Weiteres zum einseitigen Signifikanztest

I Zusammengesetzte Hypothesen

Es gibt Aufgabenstellungen, bei denen die Nullhypothese in der Form
H_0: $p \geq p_0$ beim linksseitigen Test und als
H_0: $p \leq p_0$ beim rechtsseitigen Test formuliert wird.
Man spricht dann von einer **zusammengesetzten Hypothese**.

Beispiel Nullhypothese in der Form H_0: $p \geq p_0$
In einer Fabrik werden Bauteile für Computer hergestellt. Erfahrungsgemäß sind mindestens 5% davon defekt. Nach einer Verbesserung im Produktionsprozess behauptet der Hersteller, dass weniger als 5% der Chips defekt sind. Ein Kunde untersucht die Behauptung durch einen Test auf dem Signifikanzniveau 10% mit einer Stichprobe vom Umfang $n = 400$.
Wie viele defekte Bauteile darf der Kunde höchstens in der Stichprobe finden, damit er die Behauptung als bestätigt ansehen kann?

■ Lösung: Der Kunde testet linksseitig die Nullhypothese H_0: $p \geq 0{,}05$ mit der Alternative H_1: $p < 0{,}05$. Denn er wird die Behauptung des Herstellers nur glauben, wenn deutlich weniger als 5% der Bauteile defekt sind. Als Nullhypothese wird hier H_0: $p \geq 0{,}05$ verwendet, weil im Text von *mindestens* 5% defekten Bauteilen die Rede ist. Testvariable ist X = „Anzahl der defekten Bauteile". Als Parameter verwendet man $n = 400$ und $p = 0{,}05$ und erhält als Ablehnungsbereich [0; 14] (Fig. 1).
Also darf der Kunde höchstens 14 defekte Bauteile in seiner Stichprobe finden, damit er die Behauptung des Herstellers akzeptiert.

Die Formulierung im Text legt hier bereits nahe, dass ein linksseitiger Test durchzuführen ist.

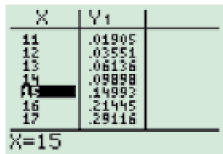

Fig. 1

Man geht in dem Beispiel vom „Extremfall" $p = 0{,}05$ aus, weil sich für größere Werte von p der Ablehnungsbereich weiter nach rechts verschieben würde (Fig. 2 und Fig. 3).
Einen für alle $p \geq 0{,}05$ gültigen Bereich, für den man H_0 verwerfen kann, erhält man daher als „Schnittmenge" aller Ablehnungsbereiche für $p \geq 0{,}05$. Das ist aber gerade der Ablehnungsbereich für $p = 0{,}05$.

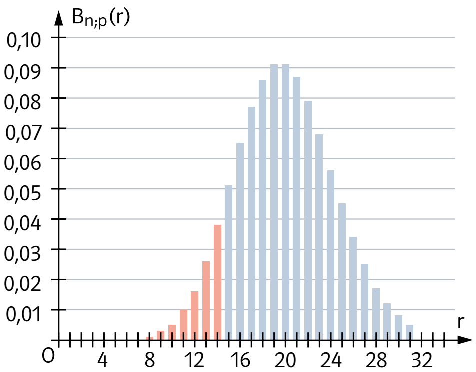

Fig. 2: Ablehnungsbereich [0; 14] für $p = 0{,}05$

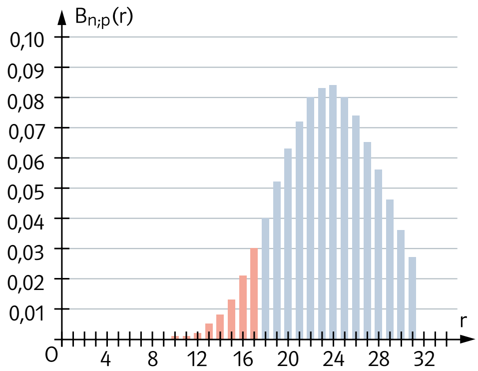

Fig. 3: Ablehnungsbereich [0; 17] für $p = 0{,}06$

Bei einer zusammengesetzten Nullhypothese H_0: $p \geq p_0$ bzw. H_0: $p \leq p_0$ verwendet man für die Testvariable den Parameter $p = p_0$.

Bei einer zusammengesetzen Hypothese H_0: $p \geq p_0$ bzw. H_0: $p \leq p_0$ wird also wie bei der Hypothese H_0: $p = p_0$ getestet.

© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2010 | www.klett.de | Alle Rechte vorbehalten
Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet. Die Kopiergebühren sind abgegolten.

Autor: Dieter Brandt

II Tipps zur Wahl von Nullhypothese H_0 und Alternative H_1

Die Behauptung wird als Gegenteil der Nullhypothese formuliert.
Wenn man eine Behauptung aufstellt, so wählt man die Nullhypothese so, dass sie das Gegenteil der Behauptung besagt.
Grund: Die Nullhypothese soll widerlegt werden, damit der Test für die Behauptung entscheidet.
In der Regel beschreibt die Nullhypothese den „Normalfall“ oder „Status quo”, die Behauptung dagegen beschreibt eine Abweichung vom „Normalfall”. Den Normalfall erkennt man im Text oft an Formulierungen wie „erfahrungsgemäß …”, „bisher …” u.ä.
So ist z.B. in dem Beispiel in Teil I „erfahrungsgemäß mindestens 5% der Bauteile defekt”, daher ist H_0: $p \geq 0{,}05$.

Die Wahl der Hypothesen erfolgt je nach Standpunkt.
Der Tester überlegt, wann aus seiner Sicht eine bestimmte Behauptung verworfen werden soll und formuliert damit die Hypothesen.
So wird z.B. in dem Testbeispiel auf Seite 357 vorgegangen.

Die Wahl der Hypothesen berücksichtigt die Folgen der Entscheidung.
Je nach Wahl der Hypothesen kann sich die Testentscheidung unterschiedlich auswirken, wie folgendes Beispiel zeigt.
Ein Pharmaunternehmen bringt ein neues Medikament auf den Markt, das angeblich in weniger als 5% der Anwendungen schädliche Nebenwirkungen zeigt.
Als Hypothesen bieten sich an:
1) Nullhypothese H_0: $p \geq 0{,}05$ mit der Alternative H_1: $p < 0{,}05$
2) Nullhypothese H_0: $p \leq 0{,}05$ mit der Alternative H_1: $p > 0{,}05$
Wenn man bei Variante 1) H_0 verwirft, obwohl H_0 eigentlich richtig ist, wird ein möglicherweise schädliches Medikament für gut gehalten. Diesen Fehler sollte man kontrolliert klein halten. Das kann man durch Wahl des Signifikanzniveaus erreichen.
Wenn man bei Variante 2) H_0 verwirft, obwohl H_0 eigentlich richtig ist, wird ein gutes Medikament für schädlich gehalten. Dieser Fehler kann eher toleriert werden.
Daher wird man aus Sicherheitsgründen Variante 1) wählen.
Genaueres zum Thema „Fehler beim Testen” mit weiteren Aufgaben siehe Buch Seite 375 ff.

Die Wahl der Hypothesen muss überzeugend sein.
Folgendes Beispiel zeigt, dass ein Test nicht willkürlich durchgeführt werden kann, wenn man damit ein bestimmtes Ziel erreichen will.
Bei einem Betrieb konnte die Geschäftsleitung bisher davon ausgehen, dass höchstens 31% der Angestellten regelmäßig in der Kantine essen. Der Kantinenpächter möchte einen Ausbau der Kantine erreichen und behauptet nach einer Umstellung des Speiseplans, dass sich der Anteil der Essensteilnehmer vergrößert hat. Er führt an einem beliebigen Tag einen Test auf dem 5%-Signifikanzniveau mit Stichprobenumfang 100 durch, um das zu belegen.
Wenn nun der Pächter die Hypothesen H_0: $p \geq 0{,}35$ bzw. H_1: $p < 0{,}35$ wählt, so erhält er den Annahmebereich $[27; 100]$. Bei z.B. nur 30 Essensteilnehmern könnte er also seine Behauptung bestätigt sehen. Nur wird er damit nicht die Geschäftsleitung überzeugen. Das gelingt dem Pächter nur, wenn im Vergleich mit der bisherigen Situation deutlich mehr Essensteilnehmer gezählt werden. Also wird er die Hypothesen H_0: $p \leq 0{,}31$ bzw. H_1: $p > 0{,}31$ wählen.

Klett
© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2010 | www.klett.de | Alle Rechte vorbehalten
Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet. Die Kopiergebühren sind abgegolten.
Autor: Dieter Brandt

III Was ein Signifikanztest leisten kann – und was nicht

- Ein Test ist nur eine Entscheidungsregel. Man entscheidet sich aufgrund des Tests für H_0 oder H_1.
- Man entscheidet sich für H_0, wenn das Stichprobenergebnis in den Annahmebereich fällt. Die Entscheidung für H_0 bedeutet aber nicht, dass H_0 richtig und H_1 falsch ist. Sie bedeutet nur, dass man H_0 nicht verwerfen kann. Das Ergebnis reicht nicht, um H_0 abzulehnen. Man geht zwangsläufig (weiterhin) davon aus, dass H_0 gilt. Der Annahmebereich wird daher auch als „Nichtverwerfungsbereich" bezeichnet.
- Man entscheidet sich für H_1, wenn das Stichprobenergebnis in den Ablehnungsbereich fällt. Die Entscheidung für H_1 bedeutet aber nicht, dass H_1 richtig und H_0 falsch ist. Sie bedeutet nur, dass man große Zweifel an H_0 hat und deshalb H_0 verwirft.
  Der Ablehnungsbereich wird daher auch als „Verwerfungsbereich" oder als „kritischer Bereich" bezeichnet.
- Bei dem Test ist es unbedingt nötig, vor der Stichprobenerhebung das Signifikanzniveau sowie den Stichprobenumfang festzulegen. Damit sind auch Annahme- und Ablehnungsbereich festgelegt. Ein nachträgliches Festlegen von Signifikanzniveau und Stichprobenumfang ist eine Manipulation, denn es ermöglicht unter Umständen, dass ein Ergebnis im Sinne des Testers erreicht wird.
- Nur bestimmte festgelegte Werte für das Signifikanzniveau ermöglichen Vergleiche. Daher werden in der Regel die Signifikanzniveaus 5% und 1% verwendet. Nicht sinnvoll ist insbesondere die Festlegung eines Ablehnungsbereichs „nach Gefühl".
- Wenn man das Signifikanzniveau verkleinert, wird das Verwerfen von H_0 unwahrscheinlicher, wenn H_0 richtig ist. Das wird man daher vor allem dann tun, wenn ein Verwerfen von H_0 vielleicht schlimme Folgen hat. In dem obigen Beispiel wird man das neue Medikament nur einführen, wenn man fast sicher sein kann, dass man H_0 verwerfen kann. Allerdings steigt damit (bei gleichem Stichprobenumfang) die Wahrscheinlichkeit, dass man bei H_0 bleibt, obwohl eigentlich H_0 falsch ist. Der Zusammenhang zwischen den Fehlern, die man bei der Entscheidung begehen kann, wird im Buch ab Seite 375 untersucht.

Weitere Aufgaben mit Lösungen

1 Ein Labor entwickelt einen neuen Impfstoff und testet ihn in einem Tierversuch mit 500 Mäusen. Mit dem Impfstoff dürfen keine klinischen Studien an Menschen durchgeführt werden, wenn sich im Tierversuch in mindestens 5% der Fälle unerwünschte Nebenwirkungen zeigen.
Bestimmen Sie für die Nullhypothese H_0: $p \geq 0{,}02$ die Entscheidungsregel für den Test mit 500 Mäusen mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 1%.

Die Formulierung „Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 1%" bedeutet, dass das Signifikanzniveau 1% ist.

2 Eine Firma, die Tablet-Computer herstellt, behauptet, dass höchstens 4% der Geräte defekt seien. Die Behauptung soll mit einer Stichprobe von 150 Stück getestet werden. Man erhält 12 defekte Tablet-Computer.
Kann man daraus mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 5% schließen, dass die Firmenangabe nicht zutrifft?

© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2010 | www.klett.de | Alle Rechte vorbehalten
Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet. Die Kopiergebühren sind abgegolten.
Autor: Dieter Brandt

3 Der Computerhersteller FastCalc bezieht Schaltelemente von der Firma UpAndDown. Erfahrungsgemäß sind 95 % der Schaltelemente einwandfrei. FastCalc überprüft die Hypothese, dass mindestens 95 % der Schaltelemente einwandfrei sind, mit einer Stichprobe vom Umfang 100. Die Irrtumswahrscheinlichkeit soll höchstens 10 % betragen.
a) Ermitteln Sie den Annahmebereich und den Ablehnungsbereich.
b) Angenommen, in Wirklichkeit sind nur 90 % der Schaltelemente einwandfrei. Ihr Stichprobenergebnis fällt aber in den Annahmebereich und Sie entscheiden sich dafür, die Nullhypothese anzunehmen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Sie diese falsche Entscheidung treffen?

4 Ein Obstgroßhändler behauptet, dass höchstens 8 % der von ihm verkauften Orangen mindestens einen Kern enthalten.
a) Beschreiben Sie, wie man als Abnehmer einen Test durchführen wird, wenn man an der Behauptung des Obstgroßhändlers zweifelt.
b) Diskutieren Sie, welchen Einfluss die Wahl des Signifikanzniveaus auf die Entscheidung hat, ob man dem Händler glaubt.
c) Angenommen, in Wirklichkeit enthalten 12 % der Orangen mindestens einen Kern. Sie entscheiden sich aufgrund des Testergebnisses dafür, dem Händler zu glauben. Wie berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Sie diese falsche Entscheidung treffen?

Lösungen

1
H_0: $p \geq 0{,}02$; H_1: $p < 0{,}02$; Testvariable X: Anzahl der Mäuse, bei denen Nebenwirkungen auftreten. Parameter sind $n = 500$, $p = 0{,}02$, Signifikanzniveau 1 %. Annahmebereich: [4; 500], Ablehnungsbereich: [0; 3].
Wenn 3 oder weniger Mäuse Nebenwirkungen zeigen, kann H_0 verworfen werden. Es können dann klinische Studien an Menschen durchgeführt werden.

2
H_0: $p \leq 0{,}04$; H_1: $p > 0{,}04$; Testvariable X: Anzahl der defekten Geräte. Parameter sind $n = 150$, $p = 0{,}04$, Signifikanzniveau 5 %. Annahmebereich: [0;10], Ablehnungsbereich: [11; 150].
Da 12 im Ablehnungsbereich liegt, ist H_0 zu verwerfen. Man geht davon aus, dass die Firmenangabe falsch ist. Vorsicht: Man kann nicht schließen, dass die Angabe falsch ist. Man entscheidet sich aber aufgrund des Tests dafür, die Nullhypothese für falsch zu halten.

3
H_0: $p \geq 0{,}95$; H_1: $p < 0{,}95$; Testvariable X: Anzahl der defekten Schaltelemente. Parameter sind $n = 100$, $p = 0{,}95$, Signifikanzniveau 10 %.
a) Annahmebereich: [92; 100], Ablehnungsbereich: [0; 91].
b) Nun ist $p = 0{,}9$. Die Wahrscheinlichkeit, die Nullhypothese zu akzeptieren ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Ergebnis im Bereich [92; 100] liegt. Man erhält $P(X \geq 92) = 1 - \text{binomcdf}(100, 0.9, 91) = 0{,}3209$.
Beachten Sie, dass jetzt mit der „richtigen" Wahrscheinlichkeit 0.9 gerechnet wird statt mit der bei der Nullhypothese angenommen von 0.95.

4
a) Man wird die Hypothesen H_0: $p \geq 0{,}08$ und H_1: $p < 0{,}08$ wählen, weil man die Behauptung des Händlers nur akzeptieren wird, wenn deutlich weniger als 8 % der Orangen mindestens einen Kern enthalten.
b) Je kleiner das Signifikanzniveau, desto kleiner die Wahrscheinlichkeit, dass man dem Händler glaubt, obwohl er Recht hat.
c) Man berechnet die Wahrscheinlichkeit für den Annahmebereich, wobei für X der Parameter $p = 0{,}12$ zu verwenden ist (vgl. Aufgabe 3 b).

Klett
© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2010 | www.klett.de | Alle Rechte vorbehalten
Von dieser Druckvorlage ist die Vervielfältigung für den eigenen Unterrichtsgebrauch gestattet. Die Kopiergebühren sind abgegolten.
Autor: Dieter Brandt