approx 1{,}6\,kg$

11 a) Volleyball: $U_1 = 65\,cm = 2r_1\pi \;\Rightarrow\; r_1 \approx 10{,}35\,cm \;\Rightarrow\; d_1 \approx 20{,}69\,cm;$
$V_1 \approx 4644{,}19\,cm^3$
$U_2 = 67\,cm = 2r_2\pi \;\Rightarrow\; r_2 \approx 10{,}66\,cm \;\Rightarrow\; d_2 \approx 21{,}33\,cm;$
$V_2 \approx 5074{,}11\,cm^3$
Der Durchmesser liegt zwischen 20,7 cm und 21,3 cm, das Volumen zwischen 4644,19 cm³ und 5074,11 cm³.
Rechenweg für Fußball und Basketball analog Volleyball.

Fußball: Der Durchmesser liegt zwischen 21,6 cm und 22,6 cm, das Volumen zwischen 5306,04 cm³ und 6044,0 cm³.

Basketball: Der Durchmesser liegt zwischen 23,9 cm und 24,8 cm, das Volumen zwischen 7130,2 cm³ und 8005,79 cm³.

b) Volumen Basketball $= 8\,dm^3 = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \;\Rightarrow\; r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 8\,dm^3}{4 \cdot \pi}} \approx 1{,}24\,dm = 12{,}4\,cm \;\Rightarrow\; d = 24{,}8\,cm$

Der Ring des Basketballkorbs muss mindestens einen Durchmesser von 25 cm haben.

12 Kugel 1 mit Radus r $\;\Rightarrow\; V = \frac{4}{3} r^3 \pi;\; O = 4r^2\pi$

Kugel 2 mit Radus 2r $\;\Rightarrow\; V = \frac{4}{3} \cdot (2r)^3 \cdot \pi = 8 \cdot \frac{4}{3} r^3 \pi;\; O = 4 \cdot (2r^2)\pi = 4 \cdot 4r^2\pi$

Nicolas hat nicht Recht. Verdoppelt man den Radius, dann vervierfacht sich der Oberflächeninhalt, das Volumen verachtfacht sich.

13 Luftballon mit Radius r: $V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \pi;\quad O = 4 \cdot r^2 \cdot \pi$

a) L_a hat $2 \cdot V = 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot r^3 \pi;\quad \frac{8}{3} r^3 \pi = \frac{4}{3} \cdot r_a^3 \cdot \pi \;\Rightarrow\; r_a = \sqrt[3]{2}\,r$
Der neue Radius ist das $\sqrt[3]{2}$-fache des ursprünglichen Radius.

b) L_b hat $2 \cdot O = 2 \cdot 4r^2\pi;\quad 8r^2\pi = 4 \cdot r_b^2 \cdot \pi \;\Rightarrow\; r_b = \sqrt{2}\,r$
Der neue Radius ist das $\sqrt{2}$-fache des ursprünglichen Radius.

c) L_c hat $2 \cdot U = 2 \cdot 2 \cdot r \cdot \pi;\quad 4 \cdot r \cdot \pi = 2 \cdot r_c \cdot \pi \;\Rightarrow\; r_c = 2 \cdot r$
Der neue Radius ist doppelt so lange wie der ursprüngliche Radius.

14 a) Volumen Kugel = Volumen Zylinder = Volumen Kegel

$\frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi = r^2 \cdot \pi \cdot h_{Zylinder} \;\Rightarrow\; \frac{4}{3} \cdot r = h_{Zylinder}$

$\frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h_{Kegel} \;\Rightarrow\; 4 \cdot r = h_{Kegel}$

Die Höhe des Zylinders beträgt $\frac{4}{3} \cdot r$, die des Kegels $4 \cdot r$.

b) Oberfläche Kugel = Oberfläche Zylinder = Oberfläche Kegel

$4r^2\pi = 2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h_{Zylinder} \;\Leftrightarrow\; 4r^2\pi = 2r\pi \cdot (r + h_{Zylinder}) \;\Leftrightarrow\; 2r = r + h_{Zylinder}$
$\Rightarrow\; h_{Zylinder} = r$

$4r^2\pi = r^2\pi + \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h_{Ke}^2} \;\Leftrightarrow\; 3r = \sqrt{r^2 + h_{Ke}^2} \;\Rightarrow\; 9r^2 = r^2 + h^2 \;\Rightarrow\; h_{Ke} = \sqrt{8}\,r = 2\sqrt{2} \cdot r$

Die Höhe des Zylinders beträgt r, die des Kegels $2\sqrt{2} \cdot r$.

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 10
ISBN 978-3-12-731961-3

15 a) $V_{\text{Hohlkugel}} = V_{\text{äußere Kugel}} - V_{\text{innere Kugel}} = \frac{4}{3} r^3 \pi - \frac{4}{3}(r-d)^3 \cdot \pi$
$= \frac{4}{3}\pi \cdot [r^3 - (r^3 - 3r^2 d + 3rd^2 - d^3)] = \frac{4}{3}\pi \cdot (3r^2 d - 3rd^2 + d^3)$

b) r = 18 cm; d = 0,1 cm:
$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \left(3 \cdot (18\,\text{cm})^2 \cdot 0{,}1\,\text{cm} - 3 \cdot 18\,\text{cm} \cdot (0{,}1\,\text{cm})^2 + (0{,}1\,\text{cm})^3\right) \approx 404{,}89\,\text{cm}^3$
r = 18 cm; d = 0,001 cm: $V \approx 4{,}07\,\text{cm}^3$

c) Anschauliche Begründung:
Da diese Halbkugel sehr dünn ist, kann man auch den Oberflächeinhalt $O = 4\pi r^2$ mit der Dichte d der Hohlkugel multiplizieren.
Mathematische Begründung:
Mit sehr kleinem d werden in der Formel $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (3r^2 d - 3rd^2 + d^3)$ die Glieder $3rd^2$ und d^3 sehr (verschwindend) klein und können vernachlässigt werden.
Also $V \approx \frac{4}{3}\pi \cdot 3r^2 d = 4\pi \cdot r^2 d$.

d) Man dividiert das Volumen durch die Dicke d der Hohlkugel und erhält so $O = 4r^2\pi$.

S. 23

16 a) $V = V_{\text{Kegel}} + V_{\text{Zylinder}} + V_{\text{Halbkugel}} = \frac{1}{3}a^2 \cdot \pi \cdot a + a^2 \cdot \pi \cdot 3a + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot a^3 \cdot \pi = 4a^3\pi$
$O = \text{Mantel}_{\text{Kegel}} + \text{Mantel}_{\text{Zylinder}} + O_{\text{Halbkugel}}$
$= \pi \cdot a \cdot a \cdot \sqrt{2} + 2a \cdot \pi \cdot 3a + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot a^2 \cdot \pi = a^2 \cdot \pi \cdot (8 + \sqrt{2})$

b) $4a^3\pi = 62{,}5\pi\,\text{cm}^3 \Rightarrow a^3 = 15{,}625\,\text{cm}^3 \Rightarrow a = 2{,}5\,\text{cm}$

17 a) $O = 4 \cdot \left[\frac{1}{2}(r_a + r_i)\right]^2 \cdot \pi = (r_a + r_i)^2 \cdot \pi$

b) $V_{\text{Hohlkugel}} = \frac{4}{3} \cdot r_a^3 \pi - \frac{4}{3} r_i^3 \pi = \frac{4}{3} \cdot \pi (r_a^3 - r_i^3)$
$V_{\text{Quader}} + 2 \cdot V_{\text{kleine Kugel}} = O \cdot (r_a - r_i) + 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{r_a - r_i}{2}\right)^3 \cdot \pi = \pi \cdot (r_a^3 + r_a^2 r_i - r_a r_i^2 - r_i^3) + \frac{1}{3}\pi \cdot (r_a - r_i)^3$
$= \frac{4}{3}\pi r_a^3 - \frac{4}{3}\pi r_i^3 = \frac{4}{3}\pi (r_a^3 - r_i^3) = V_{\text{Hohlkugel}}$

18 Volumen des Pfropfens (Zylinders): $(2{,}5\,\text{mm})^2 \cdot \pi \cdot 7\,\text{mm} = 43{,}75\pi\,\text{mm}^3$
$43{,}75\pi\,\text{mm}^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left((35\,\text{mm})^3 - r_i^3\right) \Rightarrow r_i \approx 34{,}9910\,\text{mm}$
$d = 35\,\text{mm} - 34{,}9910\,\text{mm} = 0{,}009\,\text{mm}$
Alternativ könnte auch die Formel aus Aufgabe 15 c) verwendet werden, da d sehr viel kleiner als r sein muss.
$d_{\text{Seifenblase}} = \text{Volumen}_{\text{Pfropfen}} : \text{Oberfläche}_{\text{Seifenblase}} = 43{,}75\pi\,\text{mm}^3 : 4 \cdot (35\,\text{mm})^2 \cdot \pi \approx 0{,}009\,\text{mm}$

19 $O_K = V_K \Leftrightarrow 4r^2\pi = \frac{4}{3} \cdot r^3\pi \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{1}{3}r \quad \Rightarrow \quad r = 3$
Für $r = 3$ sind die Maßzahlen von Oberflächeninhalt und Volumen gleich.

20 a) Volumen der 4 kleinen Kugeln: $V = 4 \cdot \frac{4}{3} \cdot (1\,\text{cm})^3 \cdot \pi = \frac{16}{3}\pi\,\text{cm}^3$
$V_{\text{Kugel neu}} = \frac{16}{3}\pi\,\text{cm}^3 \Leftrightarrow \frac{4}{3}r^3\pi = \frac{16}{3}\pi\,\text{cm}^3 \Rightarrow r^3 = 4\,\text{cm}^3 \Rightarrow r = \sqrt[3]{4}\,\text{cm} \approx 1{,}59\,\text{cm}$

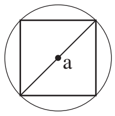
b) $\left.\begin{array}{l} O_{\text{kleine Kugel}} = 4 \cdot (1\,\text{cm})^3 \cdot \pi = 4\pi\,\text{cm}^2 \\ O_{\text{Kugel neu}} = 4 \cdot \left(\sqrt[3]{4}\right)^2 \cdot \pi \approx 10{,}08\pi\,\text{cm}^2 \end{array}\right\} \quad O_{\text{Kugel neu}} \approx 2{,}5 \cdot O_{\text{kleine Kugel}}$
Die Oberfläche der neuen Kugel ist um 150 % größer als die von der kleinen Kugel.

21 Schätzung: Individuelle Lösungen
Kugel: $V = 500\,\text{cm}^3 = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{375}{\pi}}\,\text{cm}$
$O = 4 \cdot r^2 \cdot \pi = 4 \cdot \left(\frac{375}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \pi\,\text{cm}^2 \approx 304{,}65\,\text{cm}^2$
Halbkugel: $V = 500\,\text{cm}^3 = \frac{2}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{750}{\pi}}\,\text{cm}$
$O = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot r^2 \cdot \pi + r^2\pi = 3 \cdot \left(\frac{750}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \pi\,\text{cm}^2 \approx 362{,}70\,\text{cm}^2$
Würfel: $V = 500\,\text{cm}^3 = a^3 \Rightarrow a = \sqrt[3]{500}\,\text{cm}$
$O = 6 \cdot a^2 = 6 \cdot 500^{\frac{2}{3}} \cdot \text{cm}^2 \approx 378{,}00\,\text{cm}^2$

$O_{\text{Würfel}} : O_{\text{Halbkugel}} : O_{\text{Kugel}} \approx 378 : 363 : 305 \approx 19 : 18 : 15$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 10
ISBN 978-3-12-731961-3

22 a) Würfel 1 hat Kantenlänge a.
Kugel 1 hat Diagonale $d = a \Rightarrow r_{K_1} = \frac{a}{2}$
Würfel 2: Querschnitt:



Raumdiagonale = a $\Rightarrow$ Kantenlänge $W_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot a$

Kugel 2 hat Diagonale $d_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot a \Rightarrow r_{K_2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot a$

b) Würfel 1: $V_{W_1} = a^3$; $O_{W_1} = 6 \cdot a^2$

Kugel 1: $V_{K_1} = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^3 \cdot \pi = \frac{a^3}{6} \cdot \pi$; $O_{K_1} = 4 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \pi = a^2 \cdot \pi$

Würfel 2: $V_{W_2} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot a\right)^3 \cdot \pi = \frac{1}{3\sqrt{3}} \cdot a^3$; $O_{W_2} = 6 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot a\right)^2 = 2 \cdot a^2$

Kugel 2: $V_{K_2} = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot a\right)^3 \cdot \pi = \frac{1}{18\sqrt{3}} \cdot a^3 \cdot \pi$; $O_{K_2} = 4 \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot a\right)^2 \cdot \pi = \frac{1}{3} \cdot a^2 \pi$

$V_{W_1} : V_{W_2} = 1 : \frac{1}{3\sqrt{3}}$; $V_{K_1} : V_{K_2} = 1 : \frac{1}{3\sqrt{3}}$

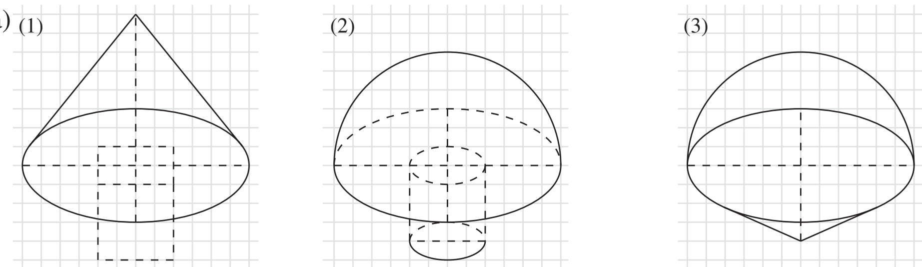
(Volumen ergeben sich jeweils als $3\sqrt{3}$. Teil des Vorvolumens)

$O_{W_1} : O_{W_2} = 3 : 1$; $O_{K_1} : O_{K_2} = 3 : 1$

c) Würfel 3: $V_{W_3} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \cdot V_{W_2} = \frac{1}{27} \cdot a^3$; $O_{W_3} = \frac{1}{3} \cdot O_{W_2} = \frac{2}{3} \cdot a^2$

Kugel 3: $V_{K_3} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \cdot V_{K_2} = \frac{1}{162} \cdot a^3 \cdot \pi$; $O_{K_3} = \frac{1}{3} \cdot O_{K_2} = \frac{1}{9} \cdot a^2 \cdot \pi$

23 a)



b) Quader und Kegel
$V_1 = 2^3 + \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot \pi \cdot 4$
$\approx 45{,}7$
$O_1 = 4 \cdot 2^2 + 3^2 \cdot \pi + \underbrace{3 \cdot 5 \cdot \pi}_{\text{Mantelfläche}}$
$\approx 91{,}4$

Zylinder und Halbkugel
$V_2 = 1^2 \cdot \pi \cdot 2^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot 3^3 \cdot \pi$
$\approx 62{,}83$
$O_2 = 2\pi \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3^2 \cdot \pi + 3^2 \cdot \pi$
$\approx 97{,}4$

Kegel und Halbkugel
$V_3 = \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot \pi \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot 3^3 \cdot \pi$
$\approx 75{,}4$
$O_3 = \underbrace{\pi \cdot 3 \cdot \sqrt{13}}_{\text{Mantelfläche}} + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3^2 \cdot \pi$
$\approx 90{,}5$

S. 24

24 $O_{Kugel} = 4 \cdot (18\,\text{m})^2 \cdot \pi \approx 4071{,}5\,\text{m}^2$
Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks $= \frac{7}{8} \cdot 4071{,}5\,\text{m}^2 : 6433 \approx 0{,}5538\,\text{m}^2 = 55{,}38\,\text{dm}^2$
Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks $= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot s^2$
$\Rightarrow 55{,}38\,\text{dm}^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot s^2 \Rightarrow s \approx 11{,}31\,\text{dm} \approx 113\,\text{cm}$

25 a)
$$\left.\begin{aligned} V_{Zylinder} &= r^2 \cdot \pi \cdot r = r^3 \cdot \pi \\ V_{Halbkugel} &= \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi = \tfrac{2}{3} r^3 \cdot \pi \\ V_{Kegel} &= \tfrac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot r = \tfrac{1}{3} r^3 \cdot \pi \end{aligned}\right\} (r^3 \cdot \pi) : \left(\tfrac{2}{3} r^3 \cdot \pi\right) : \left(\tfrac{1}{3} r^3 \cdot \pi\right) \Leftrightarrow 3:2:1$$

b)
$$\left.\begin{aligned} O_{Zylinder} &= 2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot r = 4 r^2 \cdot \pi \\ O_{Halbkugel} &= r^2 \cdot \pi + \tfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot r^2 \cdot \pi = 3 r^2 \cdot \pi \\ O_{Kegel} &= r^2 \cdot \pi + r \cdot \pi \cdot r\sqrt{2} = \left(1+\sqrt{2}\right) \cdot r^2 \cdot \pi \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &(4 r^2 \cdot \pi) : (3 r^2 \cdot \pi) : \left(\left(1+\sqrt{2}\right) \cdot r^2 \cdot \pi\right) \\ &= \left(4:3:\left(1+\sqrt{2}\right)\right) \approx 4:3:2{,}4 \end{aligned}$$

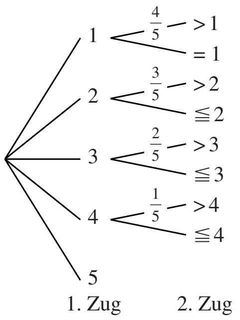
26 $V_{Zylinder} = r^2 \cdot \pi \cdot 2r = 2r^3 \cdot \pi = V_{Kugel}$; $\frac{4}{3} \cdot R^3 \cdot \pi = 2r^3 \cdot \pi \Rightarrow R = r \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$
$O_{Kugel} = 4 \cdot R^2 \cdot \pi = 4r^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \pi \approx 16{,}5\,r^2$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 10
ISBN 978-3-12-731961-3

27 Die Länge der Raumdiagonalen d des Quaders ist gleich der Länge des Durchmessers der Kugel.
Sei x eine Flächendiagonale: $x^2 = a^2 + b^2$;
$d^2 = x^2 + c^2$, also $d^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
Kugelradius $r = \frac{1}{2} d = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(12{,}5\,\text{cm})^2 + (10{,}1\,\text{cm})^2 + (5{,}2\,\text{cm})^2} \approx 8{,}45\,\text{cm}$
$V_K \approx 2523{,}2\,\text{cm}^3$; $O_K \approx 896{,}3\,\text{cm}^2$

28 a) $O = 4r^2 \cdot \pi = 28\pi\,\text{cm}^2 \Rightarrow r = \sqrt{7}\,\text{cm}$
b) $r_s^2 = r^2 - d^2 = 7\,\text{cm}^2 - 4\,\text{cm}^2 = 3\,\text{cm}^2$ $A = r_s^2 \cdot \pi = 3\,\text{cm}^2 \cdot \pi \approx 9{,}42\,\text{cm}^2$

29



Die Zahl auf der zweiten Kugel kann nur größer sein als die erste Zahl, wenn zuerst 1, 2, 3 oder 4 gezogen wird.
Z: Ziffer auf der zweiten Kugel; E: Ziffer auf der ersten Kugel
$P(Z > E) = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5} + \frac{2}{5} + \frac{1}{5}\right) = \frac{2}{5} = 40\,\%$

30 a) Aussage falsch: Gegenbeispiel ist ein rechtwinkliges Dreieck mit den beiden anderen Winkeln von jeweils 45°.
b) Aussage wahr: Wegen der Umkehrung des Satzes von Pythagoras ist das Dreieck ein rechtwinkliges Dreieck. Ein solches Dreieck kann nicht gleichseitig sein (da alle Winkel 60° betragen müssten).

5 Anwendungen an der Erdkugel

S. 25 **1** Die Schnittflächen sind Kreisflächen. Je näher man mit dem Schnitt dem Kugelmittelpunkt kommt, desto größer werden diese Kreisflächen. Damit die Schnittfläche möglichst groß wird, muss der Schnitt durch den Mittelpunkt der Kugel geführt werden. Das Volumen der beiden Kugelteile (Halbkugeln) ist dann gleich groß.

S. 26 **2** a) $O_E = 4 \cdot (6370\,\text{km})^2 \cdot \pi \approx 509\,904\,364\,\text{km}^2 \approx 510$ Mio. km^2
b) 70 % Wasser $\Rightarrow$ 30 % Land: Land $= 0{,}3 \cdot 510 \cdot 10^6\,\text{km}^3 \approx 153 \cdot 10^6\,\text{km}^3$
c) Da die Erdoberfläche von Bergen und Tälern geprägt ist, ist der tatsächliche Oberflächeninhalt größer als der berechnete.
d) $V_{\text{Ozeane}} = 0{,}7 \cdot 510 \cdot 10^6\,\text{km}^2 \cdot 3{,}8\,\text{km} \approx 1356{,}6 \cdot 10^6\,\text{km}^3 \approx 1{,}36 \cdot 10^9\,\text{km}^3$

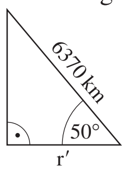
3 a)

	Erde	Mond	Sonne
U	$40 \cdot 10^3\,\text{km}$	$11 \cdot 10^3\,\text{km}$	$4400 \cdot 10^3\,\text{km}$
O	$510{,}0 \cdot 10^6\,\text{km}^2$	$38{,}0 \cdot 10^6\,\text{km}^2$	$6075{,}1 \cdot 10^9\,\text{km}^2$
V	$1082{,}7 \cdot 10^9\,\text{km}^3$	$22{,}0 \cdot 10^9\,\text{km}^3$	$1408{,}0 \cdot 10^{15}\,\text{km}^3$
m	$6020{,}0 \cdot 10^{12}\,\text{t}$	$73{,}7 \cdot 10^{12}\,\text{t}$	$1985{,}3 \cdot 10^{18}\,\text{t}$

b) $r_E : r_M : r_S \approx 4 : 1 : 400$
$\varrho_E : \varrho_M : \varrho_S \approx 4 : 2 : 1$
$U_E : U_M : U_S \approx 4 : 1 : 400$
$O_E : O_M : O_S \approx 13 : 1 : 160\,000$
$V_E : V_M : V_S \approx 50 : 1 : 64\,000\,000$
$m_E : m_M : m_S \approx 82 : 1 : 27\,000\,000$ (andere Darstellung/Rundungen möglich)
c) Gertruds Aussage ist falsch (vgl. b))

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 10
ISBN 978-3-12-731961-3

4 a) Schätzung individuell
Rechnung: $2 \cdot 6370\,\text{km} \cdot \pi : 24\,\text{h} \approx 1668\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

b) 

$\cos 50° = \frac{r'}{6370\,\text{km}} \Rightarrow r' \approx 4095\,\text{km}$ ($r' \mathrel{\hat{=}}$ Radius des 50. Breitenkreises)
$U \approx 2 \cdot 4095\,\text{km} \cdot \pi \approx 25\,727\,\text{km}$
Geschwindigkeit: $25\,727\,\text{km} : 24\,\text{h} \approx 1072\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

c) Individuelle Lösungen. Breitengrad im Internet oder Lexikon nachschlagbar.
z. B.: München 48°9′ nördl. Breite; Umfang $\approx 26\,781\,\text{km}$
Geschwindigkeit: $26\,781\,\text{km} : 24\,\text{h} \approx 1116\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

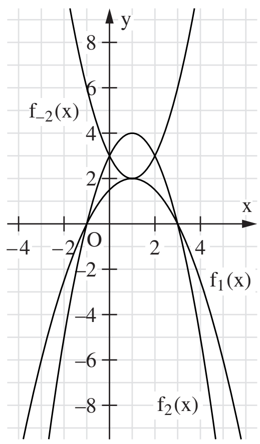
5 Umfang der Erde am Äquator: $U = 2 \cdot 6378{,}14\,\text{km} \cdot \pi \approx 40\,075\,\text{km}$
$((40\,075\,\text{km}) : 360) \cdot (79 - 51) \approx 3117\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
Die beiden Städte sind etwa 3117 km voneinander entfernt.

6 a) Sydney 151° östl. Länge; Buenos Aires 58,5° westl. Länge
b) Vgl. Lösungen zu Aufgabe 4 b) und 5.
Umfang des 34. Breitenkreises: $U = 2 \cdot (6370\,\text{km} \cdot \cos 34°) \cdot \pi \approx 33\,181\,\text{km}$
Entfernung der beiden Städte: $(33\,181\,\text{km} : 360°) \cdot (360° - (151° + 58{,}5°)) \approx 13\,872\,\text{km}$
c) Material: Globus, Faden
Unterschiedliche Ergebnisse;
Messung auf einem Globus mit Maßstab 1 : 40 Mio. liefert eine Entfernung von 14 440 km.

7 Die Aufgabenstellung intendiert, einmal vom Flug längs eines Großkreises (Nord) auszugehen, das andere Mal vom Flug längs des Breitenkreises (West).
Der Großkreis hat einen längeren Umfang als jeder Breitenkreis (Äquator ausgenommen).
Somit ist die Flugroute nach Westen kürzer.

8 Richtige Antworten: a), c), d), e), f), h)

9 Ansatz: $f(x) = a \cdot (x + 1) \cdot (x - 3)$
$(= ax^2 - 2ax - 3a)$
Der Scheitelpunkt liegt auf der Symmetrieachse der beiden Nullstellen, d. h. auf $x = 1$.



Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 10
ISBN 978-3-12-731961-3

Thema: Quadraturen

S. 27

1 linke Figur: Höhensatz

Die Höhe h im rechtwinkligen Dreieck teilt die Hypotenuse in die Längen p und q.

grüne Fläche = h^2; gelbe Fläche = $p \cdot q$

$h^2 = b^2 - p^2 = c^2 - a^2 - p^2 = (p+q)^2 - a^2 - p^2 = q^2 - 2pq - a^2 \quad \Rightarrow \quad h^2 = 2pq - h^2$

$\Rightarrow \quad h^2 = p \cdot q$

rechte Figur: Satz des Pythagoras

grüne Fläche = c^2; gelbe Flächen = $a^2 + b^2$

Anwendung der Kathetensätze für rechtwinklige Dreiecke

(Katheten a und b, Hypotenuse c):

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(I)} & a^2 = c \cdot p \\ \text{(II)} & b^2 = c \cdot q \end{array}\right\} \Rightarrow \quad a^2 + b^2 = c \cdot p + c \cdot q = c \cdot (p+q) = c \cdot c = c^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 + b^2 = c^2$$

2 a) grün: $A_{gr} = \frac{1}{2} r^2$

gelb: $A_{ge} = \frac{1}{2} r^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} r\right)^2 \cdot \pi - \frac{1}{4} r^2 \pi = \frac{1}{2} r^2$

Seitenlänge des Quadrats: $\frac{\sqrt{2}\, r}{2}$

b) grün: $A_{gr} = \frac{1}{2} a \cdot b$

gelb: $A_{ge} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot \pi + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \pi + \frac{1}{2} \cdot ab - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^2 \cdot \pi$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2}{4} \cdot \pi + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \pi + \frac{1}{2} \cdot ab - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a^2+b^2}{4}\right) \cdot \pi = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$

Seitenlänge des Quadrats: $\frac{\sqrt{ab}}{2}$

c) grün: $A_{gr} = 2r^2$

gelb: $A_{ge} = 2r^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2} \cdot r}{2}\right)^2 \cdot \pi - r^2 \cdot \pi = 2r^2$

Seitenlänge des Quadrats: $\sqrt{2} \cdot r$

d) grün: $A_{gr} = r \cdot 2r = 2r^2$

gelb: $A_{ge} = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \pi + 2r^2 - \frac{1}{2} r^2 \cdot \pi = 2r^2$

Seitenlänge des Quadrats: $\sqrt{2} \cdot r$

3 $A_{Kreis} = \left(\frac{r}{2}\right)^2 \cdot \pi = \frac{r^2}{4} \cdot \pi$

$A_{Doppelsichel} = \frac{1}{2} r^2 \cdot \pi - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^2 \cdot \pi = \frac{1}{2} r^2 \cdot \pi - \frac{1}{4} r^2 \cdot \pi = \frac{r^2}{4} \cdot \pi$

4 $A_Q = A_{Kreis} = \pi \cdot 1\,cm^2$

$a^2 = \pi \cdot 1\,cm^2 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{\pi} \cdot cm$

5 a) Konstruktion: Individuelle Lösung

$\overline{A'D} \approx 15{,}7\,cm = r \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad \pi = 15{,}7\,cm : 5\,cm = 3{,}14$

b) Im Dreieck A′AD gilt: $\overline{A'D}^2 = \overline{AA'}^2 + \overline{AD}^2$

$\overline{AD} = 3 \cdot r - \overline{AC} = 3 \cdot r - r \cdot \tan 30° \qquad \left(\tan 30° = \frac{\overline{AC}}{\overline{MA}} \text{ im Dreieck CAM}\right)$

$\overline{A'D} = \sqrt{(2r)^2 + \left(3r - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot r\right)^2} = \sqrt{4r^2 + 9r^2 - 2\sqrt{3}\,r^2 + \frac{1}{3} r^2} = r \cdot \sqrt{4 + 9 - 2\sqrt{3} + \frac{1}{3}}$

$\overline{A'D} = r \cdot \sqrt{13\frac{1}{3} - 2\sqrt{3}}$

$13\frac{1}{3} - 2\sqrt{3} \approx 3{,}14153$ Somit ist die Näherung auf Zehntausendstel genau.

Absoluter Fehler: $\pi - \sqrt{13\frac{1}{3} - 2\sqrt{3}} \approx 0{,}000059314$

Lambacher Schweizer, Ausgabe Bayern,
Lösungen und Materialien – Klasse 10
ISBN 978-3-12-731961-3